韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 25집 제 1호, 2011. 2. 147-166

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 25, No. 1, Feb. 2011. 147-166

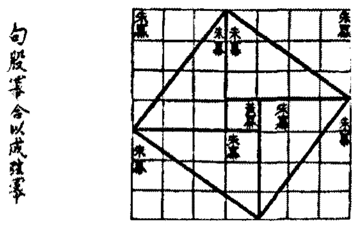
스프레드시트를 활용한 피타고라스 삼원수 성질의 탐구

손 홍 찬 (전북대학교)

본 고에서는 중학교 3학년 영재학생 5명을 대상으로 한 실험 수업 결과를 바탕으로 스프레드시트 환경에서 학생들이 생성수의 조건 변화에 따른 피타고라스 삼원수의 다양한 성질을 탐구할 수 있었음을 논하였고, 스프레드시트 환경이 스프레드시트의 구체적 수치로부터 학생이 발견하고 증명한 성질을 보다 일반적인 경우로 확장할 수 있는 기회를 줄 수 있었음을 논하였다. 또한 피타고라스 삼원수의 다양한 성질을 탐구함에 있어서 교사의 적절한 안내가 필요함을 함께 논하였다.

I. 서 론

피타고라스 정리는 기하학의 전 영역을 통틀어서 가장 유명한 정리 중의 하나이며 인류가 사용하여온 수학교과서에서 가장 많이 다루어진 정리 중의 하나로, 유클리드의 '원론(Elements)' 제1권 47번째 정리로 잘 알려져 있다. 이 정리를 인간생활에 이용했던 시기는 피타고라스가 살았던 시대보다 훨씬 오래된 것으로 알려져 있지만, 이 정리에 대한 증명은 기원전 540년 경에 처음으로 나타났다(이만근 · 전병근, 2007). 바빌로니아인들은 피타고라스보다 훨씬 전에 직각삼각형의 세 변의 길이가 되는 수를 구할 수 있었는데, 즉 $x, y, z\,(x, y < z)$인 양의 정수가 직각삼각형의 세 변의 길이이면 이들 사이에는 피타고라스 정리 $x^2 + y^2 = z^2$가 성립함을 알고 있었다(Anglin, 1994). 동양의 경우에도 기원전 1000년 경에 쓰여진 고대 중국의 '주비산경'이라는 수학책 가운데 이 정리에 해당하는 '구고현(勾股弦) 정리'로 소개되어 있다. 구고현(勾股弦)의 구는 직각삼각형의 밑변, 고는 높이, 현은 빗변을 일컫는다.



<그림 Ⅰ-1> 주비산경에 나타난 현의 정리

* 접수일(2011년 1월 13일), 심사(수정)일(2011년 2월 1일), 게재확정일자(2011년 2월 7일)
* ZDM분류 : D43
* MSC2000분류 : 97D50
* 주제어 : 스프레드시트, 피타고라스 삼원수, 추측, 일반화

유클리드의 '원론(Elements)'에 수록된 피타고라스 정리의 증명 방법은 도형의 분할과 합동을 이용하는 방법으로 피타고라스에 의해 제시된 것이다. 또한 48번 명제에서는 피타고라스 정리의 역을 다루고 있다. 피타고라스 정리는 주지하다시피 세 변의 길이가 각각 a, b, c인 직각삼각형의 직각을 낀 두 변의 길이가 a, b이면 $a^2+b^2=c^2$임을 의미하고, 피타고라스 정리의 역은 세 변의 길이가 각각 a, b, c인 삼각형에서 $a^2+b^2=c^2$인 관계가 성립하면, 이 삼각형은 길이가 c인 변을 빗변으로 하는 직각삼각형이라는 것을 의미한다.

이 정리는 입체 기하의 여러 정리의 증명을 위해 사용될 뿐만 아니라 삼각법을 이용하는 측량술, 항해술, 천문학 등 다양한 방면에 사용된다. 또한 이 정리의 증명 방법은 순수 기하학적인 증명뿐만 아니라, 기하학적 탐구의 대수적 방법에 기반을 둔 증명까지 다양한 방법들이 나타나고 있다. 피타고라스 정리를 증명하는 방법으로는 크게 직각삼각형의 닮음을 이용하는 방법, 넓이의 비를 이용하는 방법, 원을 이용하는 방법 등으로 나눌 수 있으며 매우 다양한 방법이 존재하여 현재는 거의 400여 가지에 이르는 증명 방법이 알려져 있다(이만근 · 전병근, 2007).

뿐만 아니라 피타고라스 정리는 이해하기 쉽고 이 정리를 만족하는 수의 규칙과 기하학적 성질로부터 그와 유사한 다른 성질을 찾아보는 소재로도 활용될 수 있어 매우 흥미로운 정리라고 볼 수 있다.

한편 공학적 도구인 스프레드시트는 여러 가지 수치적 계산을 하고, 계산된 수치를 관찰하면서 수치적 패턴을 찾기에 적합한 도구로 알려져 있다. 스프레드시트는 오늘날 수학교육에서 많이 쓰이는 공학적 도구 중의 하나로 개인용 PC에 탑재할 수 있는 것으로는 1979년에 Dan Bricklin이 만든 VisiCalc가 최초의 것이며 이후 IBM PC에 의해 Lotus 1-2-3이 개발되어 1980년 대에 많이 사용되었다(Power, 2002). 그 뒤를 이은 것이 오늘날 많이 사용되는 MS사의 Excel로 1990년대 중반부터 전 세계 스프레드시트의 대부분을 차지하게 되었다. 이 스프레드시트는 본래 자료 정리나 회계 일을 돕기 위해 고안된 것이었는데 점차 다양한 기능을 갖게 되면서 수학 교수학습에 사용되기 시작하였다. 1980년대 초반에 Dean Arganbright가 스프레드시트를 대학 수학의 교수학습에 사용한 이래로 1990년대 초반부터는 학교수학의 수학교수학습에 스프레드시트가 사용되기 시작하였다. 한편 수학 교수 · 학습에서의 스프레드시트의 활용에 대한 논의가 이루어졌다.

오늘날의 스프레드시트는 자동계산 기능, 차트 기능, 데이터 관리 기능, 매크로 기능 등을 제공한다. 이와 같은 기능들은 수학 교수학습에서 유용하게 사용될 수 있다. 이와 같은 특징을 갖는 스프레드시트를 수학 교수학습에서 활용함으로써 얻는 개략적인 장점 몇 가지는 다음과 같다. 첫째, 반복적인 많은 계산을 수행하여 쉽게 볼 수 있는 표로 나타내줌으로써 변수들 사이의 전체적인 패턴을 파악할 수 있도록 하고, 수식과 표, 그리고 그래프 사이의 관계를 화면상에서 역동적으로 고찰할 수 있게 한다. 둘째, 복잡한 수식을 자동계산 해줌으로써 학생들이 수를 다루는 번거로움에서 벗어나, 보다 개념적이고 본질적인 수학적 내용을 탐구할 수 있도록 하고, 보다 실제적인 문제들을 탐구할 수 있도록 한다(Friedlander, 1998). 셋째, 문제 해결과정에서 "What if"유형의 질문을 탐구할 수 있도록

한다(Masalski, 1999). 넷째, 스프레드시트를 사용하는 동안 학생 상호간, 교사와 학생, 컴퓨터와 학생의 상호작용을 활발히 만들어준다. 또한 문제해결 도구로서 학생에게 산술이나 초기 대수의 영역에서 강력한 사고와 전략을 제시한다(Hershkowitz et al., 2002). 이와 같은 스프레드시트의 특징과 장점은 수학교육에서 다양한 문제를 탐구하는데 활용되었는데, 주로 문자와 식의 지도, 대수와 함수의 지도, 수학적 모델링의 지도, 확률과 통계의 지도 등 다양한 측면에서 활용되었고 그 교수학적 논의가 있어왔다(Arganbright, 2004; Friedlander, 1998, 1999; Sutherland & Rojano, 1993; Wilson, 2004). 스프레드시트 환경에서 "What if"유형의 질문 탐구가 용이한 것은 수많은 셀마다 수식 입력 기능과 함께 다른 셀을 참조하는 기능이 있고, 참조되는 셀에 입력된 값이 변하게 되면 참조한 셀의 값이 변하게 되고, 참조한 셀을 자동 복사하여 만든 표나 그래프가 동시에 변하게 되는 특징에 기인한다.

여기에서는 중학교 영재 학생들을 대상으로 한 수업 결과를 바탕으로 스프레드시트의 이와 같은 특징이 피타고라스 정리를 만족하는 세 양의 정수쌍인 피타고라스 삼원수의 여러 성질을 탐구하는데 있어서 매우 유용하게 작용함을 보일 것이다. 특히 피타고라스 삼원수의 여러 가지 성질을 스프레드시트인 엑셀을 통하여 찾을 수 있었고, 찾은 성질에 대해 일련의 증명을 할 수 있었으며, 또 엑셀을 통해 얻을 수 있었던 구체적 자료로부터 발견한 성질을 보다 일반화할 수 있는 기회가 주어질 수 있었음을 논하고자 한다. 주로 스프레드시트를 통하여 찾을 수 있었던 피타고라스 삼원수의 성질을 위주로 기술하여, 중학교에서 영재수업이나 심화학습의 학습활동을 위한 소재로 사용될 수 있도록 하고자 하였고, 논의 및 제언에서는 스프레드시트를 활용하여 피타고라스 삼원수를 찾는 학생의 활동을 토대로 유의사항을 함께 제시하고자 한다.

Ⅱ. 피타고라스 삼원수

서론에서 언급한 바와 같이 피타고라스 정리와 그 역이 성립하므로 $x, y, z\,(x, y < z)$인 양의 정수는 $x^2+y^2=z^2$일 때만 직각삼각형의 세 변의 길이가 됨을 알 수 있다. 이와 같이 $x^2+y^2=z^2$를 만족하는 세 양의 정수 (x, y, z)를 '피타고라스의 삼원수'라고 한다. (x, y, z)가 피타고라스 삼원수이면 (kx, ky, kz)(단, k는 양의 정수) 도 $(kx)^2+(ky)^2=(kz)^2$가 성립하므로 피타고라스 삼원수임을 알 수 있다. 예를 들면 피타고라스 삼원수 $(3,4,5)$, $(5,12,13)\cdots$, 에 대하여 $(6,8,10)$, $(9,12,15), \cdots$, 그리고 $(10,24,26)$, $(15,36,39), \cdots$ 등도 피타고라스 삼원수임을 알 수 있다. 피타고라스 삼원수를 만족하는 몇 가지 경우는 다음과 같다(이만근 · 전병근, 2007).

(1) m이 홀수일 때, $\left(m, \dfrac{m^2-1}{2}, \dfrac{m^2+1}{2}\right)$ [피타고라스의 규칙]

(2) m이 4의 배수일 때, $\left(m, \dfrac{m^2}{4}-1, \dfrac{m^2}{4}+1\right)$ [플라톤의 규칙]

(3) m, n가 두 임의의 짝수 또는 홀수이고 $m > n$이며, mn이 제곱인 두 수일 때, $(\sqrt{mn}, \frac{m-n}{2}, \frac{m+n}{2})$ [유클리드의 규칙]

(4) m과 n이 임의의 두 짝수 또는 홀수이고, $m > n$이며 $\frac{m^2+n^2}{2n}$이 정수일 때, $(n^2, \frac{m^2-n^2}{2n}, \frac{m^2+n^2}{2n})$ [매저스(Maseres)의 규칙]

(5) m과 n이 임의의 두 소수이고, 그 중에서 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이며, $2mn$이 제곱수일 때, $(m+\sqrt{2mn}, n+\sqrt{2mn}, m+n+\sqrt{2mn})$ [딕슨의 규칙]

이와 같은 것들이 피타고라스 삼원수가 되는 것은 쉽게 증명된다.

만일 피타고라스 삼원수를 이루는 x, y, z가 서로소이면 이 때 (x, y, z)는 '원시피타고라스 삼원수'라고 하고 그렇지 않으면 '비 원시 피타고라스 삼원수'라고 한다. 그리고 피타고라스 삼원수를 세 변의 길이로 갖는 삼각형을 '피타고라스 삼각형'이라고 하고, 특히 원시 피타고라스 삼원수를 세 변의 길이로 갖는 삼각형을 '원시 피타고라스 삼각형'이라 한다. 비 원시 피타고라스 삼원수를 세 변의 길이로 갖는 삼각형을 '비 원시 피타고라스 삼각형'이라고 한다.

x, y, z가 $x^2+y^2=z^2$을 만족하는 원시 피타고라라스 삼원수이면 세 수가 서로 소이어야 하므로 세 정수가 모두 짝수가 될 수는 없다. 또한 세 정수가 모두 홀수가 될 수는 없다. 왜냐하면 만일 두 수 x, y가 홀수라면 x^2과 y^2도 홀수이다. 그러면 z^2이 짝수이므로 z는 짝수가 되기 때문이다. 다른 방식으로 두 수를 취할 경우에도 마찬가지로 나머지 하나의 수는 짝수가 됨을 알 수 있다. 그런데 실제로는 x와 y중 어느 한 수는 반드시 짝수이고, z는 항상 홀수가 되어야 한다. x와 y가 모두 짝수이면 z^2이 짝수이고 따라서 z가 짝수가 되어 원시성에 위배된다. 만일 x와 y가 모두 홀수이면 $z^2=x^2+y^2$은 짝수이고 따라서 z는 짝수이다. 그러면 z^2은 4의 배수가 되는데 x^2+y^2은 4로 나눈 나머지가 2이므로 모순이다. 따라서 x와 y중 어느 한 수는 반드시 짝수이고 z는 홀수이다.

지금부터는 피타고라스 삼원수를 찾는 방법을 알아보자. 즉 두 양의 정수의 제곱의 합이 양의 정수의 제곱과 같게 되는 세 수를 구하여보자. 항등식

$$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab \cdots\cdots ①$$

에서 $4ab$가 제곱수가 되면 $(a+b)^2$은 두 제곱수의 합이 된다. 따라서 $a=pm^2$, $b=pn^2$으로 놓으면

$$4ab=4\cdot pm^2\cdot pn^2=4p^2m^2n^2=(2pmn)^2$$

이 된다. ①에 $a=pm^2$, $b=pn^2$를 대입하면

$$(pm^2+pn^2)^2=(pm^2-pn^2)^2+(2pmn)^2$$

양변을 p^2으로 나누면

$$(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$$

여기서 $m, n(m>n)$이 양의 정수이면

$$x=m^2-n^2,\ y=2mn,\ z=m^2+n^2$$

로 놓은 x, y, z는 양의 정수이고 $x^2+y^2=z^2$을 만족한다.

이제 역으로 $x^2+y^2=z^2$를 만족하는 원시 피타고라스 삼원수 (x,y,z)에 대해 적당한 자연수 m, n이 존재하여 $x=2mn,\ y=m^2-n^2,\ z=m^2+n^2$이 되는지를 살펴보자. (x,y,z)를 원시 피타고라스 삼원수라고 하면 앞에서 언급한 바와 같이 x와 y중 어느 한 수는 반드시 짝수이고, z는 항상 홀수가 된다. x는 짝수, y는 홀수라고 가정하자.

$x^2=z^2-y^2=(z-y)(z+y)$에서 $x,\ z+y,\ z-y$는 모두 짝수이고

$(\frac{x}{2})^2=\frac{(z+y)}{2}\cdot\frac{(z-y)}{2}$이다.

$1=(y,\ z)=(y,\ -z)=(y,\ y-z)$이고, y가 홀수이고 $y-z$가 짝수이므로

$(y,\ y-z)=(y,\ \frac{y-z}{2})=(\frac{y+z}{2},\ \frac{y-z}{2})$이다.

따라서 $(\frac{y+z}{2},\ \frac{y-z}{2})=1$이고 $(\frac{x}{2})^2=\frac{(z+y)}{2}\cdot\frac{(z-y)}{2}$이므로 $\frac{y+z}{2}$와 $\frac{z-y}{2}$는 제곱수이다. 즉 $\frac{y+z}{2}=m^2$, $\frac{z-y}{2}=n^2$이 되는 자연수 m, n이 존재한다.

이것을 정리하면 $x=2mn,\ y=m^2-n^2,\ z=m^2+n^2$이다.

이때 피타고라스 삼원수 (x,y,z)에 대해 $x=2mn,\ y=m^2-n^2,\ z=m^2+n^2$를 만족하는 m와 n을 생성수라고 한다.

원시 피타고라스 삼원수 (x,y,z)의 생성수 m과 n은 서로소이고 홀짝성이 다름을 알 수 있다. 만일 m과 n이 서로소가 아니면 x,y,z도 서로소가 아니어서 모순이다. 또한 만일 m과 n이 모두 홀수이면 $x=m^2-n^2$, $z=m^2+n^2$이 짝수이고 $y=2mn$ 또한 짝수이므로 x,y,z가 원시라는데 모순이다. m와 n이 모두 짝수일 때도 마찬가지로 모순이다.

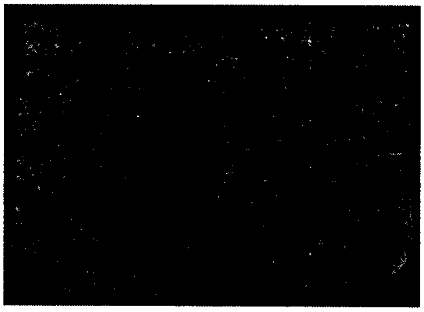
피타고라스 삼원수의 특별한 경우로 바빌로니아 삼원수에 대해 알아보자. 바빌로니아인들의 유적으로 컬럼비아 대학의 소장품인 플림프턴(Plimpton) 322 점토판을 보면, 바빌로니아인들은 특정한 피타고라스 삼원수에 대해 관심이 있었음을 알 수 있다. 메소포타미아의 남쪽에 살았던 수메르인들의 문명은 기원전 2000년경 바빌로니아인들에게 흡수되었고, 수메르인과 바빌로니아인들의 수학적 업적은 점토판 위에 기록되었다. $(2mn)^2+(m^2-n^2)^2=(m^2+n^2)^2$에서 m, n이 $2, 3, 5$ 이외의 다른

소인수를 갖지 않는 서로 소인 양의 정수일 때 (x, y, z)를 특별히 '바빌로니아 삼원수'라고 한다. 수 2,3,5는 바빌로니아인들이 사용하였던 60진법의 60의 소수인 약수들임을 알 수 있다. 바빌로니아인들은 10진법이 아닌 60진법을 이용하여 셈을 했고, 이것은 니케아의 히파르쿠스(Hipparchus)에 의해 기원전 150년경에 그리스의 천문학으로 전수되었다. 한 시간이 60분인 것은 바빌로니아인들과 히파르쿠스의 덕택이라 한다(Anglin, 1994).

예를 들어, $(90, 56, 106)$은 $m=9$이고 $n=5$인 바빌로니아 삼원수이다. 그러나 $(28,45,53)$은 $m=7$, $n=2$인 피타고라스 삼원수이지만, m이 2,3,5이외의 다른 소인수이기 때문에 바빌로니아 삼원수가 아니다. 그리고 바빌로니아 삼원수를 세 변의 길이로 갖는 삼각형을 '바빌로니아 삼각형'이라고 한다. 플림프턴 322번 점토판에 적혀있는 피타고라스 삼원수는 $\dfrac{m^2+n^2}{2mn}$의 비가 점점 작아지는 순서로 정리되어 있는데 점토판에서 첫 번째 열은 지워져 알 수 없고 바빌로니아 삼각형의 변 m^2-n^2의 값인 두 번째 열과 빗변 m^2+n^2의 값인 세 번째 열이 나타나 있다. 이러한 열들의 값을 십진법으로 나타내면 다음 표와 같다.

<표 II-1> 플림프턴 점토판에 나타난 바빌로니아 삼원수

	m^2-n^2	m^2+n^2
1	119	169
2	3367	4825
3	4601	6649
4	12709	18541
5	65	97
6	319	481
7	2291	3541
8	799	1249
9	481	769
10	4961	8161
11	**45**	**75**
12	1679	2929
13	161	289
14	1771	3229
15	56	106



<그림 III-1> 플림프턴 점토판

흥미롭게도 점토판에 쓰인 삼각형 중 바빌로니아 삼각형과 비슷하지만 바빌로니아 삼각형이 되지 않은 것이 있다. 11번째줄에 주어진 삼각형을 보면 $m^2-n^2=45$, $m^2+n^2=75$에서 $m^2=60$, $n^2=15$가 되어 세 변의 길이가 (60, 45, 75)인 삼각형은 바빌로니아 삼각형이 아니다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

이 연구에서는 스프레드시트를 활용하여 피타고라스 삼원수에 관한 성질을 어떻게 발견하고, 발견한 성질을 증명할 수 있는지, 그리고 스프레드시트 환경에서 얻어진 구체적 표로부터 얻은 성질을 일반화할 수 있는지에 관하여 그 과정을 분석하고자 사례연구 방법을 사용하였다. 이 연구에 참여한 학생은 중학교 3학년 영재 학생 5명으로 모두 중소도시의 중학교에 재학하고 있으며 대학교 부설 영재원 소속의 학생이다. 이들 학생 중 남학생은 4명, 여학생은 1명이다. 실험에 사용된 스프레드시트는 엑셀이며, 1명의 학생만이 초등학교 때 엑셀을 배운 경험이 있었고 나머지 학생의 경우에 엑셀 사용 경험이 없었다. 5명은 모두 학생 중심의 수학적 사실의 발견을 위해 설계된 수업을 해본 경험 또한 없었다.

실험수업은 3시간씩 5회에 걸쳐 실시되었다. 실험 수업에서 학생은 개인별로 하나의 컴퓨터를 사용하였다. 실험에 주어진 활동지는 엑셀을 통해 얻을 수 있는 표로부터 발견한 수학적 사실을 쓰고 증명하는 부분과 실험 수업을 통하여 얻을 수 있었던 성질을 정리하고 반성하는 부분으로 나뉘어져 있다. 엑셀을 이용하여 피타고라스 삼원수의 성질을 탐구하기 전에 엑셀에 관한 기본적인 기능을 익혔다. 여러 가지 기본 기능 중에 실험수업에서 필요한 엑셀 수식 입력을 통한 계산 기능, 셀 복사를 통한 표 그리기를 주로 익혔으며 약 30분 정도 소요되었다.

자료는 면담 자료, 관찰 자료, 비디오 자료, 학생이 컴퓨터에서 조작한 엑셀 파일, 그리고 이 과정을 동영상으로 저장한 파일을 통하여 수집하였다. 학생들은 실험에 앞서 연구자와 두 차례 정기적인 면담 기회를 가졌으며, 실험과 관련한 면담 자료는 실험 전후로 반 구조화된 면담을 통해서 수집하였다. 관찰 자료는 비디오를 이용하여 학생들의 모델링 활동을 녹화·녹음하고 컴퓨터 스크린에 보이는 스프레드시트 조작 활동을 동영상 캡쳐 프로그램을 이용하여 녹화하였다. 자료의 분석은 엑셀 파일로부터 학생이 발견한 수학적 사실, 그 사실의 증명 과정을 기록한 활동지와 학생이 작성한 엑셀 파일, 그리고 학생의 컴퓨터 조작 활동이 녹화된 동영상 캡쳐 파일을 주로 참고하였다. 분석의 과정은 학생이 엑셀을 이용하여 구체적인 표를 얻을 수 있는지, 그리고 표에 주어진 구체적인 수치들로부터 패턴을 발견하고 수학적 성질을 추측할 수 있는지, 학생이 추측한 성질을 증명할 수 있는지, 그리고 엑셀 환경이 표에 주어진 구체적 자료로부터 추측한 성질을 일반화할 수 있는 기회를 제공하는지에 대해 중점적으로 하였다.

Ⅳ. 스프레드시트를 활용한 피타고라스 삼원수의 탐구

두 생성수 m과 $n(m>n)$에 대하여

$$x=m^2-n^2,\ y=2mn,\ z=m^2+n^2$$

인 x, y, z은 피타고라스 삼각형의 세 변의 길이로 직각을 낀 두 변의 길이가 x, y이고 빗변의 길

이가 z이다. 이때 $z-y$는 제곱수이고, (x, y, z)가 원시 피타고라스 삼원수인 경우에 y는 4의 배수임을 알 수 있다. 이와 같이 피타고라스 삼원수에는 여러 가지 성질이 있다. 여기에서는 스프레드시트를 통하여 피타고라스 삼원수의 성질을 추측하고, 추측한 성질을 정당화한 학생들의 실험 결과를 위주로 피타고라스 삼원수의 성질을 기술한다. 아래의 탐구문제는 Beiler(1966)에 주어진 내용을 참조하여 제작하되 영재 학생의 수준을 고려하였다. 아래에 주어진 엑셀 파일의 표는 그림의 통일성을 기하기 위해 연구자가 제작한 것이나, 간단한 표였기 때문에 학생들 또한 유사하게 만들 수 있었다.

[탐구문제 1] 두 생성수 m과 n이 이웃하는 두 수, 즉 $m=n+1$일 때 피타고라스 삼원수의 성질에는 어떤 것이 있는가?

<스프레드시트>

A	B	C	D	E	F
	m	n	x=m^2 -n^2	y=2mn	z =m^2 +n^2
1	2	1	3	4	5
2	3	2	5	12	13
3	4	3	7	24	25
4	5	4	9	40	41
5	6	5	11	60	61
6	7	6	13	84	85
7	8	7	15	112	113
8	9	8	17	144	145
9	10	9	19	180	181
10	11	10	21	220	221
11	12	11	23	264	265
12	13	12	25	312	313

<그림 Ⅳ -1> 생성수가 이웃할 때의 피타고라스 삼원수

<성질 1> 두 생성수 m, n이 $m=n+1$을 만족할 때, $x=m^2-n^2$, $y=2mn$, $z=m^2+n^2$에 대하여 z는 y보다 1만큼 크다.

(증명) $z=m^2+n^2=(n^2+2n+1)+n^2=2n^2+2n+1$이고,

$y=2mn=2(n+1)n=2n^2+2n$이므로 $z=y+1$이 성립한다.

<성질 2> $n=1,2,3,\cdots$일 때, x의 일의 자리는 3, 5, 7, 9, 1이 반복되는 수열을 이루고 고, y의 일의 자리는 4, 2, 4, 0, 0이 반복되는 수열을 이루며, z의 일의 자리는 5, 3, 5, 1, 1이 반복되는 수열을 이룬다.

(증명) $x=m^2-n^2=(n+1)^2-n^2=2n+1$이다.

$n=5k+1$이면 $x\equiv 3 \pmod{10}$

$n=5k+2$이면 $x \equiv 5(\mathrm{mod}\,10)$
$n=5k+3$이면 $x \equiv 7(\mathrm{mod}\,10)$
$n=5k+4$이면 $x \equiv 9(\mathrm{mod}\,10)$
$n=5k$이면 $x \equiv 1(\mathrm{mod}\,10)$

이 되므로 x의 일의 자리는 3, 5, 7, 9, 1이 반복되는 수열을 이룬다. $y=2mn=2(n+1)n$의 경우에 $n=5k+1$이면 $y=2(5k+2)(5k+1)=50k^2+30k+4 \equiv 4(\mathrm{mod}\,10)$이고, 유사한 방법으로 조사하면 y의 일의 자리는 4, 2, 4, 0, 0이 반복되는 수열을 이룸을 알 수 있다.

$z=m^2+n^2=(n+1)^2+n^2=2n^2+2n+1=y+1$이므로 z의 일의 자리는 5, 3, 5, 1, 1이 반복되는 수열을 이룸을 알 수 있다.

[탐구문제 2] [그림 Ⅳ -1]을 관찰하여 피타고라스 삼각형의 세 변의 길이가 갖는 성질을 찾아보아라.

<성질 1> 세 변 중 어느 한 변의 길이는 3의 배수이다.

(증명) 삼각형의 세 변을 $x=m^2-n^2$, $y=2mn$, $z=m^2+n^2$이라 하자. m 또는 n이 3의 배수라면 $y=2mn$은 3의 배수이고, 둘 다 3의 배수가 아닐 경우에는 m^2, n^2 이 모두 3으로 나눈 나머지가 1이므로 $x=m^2-n^2$은 3의 배수가 된다.

<성질 2> 세 변 중 어느 한 변의 길이는 5의 배수이다.

(증명) 삼각형의 세 변을 $x=m^2-n^2$, $y=2mn$, $z=m^2+n^2$이라 할 때, m 또는 n이 5의 배수라면 $y=2mn$은 5의 배수이다.

둘 다 5의 배수가 아닐 경우 즉, m과 n이 $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$, $5k+4$ 중의 어떤 수인 경우는 m^2과 n^2을 5로 나눈 나머지가 1 또는 4이다. m^2과 n^2의 5로 나눈 나머지가 같은 경우에는 $x=m^2-n^2$가 5의 배수이고 다른 경우에는 $z=m^2+n^2$이 5의 배수이다.

<성질 3> 빗변의 길이와 직각을 낀 변의 길이가 이웃하는 자연수이면 두 생성수도 이웃하는 자연수이다. 즉 [탐구문제 1] <성질 1>의 역도 성립한다.

(증명) 두 생성수를 m, $n(m>n)$이라 하자.

$m^2+n^2=2mn+1$ 또는 $m^2+n^2=m^2-n^2+1$이다. 두 번째의 경우는 n이 자연수가 나올 수 없으므로 $m^2+n^2=2mn+1$이다. 즉 $(m-n)^2=1$이고 $m-n=1$를 얻는다. 즉 두 생성수가 이웃한다. 또한 이러한 피타고라스 삼각형은 원시임을 알 수 있다.

[탐구문제 3] 두 생성수 m과 n이 이웃하는 두 수, 즉 $m=n+1$일 때 피타고라스 삼원수 $x=m^2-n^2$, $y=2mn$, $z=m^2+n^2$에서 xy와 xyz의 성질에는 어떤 것이 있는가?

<스프레드시트>

A	B	C	D	E	F	G	H
	m	n	x=m^2 -n^2	y=2mn	z =m^2 +n^2	xy	xyz
1	2	1	3	4	5	12	60
2	3	2	5	12	13	60	780
3	4	3	7	24	25	168	4200
4	5	4	9	40	41	360	14760
5	6	5	11	60	61	660	40260
6	7	6	13	84	85	1092	92820
7	8	7	15	112	113	1680	189840
8	9	8	17	144	145	2448	354960
9	10	9	19	180	181	3420	619020
10	11	10	21	220	221	4620	1021020
11	12	11	23	264	265	6072	1609080
12	13	12	25	312	313	7800	2441400

<그림 IV-2> 생성수가 이웃할 때의 피타고라스 삼원수들의 곱

<성질 1> 직각을 낀 두 변의 길이의 곱 xy는 12의 배수이다.

(증명) $xy=2mn(m^2-n^2)=2mn(m+n)(m-n)$이고 m과 n은 홀짝성이 다르므로 m을 짝수라고 가정하자. 만일 n이 3의 배수이면 xy는 12의 배수이다.

m이 짝수이면서 3의 배수인 경우는 6의 배수이므로 xy는 12의 배수이다. $m\equiv 1(\mathrm{mod}3)$이고 $n\equiv 1(\mathrm{mod}3)$인 경우는 $m-n$이 3의 배수가 되어 xy가 12의 배수이고 $m\equiv 1(\mathrm{mod}3)$이고 $n\equiv 2(\mathrm{mod}3)$인 경우는 $m+n$이 3의 배수가 되어 xy가 12의 배수가 된다. $m\equiv 2(\mathrm{mod}3)$인 두 가지 경우도 마찬가지 방법으로 증명된다.

<성질 2> 세변의 길이를 곱한 결과는 60의 배수이다.

(증명) $xyz=2mn(m^2-n^2)(m^2+n^2)$은 <성질 1>에 의해 xy가 12의 배수이고 [탐구문제 2]의 <성질 2>에 의해 세 변 중 한 변의 길이는 5의 배수이다. 따라서 세 변의 길이의 곱 xyz는 60의 배수이다.

[탐구문제 4] 위의 [탐구문제 3]에서 주어진 x와 $y(x<y)$를 생성수로 갖는 피타고라스 삼원수의 성질에는 어떤 것이 있는가?

<스프레드시트>

A	B	C	D	E	F	G	H
	m	n	y=2mn	x=m^2 -n^2	y^2 - x^2	2xy	x^2 + y^2
1	2	1	4	3	7	24	25
2	3	2	12	5	119	120	169
3	4	3	24	7	527	336	625
4	5	4	40	9	1519	720	1681
5	6	5	60	11	3479	1320	3721
6	7	6	84	13	6887	2184	7225
7	8	7	112	15	12319	3360	12769
8	9	8	144	17	20447	4896	21025
9	10	9	180	19	32039	6840	32761
10	11	10	220	21	47959	9240	48841

<그림 IV-3> 빗변의 길이는 제곱수

<성질> 두 수 $x=m^2-n^2$과 $y=2mn$을 생성수로 갖는 피타고라스 삼각형에서의 빗변의 길이는 제곱수이다.

(증명) 두 수 $x=m^2-n^2$과 $y=2mn$을 생성수로 갖는 피타고라스 삼각형에서의 빗변의 길이는 $x^2+y^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$이므로 제곱수이다.

이 제곱수들은 $5^2=25$, $13^2=169$, $25^2=625, \cdots$이다.

[탐구문제 5] 앞의 <그림 Ⅳ -1>에서의 z와 $y(z>y)$를 생성수로 갖는 피타고라스 삼각형의 성질에는 어떤 것이 있는가?

<스프레드시트>

A	B	C	D	E	F	G	H	I
	m	n	x=m^2-n^2	y=2mn	z=m^2+n^2	z^2-y^2	2yz	y^2+z^2
1	2	1	3	4	5	9	40	41
2	3	2	5	12	13	25	312	313
3	4	3	7	24	25	49	1200	1201
4	5	4	9	40	41	81	3280	3281
5	6	5	11	60	61	121	7320	7321
6	7	6	13	84	85	169	14280	14281
7	8	7	15	112	113	225	25312	25313
8	9	8	17	144	145	289	41760	41761
9	10	9	19	180	181	361	65160	65161
10	11	10	21	220	221	441	97240	97241

<그림 IV-4> 직각을 낀 변의 길이는 제곱수

<성질> 앞의 <그림 Ⅳ -1>에서 z와 $y(z>y)$를 생성수로 갖는 피타고라스 삼각형의 직각을 낀 한 변의 길이는 제곱수가 된다.

(증명) 두 수 $z=m^2+n^2$과 $y=2mn$을 생성수로 갖는 피타고라스 삼각형에서의 직각을 낀 변의 길이는

$$z^2-y^2=(m^2+n^2)^2-(2mn)^2=(m^2-n^2)^2$$

이므로 제곱수이다. 이 제곱수들은 $3^2=9,\ 5^2=25,\ 7^2=49, \cdots$이다.

이제 생성수가 특별한 꼴 일 때의 경우를 살펴보자. 연속하는 자연수를 더해서 만든 수를 삼각수라고 한다. 예를 들어 $1,\ 3=1+2,\ 6=1+2+3,\ 10=1+2+3+4, \cdots$ 등은 삼각수이다. n번째 삼각수는 $1+2+3+\cdots+n$이기 때문에 $1+2+3+\cdots n=\dfrac{n(n+1)}{2}$와 같이 나타낼 수 있다.

[탐구문제 6] 이웃하는 삼각수 $m=\dfrac{k(k+1)}{2}$, $n=\dfrac{k(k-1)}{2}$를 생성수로 갖는 피타고라스 삼원수 $x=m^2-n^2$, $y=2mn$, $z=m^2+n^2$에는 어떤 성질이 있는가?

<스프레드시트>

A	B	C	D	E	F	G
	삼각수	m	n	x=m^2 -n^2	y=2mn	z=m^2 +n^2
1	1	3	1	8	6	10
2	3	6	3	27	36	45
3	6	10	6	64	120	136
4	10	15	10	125	300	325
5	15	21	15	216	630	666
6	21	28	21	343	1176	1225
7	28	36	28	512	2016	2080
8	36	45	36	729	3240	3321
9	45	55	45	1000	4950	5050
10	55	66	55	1331	7260	7381

<그림 Ⅳ-5> 이웃하는 삼각수를 생성수로 하는 피타고라스 삼원수

<성질 1> x는 세제곱수이다.

(증명) m과 n이 이웃하는 삼각수 $m=\dfrac{k(k+1)}{2}$, $n=\dfrac{k(k-1)}{2}$이므로

$x=m^2-n^2=\{\dfrac{k(k+1)}{2}\}^2-\{\dfrac{k(k-1)}{2}\}^2=k^3$이다. 따라서 x는 세제곱수이다.

사실 $k=m-n$이고 $x=m^2-n^2=(m-n)^3$임을 알 수 있다.

<성질 2> y는 일의 자리가 6 또는 0이다. 실제로 y의 일의 자리는 6, 6, 0, 0, 0,$\cdots$인 수열을 이룬다.

(증명) $y=2mn=\dfrac{k^2(k+1)(k-1)}{2}$이고 y는 짝수이다.

(i) $k=5l$, $k=5l+1$, $k=5l+4$인 경우는 y는 5의 배수이다. 즉 y가 짝수인 5의 배수이므로 10으로 나눈 나머지는 0이다. 따라서 이 경우 일의 자리는 0이다.

(ii) $k=5l+2$일 때, $y=\dfrac{(25l^2+20l+4)(5l+3)(5l+1)}{2}$이다.

l이 짝수일 때와 홀수일 때를 나누어 생각해보자.

$l=2j$일 때는 $y=(50j^2+20j+2)(10j+3)(10j+1)$는 10으로 나눈 나머지가 6이고,

$l=2j+1$일 때는 $y=(100j^2+140j+49)(10j+8)(5j+3)$는 10으로 나눈 나머지가 6이다.

(iii) $k=5l+3$일 때, $y=\dfrac{(25l^2+30l+9)(5l+4)(5l+2)}{2}$이다.

$l=2j$일 때 $y=(100j^2+60j+9)(5j+2)(10j+2)$는 10으로 나눈 나머지가 6이고,

$l=2j+1$일 때 $y=(50j^2+80j+32)(10j+9)(10j+7)$은 10으로 나눈 나머지는 6이다.

<성질 3> y, z는 이웃하는 삼각수이다.

(증명) $y=2mn$이므로

$$y=2\frac{k(k+1)}{2}\cdot\frac{k(k-1)}{2}=\frac{k^2(k^2-1)}{2}$$

가 되어 삼각수이다. 또 $z=m^2+n^2$이므로

$$z=\{\frac{k(k+1)}{2}\}^2+\{\frac{k(k-1)}{2}\}^2=\frac{k^2(k^2+1)}{2}$$

이다. 따라서 y는 k^2-1번째 삼각수이고 z는 k^2번째 삼각수이므로 y와 z는 서로 이웃하는 삼각수이다.

[탐구문제 7] 앞의 <그림 Ⅳ -1>에서 나타난 피타고라스 삼원수 중 y와 z와 같이 두 수가 이웃하는 경우가 있음을 보았다. 세변의 길이가 이웃하는 피타고라스 삼원수에는 어떤 것들이 있는가?

<성질> 세 변의 길이가 이웃하는 피타고라스 삼원수로는 (3, 4, 5)가 유일하다.

(증명) 이웃하는 피타고라스 삼원수 중 가장 작은 수를 $X=m^2-n^2$라 하면, $X+1=2mn$, $X+2=m^2+n^2$이고, $m^2=X+1$이고 $m^2=2mn$으로부터 $m=2n$을 얻는다. 또한 $n^2=1$이므로 $n=1$이고 $m=2$이다. 따라서 $X=3$, $X+1=4$, $X+2=5$이다.

[탐구문제 8] 앞의 <그림 Ⅳ -1>을 관찰하여 두 생성수가 이웃할 때의 피타고라스 삼각형의 각 변의 길이가 갖는 성질을 찾아보아라.

<성질 1> $N=4k+2$인 수 N은 피타고라스 삼각형의 직각을 낀 변의 길이가 될 수 없다.

(증명) 직각을 낀 두 변 중 하나만이 반드시 짝수이고 이 변이 $N=4k+2=2mn$이어야 한다. 그런데 N은 4의 배수가 아니므로 m과 n을 이웃하게 취할 수 없다.

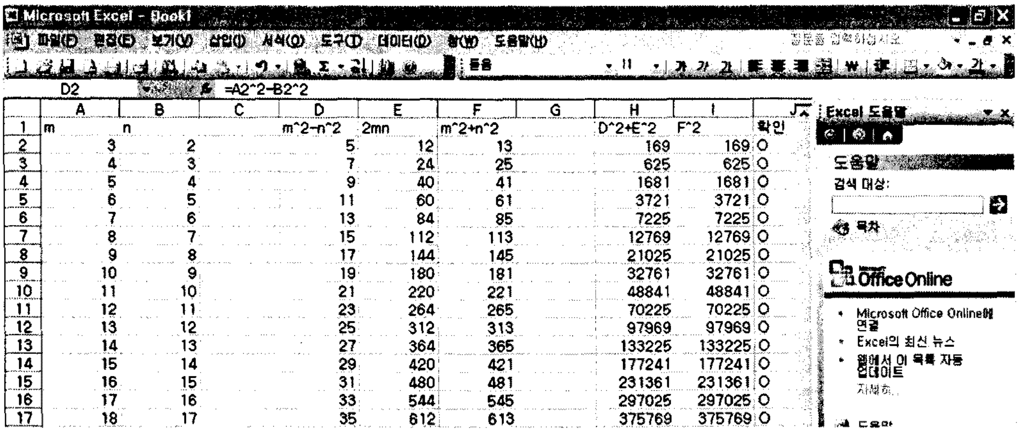
<성질 2> 피타고라스 삼각형의 빗변의 길이 N은 $4k+1$의 꼴의 수이다.

(증명) N이 원시 피타고라스 삼각형의 빗변의 길이라 하면 $N=m^2+n^2$꼴 이다.

m은 $m=4k$, $m=4k+1$, $m=4k+2$, $m=4k+3$의 각각의 경우 m^2을 4로 나누면 나머지는 각각 0, 1, 0, 1이다. 마찬가지로 n^2도 4로 나눈 나머지가 0 또는 1이므로 m^2+n^2을 4로 나눈 나머지는 0, 1, 2가 되므로, N은 $4k+3$의 꼴은 될 수 없다. 그런데 두 생성수가 이웃할 때 피타고라스 삼각형의 빗변의 길이는 홀수이므로 $N=m^2+n^2$을 4로 나눈 나머지는 0과 2가 될 수 없다. 따라서 $N=4k+1$이다.

Ⅴ. 논의 및 제언

우리 교육과정에서 피타고라스 정리는 중학교 3학년에서 다루도록 되어있고, 그 역은 증명 없이 문제 상황을 통해 간단히 다루도록 되어있다(교육인적자원부, 2007). 피타고라스 삼원수는 피타고라스 정리를 배운 후에 별다른 배경 지식 없이 다룰 수 있다는 점에서 피타고라스 정리를 배운 학생에게는 재미있게 탐구해볼 수 있는 주제가 될 수 있다. 앞에서 살펴본 바와 같이 피타고라스 삼원수는 여러 가지 다양한 성질을 지니고 있으며 스프레드시트를 이용하여 다양한 조건 하에서 성립하는 피타고라스 삼원수의 성질을 탐구할 수 있다. 이들의 성질 탐구에 쓰이는 스프레드시트 수식 또한 아주 간단하기 때문에, 학생들은 약간의 설명을 듣고 바로 스프레드시트에서의 표를 작성할 수 있었다. <그림 Ⅴ-1>에는 학생 A가 생성수가 이웃할 때의 피타고라스 삼원수를 구하고 실제로 피타고라스 삼원수가 되는지를 확인하는 모습이 담겨있다.

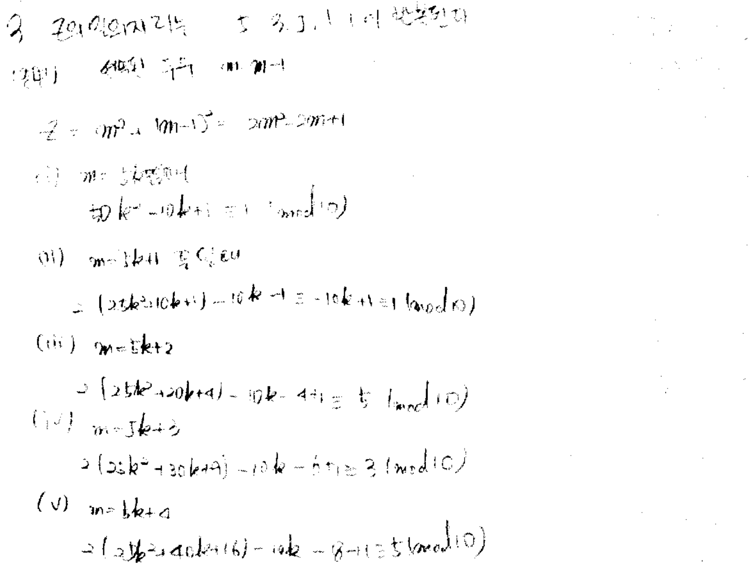


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	m	n		m^2-n^2	2mn	m^2+n^2		D^2+E^2	F^2	확인
2	3	2		5	12	13		169	169	O
3	4	3		7	24	25		625	625	O
4	5	4		9	40	41		1681	1681	O
5	6	5		11	60	61		3721	3721	O
6	7	6		13	84	85		7225	7225	O
7	8	7		15	112	113		12769	12769	O
8	9	8		17	144	145		21025	21025	O
9	10	9		19	180	181		32761	32761	O
10	11	10		21	220	221		48841	48841	O
11	12	11		23	264	265		70225	70225	O
12	13	12		25	312	313		97969	97969	O
13	14	13		27	364	365		133225	133225	O
14	15	14		29	420	421		177241	177241	O
15	16	15		31	480	481		231361	231361	O
16	17	16		33	544	545		297025	297025	O
17	18	17		35	612	613		375769	375769	O

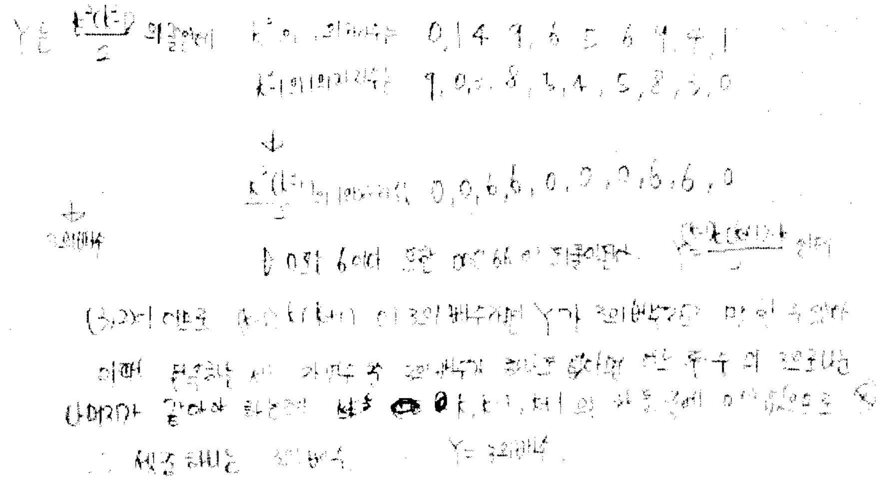
<그림 V-1> 학생 A가 생성수가 이웃할 때의 피타고라스 삼원수를 구하고 확인하는 과정

Morishita, Iwata, Yoshida, & Yoshida(2001) 와 Bialas(2001)가 지적한 바와 같이 스프레드시트는 프로그래밍 언어 없이도 이미 만들어진 환경에서 쉽게 조작할 수 있어서 피타고라스 삼원수의 성질 탐구와 같은 탐구적 활동에 적합함을 알 수 있다. 특히 여러 가지 생성수가 갖는 조건을 변화시켰을 때 성립하는 피타고라스 삼원수의 성질을 찾을 수 있었던 것은 스프레드시트가 “What if”유형의 질문 탐구에 적절하다고 한 Masalski(1999)의 의견과도 일치함을 볼 수 있다.

이와 같이 스프레드시트를 활용할 때 학습의 특징은 수학적 사실의 발견을 위한 학생 중심의 탐구 학습을 할 수 있다는 점이다. 대부분의 탐구문제에서 약간의 조건만으로도 여러 가지 피타고라스 삼원수와 관련된 성질을 찾을 수 있었던 것에는 스프레드시트를 이용한 수치적 표의 작성이 중요한 역할을 하였다. 대개의 경우 주어진 탐구문제처럼 약간의 조건만 제시되었을 때에도 스프레드시트를 작성한 후에 수치적 패턴을 찾을 수 있기 때문에 자발적으로 호기심을 가지고 여러 가지 성질을 추측할 수 있었다. 이 경우 학생들은 교사가 상상한 것 이상의 결과를 도출하기도 하는데 [탐구문제 1]에서의 <성질 2>를 비롯한 수열의 발견이 그것이었다. 이와 같은 것은 수학적인 의미가 크지 않을지라도 학생 스스로 찾고 그 성질을 또한 스스로 증명하는 것과 같은 학생 중심의 자발적인 탐구 활동으로서 수학적 활동을 한다는 것에서 그 의미를 찾을 수 있다(<그림 V-2>와 <그림 V-3> 참조).



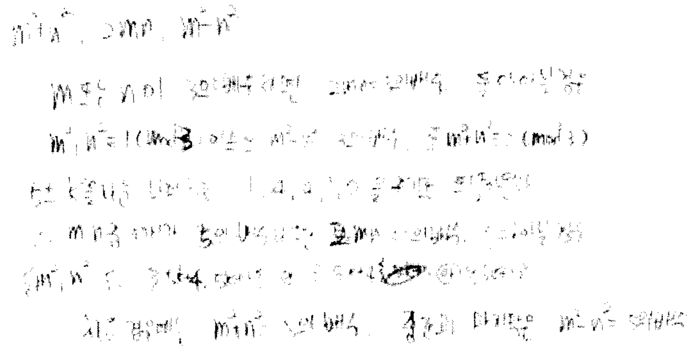
<그림 V-2> 학생 B의 [탐구문제 1]의 <성질 2>에 대한 증명



<그림 V-3> 학생 C의 [탐구문제 6]의 <성질 2>에 대한 증명

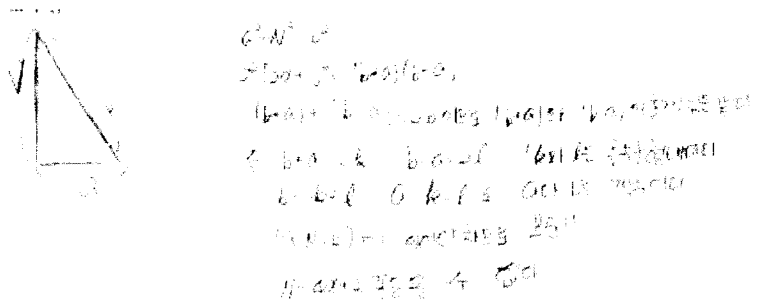
한편 교사는 좀 더 적극적인 안내를 하여야 하는 경우도 있다. 예를 들면 [탐구문제 2] 또는 [탐구문제 8]에서와 같은 경우로, 학생들은 모호한 조건 하에서 성질을 찾기 어려웠다. 이때, 각각 '3과 5의 배수와 관련하여' 또는 '4로 나누었을 때의 나머지와 관련된 것'과 같은 구체적인 탐구의 방향을 제시함으로써 학생들은 결과에 제시된 성질을 추론하고 증명할 수 있었다. 예전의 수학자들이 발견했던 수학적 사실을 재발견해나갈 수 있게 하기 위해서는 적절한 안내가 필요함을 시사해주는 장면

으로 볼 수 있다.



<그림 V-4> 학생 C의 [탐구문제 2]의 <성질 2>에 대한 증명

한편 구체적으로 주어진 조건에 의해 생성된 스프레드시트를 보고 학생들이 얻은 결론을 좀 더 일반화할 수 있는지에 대한 탐구가 이어질 수 있다. 예를 들면, [탐구문제 2]의 <성질 1>과 <성질 2>는 임의의 피타고라스 삼원수에 대해서도 성립함을 알 수 있다. 또한 [탐구문제 3]의 <성질 1>과 <성질 2>는 임의의 원시 피타고라스 삼원수에서 성립함을 알 수 있다. [탐구문제 7]에서 세 변의 길이가 이웃하는 피타고라스 삼원수를 그 차이가 일정한 경우에 대해 탐구하기를 요구할 수 있다. 이와 같은 경우는 만일 $x, y, z(x<y<z)$의 차가 $y-x=z-y$를 만족하면 $x:y:z$는 $3:4:5$와 같은 경우가 성립함을 알 수 있다. 왜냐하면 $y-x=z-y=d$라고 할 때 $x=y-d$, $z=y+d$이므로 $(y-d)^2+y^2=(y+d)^2$이고 $y(y-4d)=0$를 얻게 되고, $y>0$이므로 $y=4d$이므로 $x=3d$, $z=5d$이기 때문이다. 또 [탐구문제 8]의 경우에는 생성수가 이웃하므로 홀짝성이 다르고 서로소이므로 이때의 피타고라스 삼원수는 원시 피타고라스 삼원수가 되는데, 이때에는 생성수가 이웃하는 경우가 아닌 일반적인 원시 피타고라스 삼원수에서도 [탐구문제 8]에서 찾은 성질이 성립하는 지를 물어볼 수 있다. 이 경우 원시 피타고라스 삼원수에서도 그러한 성질이 성립함을 주어진 증명과 대동소이하게 증명할 수 있다. <그림 V-5>는 학생 B가 모순법을 이용하여 [탐구문제 8]의 <성질 1>의 조건을 이웃한 생성수 대신 보다 일반적인 원시피타고라스 삼원수인 경우에 대해 증명한 모습을 보여준다.



<그림 V-5> 학생 B의 [탐구문제 8]의 <성질 1>의 일반화에 대한 증명

스프레드시트를 활용하여 얻은 피타고라스 삼원수의 성질을 증명하는 데는 약수, 배수, 홀짝성, 소인수분해와 같은 기본적인 지식을 필요로 한다. 따라서 중학교 과정의 영재 학습이나 심화학습에서는 스프레드시트를 활용하여 피타고라스 삼원수의 성질과 같은 다양한 성질을 유추하고 증명해보는 활동을 해볼 수 있다. 스프레드시트를 이용하면 구체적인 수치의 나열로부터 일차적으로 쉽게 얻을 수 있는 성질을 먼저 찾고 또한 이 성질에서 힌트를 얻어 일반화된 성질을 찾아볼 수 있어서 일반화를 지도하는 중요한 기회로 삼을 수 있다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2007). 수학과 교육과정, 교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책 8].

이만근 · 전병기(역) (2007). 올 댓 피타고라스 정리, 경문사. 서울.

류희찬 (1997). 수학교육에서의 컴퓨터의 활용: 현황과 과제. 한국교원대 수학교육연구소 제6회 수학교육세미나.

Anglin W. S. (1994). *Mathematics: A Concise History and Philosophy,* Springer. 류희찬 · 류성림(역) 수학의 철학과 역사(2003). 서울:경문사.

Arganbright D., & Neuwirth E. (2004). *The Active Modeler: Mathematical Modeling with Microsoft Excel.* Thomson.

Baker J. E., & Sugden S. J. (2003). Spreadsheets in education-the first 25 Years, *eJSiE* **1(1)**, 18-43.

Beare, R., & Hewitson, J. (1996). Asking and answering all sorts of scientific questions using spreadsheets. *School Science Review* **77(281)**, 43-53.

Beiler A. H. (1966). *Recreations in the theory of numbers,* Dover Publications, inc. New York.

Bialas, Piotr. (2001). *Spreadsheet use in an elementary statistics course.* Doctoral Dissertation, Columbia University Teachers College.

Friedlander, A. (1998). An excellent bridge to algebra, *Mathematics teacher,* **91(50)**, 382-383.

———— (1999). Cognitive processes in a spreadsheet environment. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* **Vol 2**. 337-344.

Hershkowitz, R., Dreyfus, T., Ben-Zvi, D., Friedlander, A., Hadas, N., Resnick, T., & Tabach, M. (2002). *Mathematics curriculum development for computerized environ- ments: A designer-researcher-teacher-learner activity.* In L. English (Ed.), Handbook of International Research in Mathematics Education. (pp. 657-694). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 류희찬 · 조완영 · 이경화 · 나귀수 · 김남균 · 방정숙(역). 학교수학을 위한 원리와 규준. 서울: 경문사.

Masalski, W. J. (1990). *How to use the spreadsheet as a tool in the secondary school mathematics classroom,* Reston, VA: NCTM.

Morishita, E., Iwata, Y., Yoshida K. Y., & Yoshida H. (2001). Spreadsheet fluid dynamics for aeronautical course problems. *International Journal of Engineering Education* **17(3)**, 294-311.

Power, D. J. (2002). *A Brief History of Spreadsheets,* DSSResources.COM, World Wide Web, http://dssresources.com/history/sshistory.html, version 3.6.

Steward, A. (1994). Spreadsheets in Mathematical Education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* **25(2)**.

Sutherland, R., & Rojano, T. (1993). A spreadsheet approach to solving algebra problems. *Journal of Mathematical behavior,* **12**, 353-383.

Wilson, K. Ainley, J., & Bills L. (2004), Spreadsheet generalizing and paper and pencil generalizing, In HΦines, M. J. Fuglestad, A. B. (Ed.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* **Vol 4**, 441-448.

On Exploring the Properties of Pythagorean Triples Using Spreadsheets

Son, Hong Chan
Dept. of Math. Education, Chonbuk National University,
Deokjin-dong, Jeonju-city, Jeonbuk, Korea 561-756
E-mail : hcson@jbnu.ac.kr

In this paper, we listed and discussed the properties of the Pythagorean triples which 5 gifted 9th graders could draw in spreadsheets environments. And we also discussed their implications. In detail, in spreadsheets environments students could make the table of Pythagorean triples easily under several conditions of generate numbers of Pythagorean triples. And they could draw several properties of Pythagorean triples from the tables and could prove them. In spreadsheets environments it is easy to give students chances of generalization of the properties of Pythagorean triples which they had obtained from the concrete table of Pythagorean triples.

* ZDM Classification : D43
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* Key Words : spreadsheet, Pythagorean triples, conjecture, generalization