韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 25집 제 1호, 2011. 2. 63-78

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 25, No. 1, Feb. 2011. 63-78

CAS 그래핑 계산기의 임베디드 시각화를 통한 함수의 극한 지도 방안 탐색

조 정 수 (영남대학교)*

본 연구는 미적분학의 입실론-델타($\epsilon-\delta$)에 의한 엄밀한 함수의 극한값 구하기를 좀 더 직관적이며 시각화를 이용한 지도 방안을 탐색해 보고자 한다. 이를 위하여 Texas Instruments의 Voyage200 CAS 그래핑 계산기의 임베디드 시각화를 활용하여 미적분학 지도에서 공학 활용의 가능성을 제기하고자 한다. 이를 위하여 개념이미지와 개념정의, 인지적 갈등, 미적분 개념에 대한 공학과 시각화의 활용, APOS 이론, 그리고 국소적 수평화를 중심으로 이론적 고찰을 실시했다. 이러한 이론적 고찰을 토대로 CAS 그래핑 계산기의 임베디드 시각화를 활용하여 함수의 극한을 구하는 지도 방안을 구현하였다.

Ⅰ. 서 론

대학 수학의 모든 영역 중에서 미적분학은 공학 사용의 관심과 적용을 위한 최적의 영역으로 인식되어 왔다. 다양한 프로그래밍 언어를 사용한 수치 해석용 프로그래밍부터 미적분학 개념 탐구를 위한 목적으로 하는 그래픽 소프트웨어의 사용이나 Mathematica, Maple, Derive, Theorist, Mathcad와 같은 컴퓨터 대수 시스템(Computer Algebra Systems)까지 광범위한 혁신적 공학들이 미적분학의 교수·학습에 도입되어 왔다.

이렇게 혁신적 공학들의 도입을 가져오게 된 이유는 많은 학생들이 전통적인 미적분학 교수·학습에 대해 근본적으로 만족하지 못하기 때문이라고 주장하는 사람들도 있고, 어떤 사람들은 활용 가능한 공학이 있기 때문에 활용하는 것이 당연하다고 주장한다(Tall, Smith, & Piez, 2008).

미적분학의 여러 개념에 대한 연구결과에 따르면, 고등학생과 대학생의 경우 개념정의와 개념이미지가 다르고 주어진 정의를 조작하는 능력이 부족하다는 것을 보여주고 있다(Artigue, 1991). 공학의 여러 가지 경험은 이러한 미적분학의 지도의 어려움을 해소할 수 있는 방안을 제시해주고 있다. 공학에 의한 경험은 적절히 개발된다면 학생들이 개념화와 절차화는 물론 개념을 제시하는 여러 상황

* 접수일(2011년 1월 1일), 심사(수정)일(2011년 1월 26일), 게재확정일자(2011년 1월 27일)
* ZDM분류 : I15
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 함수의 극한, CAS 그래핑 계산기, 시각화, APOS 이론
* 이 연구는 2010년도 영남대학교 학술연구조성비에 의한 것임.

사이에서 좀 더 균형된 인지적 능력을 가질 수 있을 것이다. Dubinsky와 Tall(Artigue, 1991)에 의하면, 적절한 공학용 언어를 사용하면 학생들이 한정기호를 조작할 수 있고 엄밀한 증명에 대한 의미 있는 개념 이미지를 구성할 수 있다고 한다. 따라서 공학은 역동적인 시각화를 통해 기하적 상황과 그래프 상황에 접근하기 쉽게 해 주며, 적절히 탐구된다면 대수적 표상과 기하적 표상 사이의 관계를 파악하는데 도움을 준다. 그리고 공학이 제공하는 함수의 그래프를 이용하면 정신적 이미지가 풍부해지고 기본 개념에 대한 개념 이미지의 형성이 쉬워진다.

극한은 상당히 어려운 개념으로 전형적인 고등 수학적 사고가 요구되는 개념 중 하나이다(Cornu, 1991). 극한은 근사, 연속, 미적분 이론의 기초로서 해석학의 모든 분야에서 아주 중요한 개념이다. 극한 개념의 교수·학습에서 가장 어려운 문제는 극한의 의미가 풍부하고 복잡할 뿐만 아니라 수학적 정의만으로는 인지적 갈등을 해결할 수 없다는 것이다. Tall은 극한 개념에서 학생들이 겪는 어려움에 관한 연구에서 형식적 정의로 접근하든 "접선에 가까워지는" 할선에 대한 기하적 경험을 통해서 접근하든 어느 것도 좋지 않다고 한다. Tall에 의하면, 극한 개념을 형식적으로 지도하기 전에 곡선의 기울기를 '볼 수' 있는 그리고 활동을 통해 극한 개념에 대한 경험을 해 볼 수 있는 확대 과정의 일부로 미적분학에서 함축적으로 사용되어야 함을 강조하였다.

따라서 본 논문은 공학 활동에 대한 위의 첫 번째 이유에 기초하여 미적분학의 입실론-델타($\epsilon - \delta$)에 의한 엄밀한 함수의 극한값 구하기를 좀 더 직관적이며 시각화를 이용한 지도 방안을 탐색해 보고자 한다. 이를 위하여 Texas Instruments의 Voyage200 CAS 그래핑 계산기의 임베디드 시각화를 활용하여 미적분학 지도에서 공학 활용의 가능성을 제기하고자 한다.

II. 개념이미지와 개념정의, 인지적 갈등

Vinner(1991)는 어떤 개념과 연관된 기호를 포함한 모든 시각적 표상들을 그 개념에 대한 개인의 심상(mental image)이라고 정의하였다. 그리고 개인의 개념이미지(concept image)는 그 개인의 마음 속에 있는 그 개념과 연관된 모든 속성들로 구성된 심상이라고 정의하였다. Tall과 Vinner는 이 정의를 확장하여 어떤 개념과 연관된 심상, 속성, 과정으로 구성된 인지 구조(cognitive structure)를 개념이미지라고 하였다. 따라서 개념이미지는 어떤 개념에 대한 개인의 의식적 또는 무의식적 관념을 형성하는 모든 정신 구조(mental structure)로 이루어져 있다. 이러한 개념이미지는 완벽한 일관성을 유지할 필요는 없다. 상황이나 맥락에 따라 개념이미지의 다른 쪽이 활성화되기도 한다. 주어진 시간에 활성화되는 개념이미지의 일정 부분을 유발 개념이미지(evoked concept image)라고 한다. 동일한 개념에 대해 경우에 따라 다른 개념이미지가 활성화되어 개인의 말과 행동에 있어 모순이나 갈등이 생기기도 한다. 그렇지만 그 개인은 이런 갈등을 전혀 깨닫지 못하거나 이 갈등에 의해 전혀 불편을 느끼지 못할 수도 있다. 이러한 잠재적 갈등들이 동시에 활성화될 때 이 갈등들은 인지적 갈등(cognitive conflicts)이 된다(Tall, 1980).

지금까지 살펴본 개념이미지의 복잡한 구조와는 달리 개념을 설명하는데 사용되는 단어들의 형식을 개념정의(concept definition)라고 한다. 개념정의는 형식적(formal)이며 수학 이론의 일부로서 개인에게 전달된다. 또는 개념정의는 개인이 자신의 개념이미지를 (부분적으로) 설명하려고 개발한 것으로 개인적(personal)일 수 있다. 어떤 개인의 개념정의는 개념이미지의 일부로 간주되지만 형식적 개념정의는 그럴 수도 있고 아닐 수도 있다.

형식적 개념정의는 보통 수학의 형식적 이론의 일부로 간주한다. 그렇기 때문에 개념정의는 그 수학 이론 안에서 연역될 수 있다는 시사점을 준다. Tall과 Vinner(1981)의 견해에 따르면 개념이미지나 개념정의의 어떤 부분이 다른 부분과 모순을 낳는 경우를 잠재적 갈등인자(potential conflict factor)라 한다. 일관성 있는 이론에서는 절대 잠재적 갈등인자가 없어야 하지만, 서로 다른 이론들 사이에는 이 인자들이 모순을 유발시키기도 한다. 예를 들어, 자연수(양의 정수)의 산술 이론에서 뺄셈의 결과는 원래 두 수보다 작다. 하지만 정수의 산술 이론의 경우에는 이 사실은 참이 아니며, 자연수와 정수의 서로 다른 산술 이론에 의한 뺄셈의 결과인 두 인자들 사이에는 잠재적 갈등이 존재하게 된다. 또 다른 잠재적 갈등의 예는 복소수 $x+yi$를 실수의 순서쌍 (x, y)로 정의하는 경우이다. 만약 실수 x와 복소수 $x+0i$를 같은 수로 취급한다면 잠재적 갈등인자를 만들게 된다. 왜냐하면 복소수에서는 x와 $(x, 0)$이 같은 수이지만 집합론에서는 원소 x와 순서쌍 $(x, 0)$는 서로 다른 의미를 가지기 때문이다(Tall, 1980).

실질적인 인지적 갈등을 야기하려면 개인의 마음속에 두 가지 상호 갈등인자가 동시에 활성화되도록 하면 된다. 이렇게 함으로써 개념이미지와 개념정의 사이의 잠재적 갈등 가능성이 표면으로 분명히 드러나게 된다. 수학을 지도할 때 형식적 정의를 먼저 제시한 다음 그와 관련된 예와 연습문제를 다루는 것은 개별 학생들에게 서로 다른 모양의 개념이미지를 생기게 한다. 예를 들어, 대응을 사용하여 함수의 정의를 지도한 후, 함수를 공식으로 사용하는 예들을 제시하는 것은 함수에 대한 제한적 의미가 첨가된 개념이미지를 낳게 한다.

Ⅲ. 미적분 개념에 대한 공학과 시각화의 활용

공학이 도래하기 전 전통 미적분학은 미분과 적분, 미분방정식 풀이 등을 그와 관련된 고정된 그래프 그림의 도움을 받으면서 대수적 기호 조작을 중심으로 지도되었다. 그런데 공학은 사용자의 조정에 따라 역동적 그림을 제공함으로써 전통적인 입실론-델타($\epsilon-\delta$) 해석학에 근거한 개념들뿐만 아니라 비표준 해석학에 근거한 개념에 대해서도 새로운 통찰을 준다. 예를 들어, 그래프를 고배율로 확대해보면 그 그래프는 "국소적 직선(locally straight)"의 그림이 된다. 물론 이때 의미하는 직선은 수학적으로 절대적 의미의 직선이 아니라 공학적 용어로 설명하면 픽셀 크기에 의해 직선으로 보이는 것이다. 비표준 해석학을 사용한 엄밀한 공학적 의미에서 볼 때 고차적 무한소를 무시한 무한 확대 과정의 결과에 의한 그래프의 "표준" 부분은 실제로 직선이다(Tall, 2002). 컴퓨터의 그래프 표상

을 사용해서 그래프 상의 두 점을 연결하는 할선을 움직여 보여주면, 학생들은 곡선을 나타낸 함수를 점별로 구성된 것이 아니라 전체적으로 기울기의 변화로 구성된 개념임을 시각화할 수 있다.

이런 식으로 미적분 개념을 지도하는 것은 학생들에게 어떤 영향을 주는가? 형식적 체계로서 수학을 지도하려는 교사는 공학에 의한 시각화를 눈속임으로 생각하여 신뢰하지 못하고 결과적으로 시각적 방법을 수학적 엄밀성과 정확성이 결여된 것으로 치부한다. 그렇지만 미적분의 형식적 접근은 여러 한정기호를 포함한 입실론-델타 정의의 고차적이고 복잡한 조작을 거쳐야 가능하다. 대학 미적분학 수업에서 극한의 이러한 형식적 정의를 사용한 지도는 엄청나게 어렵다는 사실이 보고되었다(Williams, 1991).

한편, 극한 개념에 대한 역동적인 시각적 지도 방법도 나름대로 개념적 어려움을 가지고 있다. 학생들은 극한을 한없이 가까워지는 과정(process)으로 생각하면서 동시에 "아주 작아져서" 영(zero)이 되는 변수라는 개념이미지를 가지고 있다(Cornu, 1991). 만약 어떤 수열(예: $\{1/n\}$)을 영에 가까워지는 항들로 된 수열로 생각하면, 이 수열을 생각할 때 모든 항들이 '어떤 것에 계속 가까이 가는 대상'인 "발생적 극한(generic limit)"을 떠올리기 쉽게 된다. 예를 들어, $\{1/n\}$의 극한을 $\{1/\infty\}$로 표현하는 학생은 $\{1/n\}$의 발생적 극한은 무한히 작지만 영은 아닌 어떤 양으로 인식하고 있는 것이다. 같은 방식으로 0.9, 0.99, 0.999, ⋯ 란 수열의 모든 항은 엄밀히 말해 1보다 작으므로 0.999⋯의 극한은 1보다 작은 어떤 양이라고 생각하는 학생들이 많다(Monaghan, 1986).

다시 말해, "무한히 작지만 영은 아닌" 양을 나타내는 변수라는 개념이미지로 또는 주어진 극한값에 "한없이 가까이 접근하지만 그 극한값과 같지 않은" 함수의 개념이미지로 극한 과정(limiting process)을 생각하게 된다. 무한이나 극한 과정에 대한 인간사고 과정의 부정확성은 수학의 역사에서 심각한 어려움을 야기시켰고 그로 인하여 만족스러운 형식적 증명을 하기 위하여 극한에 대한 미묘한 정의의 차이를 보였다는 사실은 코시(Augustin-Louis Cauchy)와 바이어슈트라스(Karl Weierstrass)의 극한 정의에서 잘 알 수 있다(윌리엄 던햄, 2004).

아무리 신중하게 형식적 정의를 취하더라도, 위에서 지적한 것과 같은 인간 신념체계의 본성에 의해 수학 지도는 파행이 될 수 있다. Wood(1992)에 의하면, 해석학을 수강하는 수학 전공 대학생들의 경우도 이와 비슷하게 "가장 작은 실수는 존재하지 않는다" 그러나 "처음 양수는 존재한다"라는 모순된 두 가지 신념을 동시에 가지고 있다고 한다. 좀 더 밀착된 분석을 통해 이 학생들이 실수에 대해 한 가지 모델이 아니라 적어도 두 가지 모델을 가지고 있음을 알 수 있었다. 한 가지 모델은 소수를 사용하는 것으로 유한개의 자릿수로, 그러므로 자연적으로 이산적으로 표현되는 여러 수에 대한 학생들의 지배적인 경험을 반영한다. 예를 들어, 어떤 수들이 단지 소수 넷째자리로만 표현된다면, 0.0000 다음에는 0.0001이 오고 그 다음에는 0.0002가 오고, ... 이런 식으로 숫자가 진행될 것이다. 마찬가지로 유한개의 유동 소수점으로 수를 표현하는 컴퓨터는 정해진 유동 소수점의 개수에 따라 최소의 양수를 가진다. "무한 소수" 0.000⋯0 다음에는 0.000⋯1인 (무한개의 영이 있고 그 다음에 1이 오는, 다시 말해 $1-0.999\cdots$ 으로 표현될 수 있는) "최초"의 양수가 온다라고

생각하는 것이 인간 사고의 자연스러운 확장 방법이다. 실직선에 대한 대안적 연속성 모델은 “a가 양수이면, 이보다 더 작은 $a/2$도 양수”이므로 “최초의 양수”는 실직선 상에 존재할 수 없다는 것이다.

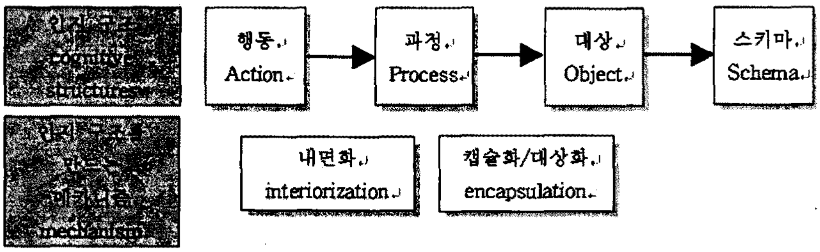
Lakoff와 Nunez(2000)는 아주 다른 두 가지 은유를 사용하여 실수에 대한 이러한 현상을 잘 설명하고 있다. 첫 번째는 “실직선”을 손가락으로 짚어가면서 실수를 추적할 수 있는 시각적이며 기하적 은유로 설명하고, 두 번째는 수 세기와 측정 활동으로 구성된 수치적 은유로 설명하고 있다. 또 다른 은유로는 형식적인 완전 순서체로 실수를 설명하는 것이다. 수학적으로 동일한 개념으로 간주되는 이들 은유는 인지적으로 볼 때는 상당히 다르다. 예를 들어, 점은 수치적으로 볼 때 크기가 없지만, 크기가 없는 영이 아닌 숫자로 된 구간은 기하적으로 볼 때 길이를 갖는다.

형식주의와 시각적 구조 사이의 갈등에 직면하게 되면, 진정한 부루바키 스타일의 형식성을 고집하는 수학자들은 시각화가 미묘한 작은 부분에 대해 속임수를 부린다고 생각한다. 그래서 수학 활동에서 시각화를 신뢰하지 않고 수학의 형식적 이론에만 전적으로 의존한다. 그렇지만 이들 수학자와는 달리 수학을 공부하거나 전공하는 많은 학생과 다른 분야에 종사하는 사람들은 위에서 살펴본 은유를 포함하여 수에 대한 다양한 견해를 가지고 있다. 이 딜레마를 해결하는 데는 두 가지 방법이 있다고 생각한다. 첫 번째 방법은 완전히 형식적 견해를 취해서 수학적 기호와 한정 기호로 된 진술문을 배제하는 것이다. 그런데 이 방법은 대부분의 학생들에게 너무 어렵다는 사실이 입증되었다. 다른 방법은 학생들에게 시각적 직관을 갖도록 교육시키는 것이다. 예를 들어, Tall(2001)은 시각적 아이디어를 수학의 형식적 정의로 바로 바꿀 수 있게 하여 형식적 개념에 대한 심상을 풍부하게 하여 마침내는 형식적 증명에까지 영향을 주는 방법을 제안하였다. 이 두 가지 방법은 공학 활동과 함께 실시되어 왔는데 미적분에 대한 상당히 다른 지도 방법으로 전개되었다.

Ⅳ. APOS 이론

APOS 이론은 수학 개념의 본질과 그 수학 개념이 개인의 정신에서 어떻게 발달하는지 사이에는 밀접한 관계가 있다는 원리를 바탕으로 하고 있다. 따라서 APOS 이론에 근거한 설명은 인식론적이면서 동시에 심리학적이다. APOS 이론에 따르면, 개인이 어떤 수학적 상황을 다루려고 할 때는 그 상황에 적용되는 인지적 구조를 만들기 위하여 어떤 정신 메카니즘을 사용한다고 한다. 이 메카니즘 중 주요한 메카니즘이 내면화(interiorization)와 캡슐화(encapsulation, 또는 대상화)이며, 이 두 가지 메카니즘과 관련된 구조를 행동(actions), 과정(processes), 대상(objects), 그리고 스키마(schemas)라고 한다. APOS 이론은 수학적 개념의 형성은 주어진 대상을 변환시켜 다른 대상을 획득하는 것에서부터 시작된다고 가정한다. 이 변환을 최초의 행동(action)이라고 하는데, 그 이유는 이 변환을 수행하려면 구체적인 절차(또는 지침)가 필요하며 동시에 이 변환의 이런 각각의 절차를 틀림없이 수행할 능력이 필요하기 때문이다. 예를 들면, 어떤 개인이 함수 개념을 생각할 때 구체적인 식을 나타낼

수 있고, 그 식의 변수를 다른 문자로 대입하여 조작할 수 있다면, 그 사람은 함수 개념을 이해하기 위한 행동을 소유하고 있다고 볼 수 있다. 즉 함수 개념을 행동적으로 이해(action understanding)를 한 것으로 볼 수 있다(Tall, Smith, & Piez, 2008).



<그림 IV-1> APOS 이론의 구조와 메카니즘

개인이 이 행동을 계속 반복하고 (이 행동의 결과를) 반성함에 따라 이 행동은 하나의 정신 (또는 인지적) 과정(process)으로 내면화(interiorized) 된다. 과정은 내면화되는 행동을 동일하게 반복 조작으로 수행하도록 해 주는 인지 구조로서 완전히 개인의 인지에 존재한다. 따라서 과정을 구성하는 각 단계(즉 행동)를 구체적인 행동으로 실행하지 않아도 머릿속 상상만으로 그 변환을 수행할 수 있게 하는 것이 과정이다. 그래서 예를 들면, 함수 개념을 과정적으로 이해(process understanding)한 사람은 어떤 주어진 함수에 대한 정신 과정을 구성하고, 함수를 입력과 이 입력의 변환에 의한 출력을 구하는 것으로 생각하게 된다.

만약 어떤 과정을 하나의 전체로 인식하고 변환이 그 전체에 행동을 가할 수 있음을 깨닫고 (구체적으로 직접 손으로 또는 머릿속 상상으로) 실제 그러한 변환을 구성(실행)할 수 있다면, 그 개인은 그 과정을 인지적 대상(cognitive object)으로 캡슐화(encapsulated, 또는 대상화) 했다고 말한다. 함수 개념의 경우를 예로 보면, 그 과정을 캡슐화한 개인은 함수로 된 하나의 집합을 만들고, 그 집합에 산술 연산자를 정의하고, 그 집합에 위상을 주고 하는 것과 같이 함수에 대한 변환을 실행할 수 있다.

이러한 행동, 구조, 대상 구조는 개인이 단일 변환을 어떻게 구성하게 되는 지를 설명하는 반면, 한 가지 수학 주제라 하더라도 여러 행동, 과정, 대상이 서로 연관되기 때문에 어떤 일관성 있는 틀 안에서 이들 구조들이 서로 연결되고 조직되어야 하는데 이 틀을 스키마(schema)라고 한다. 여기서 일관성 있다는 의미는 주어진 수학적 문제 상황을 다루기 위해 어떤 인지 구조를 사용하는 것이 좋은지에 대한 결정 방법을 개인에게 일관되게 제공해 주는 것을 말한다. 함수의 경우, 주어진 어떤 수학적 또는 "실세계" 상황에 대해 어떤 함수를 사용할지를 알아보는 것은 APOS 이론에 따르면 스키마 구조에 의해서이다.

함수와 같이 수학 교과서에 있는 표준적 수학 개념을 다루는데 있어 내면화와 캡슐화라는 정신 메카니즘과 행동, 과정, 대상, 스키마라는 정신 구조는 사람들이 일상의 수학적 활동을 설명하는데

사용될 수 있다는 점이 중요하다. 이러한 의미에서 볼 때, 직접적으로 분명하게 함수의 극한과 관련되지 않는 수학적 활동에 대해서도 이러한 구조들이 활용된다고 가정할 수 있다(Dubinsky, Weller, Mcdonale, & Brown, 2005).

APOS 이론에 의한 설명은 개인의 가능한 사고에 대한 설명에 한정된다. 즉 APOS 이론이 개인의 인지에서 실제로 무슨 일이 일어나고 있는지를 설명한다는 것은 아니라는 점이다. 또한 개인이 어떤 정신 구조를 가지고 있다는 것이 주어진 상황에 그 구조를 필요 적절하게 사용할 수 있다는 의미도 아니다. 그 구조의 적용은 운용 전략, 동기, 정서 상태 등의 다른 요인에 좌우되기 때문이다. 다시 말해, APOS 이론은 다양한 연구에 의해 유용함이 증명되었음에도 불구하고 개인의 수학적 사고에 대한 부분적 설명만 제공하고 있다는 점의 인식이 중요하다고 본다.

APOS 이론을 사용해서 Cottrill과 동료 연구자들은 입력값 x가 a에 가까워질 때 함수 f의 극한(값)에 대해 다음과 같이 "예비 발생적 분석"을 가정적으로 실시했다(Cottrill et al., 1996, p. 174).

단계1. 몇 개의 점을 대입하여 함수 f에 대한 함숫값 구하는 행동(action)하기. 이전의 점들보다 이 점들은 점차 a에 가까워지는 것을 알 수 있다.
단계2. x가 a에 가까워질 때 $f(x)$는 L에 가까워지는 단일 과정(process)으로 단계1의 행동을 내면화(interiorization)하기. (이 단계는 두 과정 "$x \rightarrow a$"와 "$f(x) \rightarrow L$"의 조정으로 나누어진다)
단계3. 극한의 여러 가지 성질을 조합해야 하는 경우 극한 과정이 행동들을(예: 어떤 성질이 만족하는지 알아보기) 적용하는 대상(object)이 되도록 단계2의 과정을 캡슐화(encapsulate)하기.
단계4. 구간과 부등식을 사용하여 단계2의 과정을 재구성하기(reconstruct). 이 재구성은 기호로는 $0 < |x-a| < \delta$와 $|f(x)-L| < \epsilon$으로 표현되는 근방의 개념을 수치 근삿값으로 도입한다.
단계5. 극한의 형식적 정의와 이전 단계의 재구성된 과정을 연결하기 위하여 수치화 스키마(schema)를 적용하기. 극한의 정의를 적용하는 것은 모든 양수 ϵ에 대하여 x의 적절한 구간을 생각하고 부등식을 조사해서 각 ϵ에 해당하는 양수 δ를 구하는 것이 반복되는 과정이다.
단계6. 완전한 $\epsilon-\delta$ 개념을 주어진 상황에 적용하기

이 상세한 분석은 x가 a에 가까워질 때 수치값을 계산하는 과정을 주시하기 전에 a나 a 근방의 단일점에 대한 함숫값 $f(x)$를 계산하는 추가적 초기 단계의 필요성을 연구자들에게 시사하고 있다. 좀 더 중요한 것은, xy 좌표계에서 "$x \rightarrow a$"와 "$f(x) \rightarrow L$"이라는 극한 과정은 인지적으로 두 개의 개별 과정으로, 즉 x가 a에 가까워진다는 과정과 y가 L에 가까워진다는 과정으로 분해되어짐을 연구자들이 밝혀냈다. 구체적인 행동들을 통한 과정으로의 정형화, 그런 다음 대상으로의 캡슐화에 의한 개념의 형성은 그 나름대로 이론적으로 확고하지만 실제 적용에서는 만만하지 않은 일이다. 다시 말해, 이 방식은 극한에 대한 과정적 개념(process conception) 형성을 가능하게 하지만 경험적 증거에 따르면 이 방법이 극한의 입실론-델타 정의에 대한 이해를 확장시킨다는 것은 아직 밝혀진 바가 없다.

많은 학생들이 한편으로는 무한소 개념의 이해, 다른 한편으로는 한정사에 대한 이해의 어려움을

겪고 있지만 극소수의 학생들 중에는 수학의 형식적 정의를 잘 학습하는 경우도 있다. Pinto(1998)는 수학 전공 대학생들이 적어도 두 가지 서로 다른 방식으로 이 형식적 정의를 성공적으로 학습한다는 사실을 발견했다. 한 가지 방식은 명백한 형식적 방법(formal way)으로, 정의를 학습하고 그 정의와 이전에 증명된 정리들을 사용해서 그 정의와 관련된 성질과 새로운 정리들을 연역하는 방식이다. 그렇지만 기하학자와 위상학자들을 포함한 좀 더 시각적으로 뛰어난 인식을 가진 수학자들에게서 종종 나타나는 대안적 방식도 있다. 이 방식을 자연적 방법(natural way)이라고 하는데, 개인적 시각적 이미지화(형상화)를 동원하여 그 정의에 의미를 부여한다. 몇몇 자연적 방법의 학생들은 시각적 이미지화로부터 형식적 이론을 개발하는 경우도 있었고, 어떤 경우에는 개인의 시각적 이미지화 자체가 충분한 증명이기 때문에 형식적 증명은 불필요하다고 믿기도 한다. 예를 들어, 수열 $\{a_n\}$이 a에 접근하고 수열 $\{b_n\}$이 b에 접근할 때, 수열 $\{a_n+b_n\}$이 $a+b$에 접근한다는 것은 더 이상의 형식적 증명없이도 자명하다는 것이다.

자연적 방법을 사용하는 한 학생은 암기를 통해 정의를 학습하지 않는다고 했다. 그 학생은 xy 평면의 x값 $1, 2, 3, \ldots$ 위에 수열의 각 항 $a_1, a_2, a_3, \ldots$와 수열의 극한 L을 x축에 적고 x축 아래에는 정해진 구간 $L-\epsilon$, $L+\epsilon$을 ϵ만큼 직선으로 표시함으로써 수열의 극한을 그림으로 이미지화하여 의미 있게 해석했다. 이 ϵ에 대하여 이 수평선 $L\pm\epsilon$ 내에 존재하면서 $n>N$을 만족하는 수열 $\{a_n\}$의 모든 점에 대한 N을 구했다. 이 학생의 경우 수열의 극한 정의를 그림으로 이미지화를 함으로써 "보았을" 뿐만 아니라 이 이미지로부터 그 개념과 관련된 후속 학습의 발달을 가져왔다.

이 학생은 계속 자신의 이미지화를 동원함에 따라 형식적 수학 정의의 이해를 위한 자연적 방법은 종종 그를 발견의 흥분 상태를 경험하게 했다. 이런 식으로 발달된 이 학생 나름대로의 이해는 그의 수학적 다른 아이디어와의 관계를 계속해서 새롭게 업데이트 했으며 직관과 연역에 대한 풍부한 스키마를 형성하게 하여 새로운 정리의 예측과 증명을 가능하게 했다. 이 학생은 처음에는 그 정의를 지지하는 시각적 이미지를 성공적으로 개발했고 이 이미지를 형식적 증명의 근거로 사용하였다. 따라서 이 학생은 자연적 이미지를 사고 실험으로 사용하여 형식적 이론의 근간이 되도록 했다는 점에서 자연적 형식주의자(natural formalist)라고 할 수 있다. 다른 학생은 반복 암기와 사용을 통해 수학적 정의를 기억했다. 기억에 의해 그 정의를 쓸 수 있게 됨으로써 그 정의를 사용하여 성질을 유도하는 형식적 방식으로 시작할 수 있었다. 해석학에 대한 그의 지식은 수학 이론을 구성하는데 있어서 신뢰할 수 없고 적합한 방식으로 볼 수 없는 비형식적 지식과 상당히 분리되어 있었다.

지금까지의 논의에서 볼 때, 학생들은 형식적 수학을 서로 다른 방식으로 성공적으로 학습한다는 사실을 알 수 있다. 유일한 방식이란 존재하지 않음을 수학 학습의 성공한 학생들한테서 볼 수 있다. 기호 조작과 복잡한 계산의 수행과 더불어 공학은 자연적 방식을 선호하는 학생들에게 형식적 수학 개념이나 이론에 대한 자연적 사고를 촉진하는 시각적 방식을 제공할 수 있다. 형식적 사고를 선호하는 학생들의 경우, 공학이 이 학생들의 공리적 이론 개발에 대한 형식적 지원을 제공하지는 못하지만 수학적 아이디어의 전반적 구조를 조명할 수 있는 보완적 방식을 제공해 줄 수 있다고 본다.

V. 국소적 수평화와 CAS의 임베디드 시각화

1. 국소적 수평화

미적분학을 지도하기 위한 "자연적 방법"이란 국소적 수평화(local straightness)를 통한 역동적인 시각적 이미지를 구성하는 것을 의미한다. 이 방법은 기존의 기호 조작이나 수치 근삿값을 이용하는 방법과는 반대이다. APOS 이론이 (극한, 도함수, 또는 적분의) 과정을 하나의 정신 대상으로 캡슐화하는데 초점을 두는 방법이라면, 국소적 수평화는 그래프를 "수평선처럼 평평하게 보이게 확대하는" 시각적 이미지를 그 출발점으로 한다. 이 국소적 수평화 방법은 인간의 사고는 인간의 자연적 지각과 행동에 구현되어진다(embodied)는 Lakoff와 Nunez(2000)의 이론과 일치한다. 미적분학의 구현된 기초에는 시각적 이미지뿐만 아니라 마우스를 사용하여 컴퓨터나 계산기 화면의 대상을 조작하는 것과 같은 육체적 감각도 포함한다. 이 구현된 시각적 지도 방법은 인간의 기본적 감각에 근거를 두고 있다. 미적분학의 이 지도 방법은 그 자체가 목적이기도 하지만 또한 전통적인 입실론-델타 미적분이나 무한소를 사용하는 비표준 미적분에 대한 형식적, 이론적 방법의 전개에 자연적 방법을 제공하기도 한다(Dubinsky, Weller, Mcdonale, & Brown, 2005).

국소적 수평화 방법은 여러 수학과 교육과정에 구현되어져 왔다(Tall, 2001). 예를 들어, 영국의 '학교수학 16-19 프로젝트'는 대수적 조작을 제한하면서 그래프의 곡선의 기울기 변화의 관점에서 컴퓨터를 사용하여 그래프를 스케치하도록 설계되었다. 이 프로젝트에 참가한 학생들의 경우 x^2의 도함수는 $2x$, x^3의 도함수는 $3x^2$을 구하고 이로부터 다항함수의 도함수를 추측하는 것은 쉬운 활동에 해당했다. 이 프로젝트의 내용은 $\sin x$의 도함수와 $\cos x$의 도함수를 "보는 것으로", 심지어 지수함수 k^x의 도함수가 다시 k^x임을 k의 수치값으로 찾는 것까지 확장되었다. 이러한 지도 방법은 수학에 구현된 의미를 소개하는 것이었다. 예를 들면, $\cos x$의 도함수는 $\sin x$의 덧셈에 대한 역원이라는 사실은 대수적 조작의 결과에 의해서가 아니라 $\cos x$의 기울기의 모양이 $\sin x$의 그래프를 "뒤집어 놓은" 것처럼 보이기 때문이다. 주어진 함수의 도함수를 그래프로 그리라는 평가의 결과를 보면, 지필에 의한 전통적인 기호 조작 방법을 사용한 학생들보다 국소적 수평화 방법으로 배운 학생들이 훨씬 더 주어진 함수를 기울기의 변화로 시각화하고 스케치함으로써 그 함수에 대한 통찰을 보였다.

수많은 미적분학 개혁 교육과정에서 "국소적 수평화"의 용어는 "국소적 직선화(local linearity)"와 동의어로 사용되고 있다(예: Smith & Moore, 1996). 그렇지만 이 두 아이디어가 수학적으로는 동치이지만 인지적인 면에서 보면 상당히 다르다. 국소적 수평화는 주어진 그래프가 얼마나 가파른지를 "관찰"하려고 고배율로 확대하는 이미지화를 말하는 것으로 구현된 시각적 개념이다. 이 관점에서 볼 때 기호화는 필요한 도구가 아니다. 즉 이러한 시각적 이미지화는 도입하려는 수학적 개념의 기초 단계에 맞게(또는 그 후에) 적절한 시점에 제시될 수 있다. 반면에 국소적 직선화는 특정한 점 근처

에서 주어진 그래프에 "최적의 선형 근사"를 하는 직선 함수를 찾기 위해 출발점에서부터 기호 사용이 요구되는 것을 말한다. 국소적 수평화는 미분불가능(어떤 점에서 그래프가 "모서리"가 있거나 어떤 범위에서 "쭈글쭈글한" 경우)에 대한 시각적 보완 아이디어를 제시하는 반면, 국소적 직선화는 어떤 점에서 국소적으로 선형 근사하는 함수의 예에만 초점을 두는 것이다. 그렇기 때문에 국소적 수평화 방법은 초기 단계에서부터 그 개념에 대한 훨씬 더 정교한 통찰을 줄 수 있다. 쭈글쭈글한 함수의 확대를 통해 미분가능성(국소적 수평화)뿐만 아니라 미분불가능성(국소적 수평화의 어려움)을 시각화할 수 있음을 밝힘으로써 정의역 전체에서 미분가능한 곳이 한 곳도 없는 함수에 대한 시각적 감을 제공해 줄 수 있다. 국소적 수평화 방법은 또한 형식적 정의에 대한 영감을 주는 역동적으로 공학과 연계된 지각을 자연적 방식으로 기르는데 사용될 수 있다. 예를 들면, 컴퓨터 화면에서 y축의 수직값은 고정한 채 그래프를 x축에 수평으로 "잡아늘이는"(즉 x축의 일정한 구간을 확장하는 것을 말함) 일을 해 볼 수 있다(Dubinsky, Weller, Mcdonale, & Brown, 2005).

일반적으로 볼 때, $f(x_0)$의 값은 그래프의 최대 높이와 최소 높이를 나타내는 $f(x_0)\pm\epsilon$을 정의하는 값인 $f(x_0)+\epsilon$과 $f(x_0)-\epsilon$ 사이에 있게 되고, 그런 다음 그래프를 잡아당겨 평평하게 되는 구간인 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$를 찾는다. 그러면 이 정의역 안에서 그래프는 치역인 $f(x_0)\pm\epsilon$에 놓이게 된다. 이러한 활동은 연속에 대한 형식적 정의를 보여주는 것이다. 즉 임의의 $\epsilon>0$에 대하여 $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\epsilon$을 만족하는 $\delta>0$가 존재한다. 따라서 연속에 대한 정의는 세 개의 한정사를 고도로 조합하는 활동에 의해서가 아니라 그래프가 언제 평평해지는지를 보려고 이 그래프를 수평으로 잡아당기는 자연적 과정에서 발생한다. 이러한 방법은 자연적 사고를 선호하는 학생들에게 정신 이미지를 제공해주어 정리를 증명하기 위하여 한정사가 있는 명제의 형식적 조작을 하는데 이 이미지를 활용할 수 있게 해준다. 또한 수학이라는 학문적 형식으로는 수학 이론을 잘 이해할 수 없는 학생들에게는 미적분학에 대한 깊은 통찰을 줄 수 있는 장점이 있다. Tall(1993)은 컴퓨터 기반 시각적 방법을 사용하여 미적분학 개념의 이해를 어려워하는 중등수학 예비 교사들을 지도하였다. 이 방법으로 수업한 후 학생들은 "자연적" 방식으로 미적분학의 개념과 원리에 대해 광범위하게 토론할 수 있게 되었다. 이 토론에는 미분불가능한 함수(왜냐하면 이 함수는 프랙탈 함수라서 아무리 확대하더라도 어느 곳에서도 평평하기 않기 때문에)의 아이디어와 "잡아당겨서 평평해지므로" 그래프는 연속이라는 아이디어가 포함되어 있었다. 이 토론으로부터 연속의 형식적 정의가 개발되었고 이 정의는 "연속함수 아래의 넓이는 미분가능한 함수이다"와 "넓이 함수의 도함수는 원래 함수이다"라는 시각적 아이디어와 연계되어졌다. 시각적 방법은 연속함수 아래의 넓이를 나타내는 함수는 원래 함수를 도함수로 가진다는 사실을 "보는데" 사용되어진다. 집단별 활동을 통해 학생들은 연속이면서 미분불가능한 함수 아래의 넓이는 일계도함수라는 사실을 자연스럽게 이끌어냈다. 이것은 전통적인 미적분학을 배우는 대부분의 학생들은 도저히 알 수 없는 고도로 미묘한 형식적 아이디어에 대한 통찰을 이 시각적 방법이 제공한다는 사실을 증명한 것이다. 그러므로 구현된 지각적 방법의 사용은 수학의 미묘한 형식적 개념에 대한 깊은 인간적 의미를 부여함과 더불어 이러한 아이디

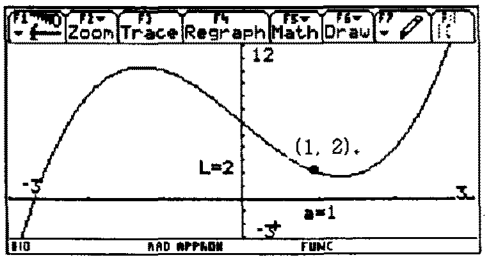
어를 형식적 접근으로 자연스럽게 확장할 수 있음을 보여주고 있다.

2. CAS 그래핑 계산기의 임베디드 시각화와 $\epsilon-\delta$법을 사용한 함수의 극한 지도 실제

함수의 극한을 구하는 다음 과제를 CAS 그래핑 계산기의 시각화와 $\epsilon-\delta$법을 사용하여 구해보자. $\epsilon-\delta$법을 사용하여 함수의 극한을 구하는 이런 과제는 대학의 미적분학을 학습하는 학생들에게 상당히 까다롭고 어렵다는 점은 앞에서 논의한 많은 선행연구에서 밝혀져 있다. 그런데 이 문제를 CAS 그래핑 계산기의 시각화를 이용하면 상당히 직관적으로 쉽게 $\epsilon-\delta$법을 이해할 수 있음을 보이고자 한다.

[문제] $f(x)=x^3-5x+6$이라 하자. $|x-1|<\delta$일 때 $|(x^3-5x+6)-2|<0.2$를 만족하는 δ를 구하시오.

[풀이과정] 이 문제를 극한의 정의를 이용하여 표현하면, $a=1$, $L=2$인 경우이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)=2$이다. 그리고 $\epsilon=0.2$에 대응하는 δ를 구하는 문제이다. 따라서 $(1,2)$의 근방에서 무슨 일이 일어나는지를 살펴봐야 한다.

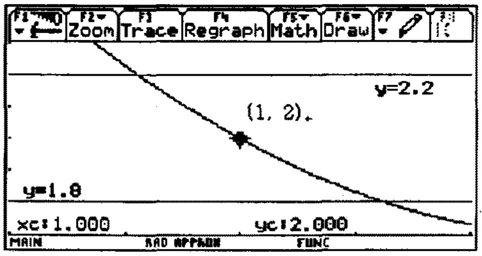


<그림 V-1> 점 $(1,2)$의 근방

$$|(x^3-5x+6)-2|<0.2 \Leftrightarrow 2-0.2<x^3-5x+6<2+0.2 \Leftrightarrow 1.8<x^3-5x+6<2.2$$

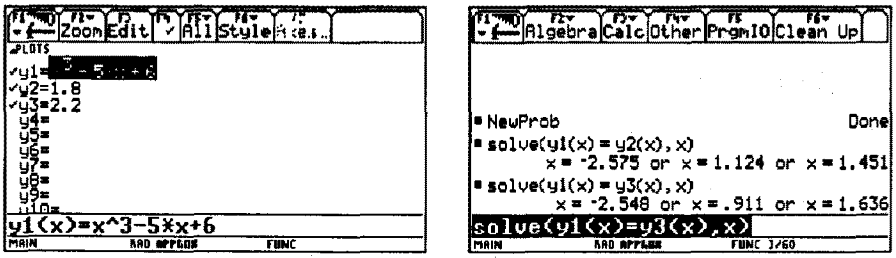
으로 고쳐 쓸 수 있다.

따라서 곡선 $y=x^3-5x+6$은 두 직선 $y=1.8$과 $y=2.2$ 사이에 있게 된다. 아래 그림은 그래핑 계산기의 화면 설정(Window setting)을 $[0.8,\ 1.2]\times[1.7,\ 2.3]$로 한 것이다.



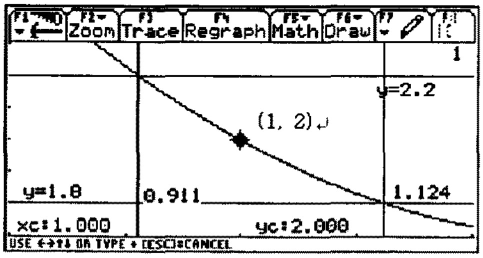
<그림 V-2> 두 직선 $y=1.8$과 $y=2.2$ 사이의 점 $(1,2)$

$y=x^3-5x+6$과 두 직선 $y=1.8$과 $y=2.2$가 만나는 교점을 구하기 위하여 CAS 그래핑 계산기에 이들 세 식을 다음과 입력한다. 그런 다음 Solve() 기능을 이용하여 이들의 교점을 다음과 같이 구한다.



<그림 V-3> $y=x^3-5x+6$과 두 직선 $y=1.8$과 $y=2.2$가 만나는 교점 구하는 과정

이들이 만나는 교점은 $x=1$ 근방의 가장 작은 값이어야 하므로 약 $x=0.911$과 $x=1.124$이다. 이를 수식으로 표현하면 $0.911<x<1.124$일 때 $1.8<x^3-5x+6<2.2$이다.



<그림 V-4> 점 $(1,2)$를 포함하는 구간의 부등식 $0.911<x<1.124$ 표시

그런데 위의 그림에서도 알 수 있듯이 교점에 의한 구간 (0.911, 1.124)는 $x=a=1$에 대해 대칭이 아니다. 그래서 대칭의 위치를 정하기 위하여 이들의 거리를 계산하면,

(1) $x=a=1$에서 왼쪽 끝점까지의 거리: $1-0.911=0.08$

(2) $x=a=1$에서 오른쪽 끝점까지의 거리: $1.124-1=0.124$

$x=a=1$에서 거리가 가장 가까운 값을 δ로 잡으면 되므로, 이 두 거리에서 작은 값인 $\delta=0.08$로 정하면 된다. 따라서 이러한 사실을 문장으로 적어보면 다음과 같다.

$$|x-1|<0.8 \text{일 때 } |(x^3-5x+6)-2|<0.2$$

이 식은 $x=a=1$에서 좌우로 0.08 이내에만 있는 x를 택하면 항상 $f(x)$는 2에서 0.2이내에 있게 된다는 뜻이다. 그리고 $\delta=0.08$을 택했지만 이 값보다 작기만 하면 되므로 $\delta=0.08$ 보다 작은 값을 택하더라도 위의 식은 그대로 성립한다. 또한 지금까지의 방법을 사용하면 임의의 ϵ 값에 대해서도 마찬가지이다. 이로써 CAS 그래핑 계산기의 임베디드 시각화와 $\epsilon-\delta$법을 사용하여 $\lim_{x\to1}f(x)=2$를 구하는 방법을 탐색해 보았다.

Ⅵ. 결 론

본 연구는 미적분학의 $\epsilon-\delta$에 의한 엄밀한 함수의 극한값 구하기를 좀 더 직관적이며 시각화를 이용한 지도 방안을 탐색하기 위하여 Texas Instruments의 Voyage200 CAS 그래핑 계산기의 임베디드 시각화를 활용하여 미적분학 지도에서 공학 활용의 가능성을 제기하고자 하는 목적으로 수행되었다.

함수의 극한 개념과 극한을 구하는 과정에 대한 학습자 개인의 심상과 정신 구조의 형성을 위하여 개념이미지, 개념정의, 그리고 인지적 갈등에 대해 살펴보았다. 함수의 극한을 포함하여 미적분학 내용을 지도하는데 있어서 공학과 시각화의 활용에 대해 살펴봄으로써 심상을 풍부하게 하여 형식적 정의와 증명에 연결될 수 있는 시각적 아이디어의 제공이 중요하다는 사실을 밝혔다. APOS 이론의 구조와 메카니즘의 고찰과 이를 바탕으로 하여 함수의 극한에 대한 발생적 분석을 세밀하게 살펴봄으로써 APOS 이론의 장점과 한계점을 제시하였다. 그리고 CAS 그래핑 계산기에 임베디드된 시각화 기능을 활용하여 함수의 극한을 지도하는데 가장 적합할 것으로 생각되는 국소적 수평화 방법에 대해 살펴봄으로써 함수의 극한 지도에 대한 구체적인 가능성을 조사하였다. 이러한 이론적 배경을 토대로 본 연구에서는 함수의 극한을 엄밀한 $\epsilon-\delta$법에 의해서가 아니라 CAS 그래핑 계산기의 시각화를 통해 지도할 수 있는 방안을 탐색하였고, 그 지도 방안을 구체적으로 실현하여 보았다.

본 연구의 결론은 함수의 극한처럼 극한이라는 인식론적으로 까다로운 개념을 포함하고 있는 경우의 지도는 먼저 학습자들이 어떤 개념이미지를 가지고 있으며 그 이미지는 개념정의와 어떤 차이점을 가지고 있는지를 알아보는 활동이 있어야 한다는 점이다. 이것은 APOS 이론에 따른 구조와 메카니즘으로 함수의 극한을 지도하고자 할 때도 마찬가지라고 본다. 또한 CAS 그래핑 계산기를 사용

한 시각화를 통해 함수의 극한을 지도할 때도 이러한 개념이미지는 인지적 갈등을 위한 유발 인자로서 역할을 할 것으로 생각된다.

또 다른 결론은 함수의 극한을 엄밀한 $\epsilon-\delta$법에 의해 지도하기 전에 학습자에게 시각적으로 풍부한 아이디어를 가질 수 있게 하여 이를 통해 엄밀하고 형식적인 $\epsilon-\delta$법의 사용과 증명으로 연결될 수 있도록 하는 직관적이고 시각적인 지도 방안의 탐색이 좀 더 다양한 수학 내용에 대해 이루어져야 한다는 것이다. 형식적인 방식으로 수학 학습을 성공적으로 하는 학생들의 경우는 다행이겠지만, 수학이라는 학문의 형식적이고 기호적인 방식으로 학습하는 것을 어려워하는 학생들한테는 다양한 직관적이고 시각적인 방법을 동원하여 성공적인 수학 학습이 되도록 해야 할 것이다. 공학의 시각적이고 직관적인 기능을 풍부하게 활용하여 이해한 것을 토대로 형식적이고 좀 더 엄밀한 수학적 개념, 과정, 증명으로 연결되도록 하는 지도 방안의 탐색이 이루어져야 한다.

참 고 문 헌

윌리엄 던햄 (2004). 수학의 천재들(조정수 번역.). 서울: 경문사. (원본출판 1990)

Artigue, M. (1991). Analysis. In D. Tall(Ed.), *Advanced mathematical thinking*(pp. 167-198). Kluwer Academic Publishers.

Cornu. B. (1991). Limits. In D. Tall(Ed.), *Advanced mathematical thinking*(pp. 153-166). Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167-192.

Dubinsky, Ed., Weller, K., Mcdonale, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 335-359.

Lakoff, G., & Nunez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Monaghan, J. D. (1986). *Adolescents' understanding of limits and infinity*. Unpublished doctoral dissertation, Warwick University, U.K.

Pinto, M. M. F. (1998). *Students' understanding of real analysis*. Unpublished doctoral dissertation, Warwick University, U.K.

Smith D. A., & Moore, L. C. (1996). *Calculus: Modeling and application*. Boston: Houghton Mifflin.

Tall, D. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. *Proceedings of* *the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 170-176.

Tall, D. (1993). Real mathematics, rational computers and complex people. *Proceedings of the fifth annual International Conference on Technology in College Mathematics Teaching*(pp. 243-258). Reading, MA: Addison-Wesley.

Tall, D. (2001). Cognitive development in advanced mathematics using technology. *Mathematics Education Research Journal*, **12**, 196-218.

Tall, D. (2002). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 199-238.

Tall, D., Smith, D., & Piez, C. (2008). Technology and calculus. In M. K. Heid & G. W. Blume(Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Volume 1*(pp. 207-258). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, **12**, 151-169.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning mathematics. In D. Tall(Eds.), *Advanced mathematical thinking*(pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, **22**, 219-236.

Wood, N. G. (1992). *Mathematical analysis: A comparison of students development and historical development*. Unpublished doctoral dissertation, Cambridge University, U.K.

Exploring a Teaching Method of Limits of Functions with Embodied Visualization of CAS Graphing Calculators

Cho, Cheong-Soo

Deptartment of Mathematics Education, Yeungnam University, Gyungsan, Korea, 712-749

E-mail : chocs@ynu.ac.kr

The purpose of this study is to explore a teaching method of limits of functions with more intuitive and visual of CAS graphing calculators rather than with the rigorous $\epsilon - \delta$ method. Texas Instruments Voyage200 CAS graphing calculators are used for studying the possibility of the use of technology in calculus course. For this, various related theoretical constructs are reviewed: concept image, concept definition, cognitive conflict, the use of visualization of technology for calculus concepts, the theory of APOS, and local *straightness. Based on such theoretical constructs this study suggests a teaching method of* limits of functions with embodied visualization of CAS graphing calculators.

* ZDM Classification : D53

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40

* Key Words : limit of function, CAS graphing calculators, visualization, APOS theory