韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 25호 제 1권, 2011. 2. 21-45

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 25, No. 1, Feb. 2011. 21-45

유사 문제 해결에서 구조적 유사성, 분석적 활동 그리고 비교 활동의 역할

노 은 환 (진주교육대학교)
전 영 배 (경상대학교)
강 정 기 (안남중학교)

본 연구는 4명의 중학교 3학년 학생들이 주어진 표적 문제를 해결하는 과정을 분석하여 학생들이 보이는 다양한 활동 요소 중 구조적 유사성의 인식, 분석적 활동 그리고 비교 활동에 주목하여 이들 활동이 표적 문제의 해결에서 어떤 역할을 하는지 살펴보았다. 4명의 학생들의 문제 해결 과정을 개별적으로 관찰하고 면담한 후, 이 과정에서 학생들이 보인 반응을 분석하여 다음과 같은 결과를 얻었다. 표적 문제의 해결에 근원 문제의 해법을 적용할 수 있는 토대를 마련하는데 도움을 주는 활동 중의 하나로 구조적 유사성의 인식이 그 역할을 수행할 수 있음을, 또 문제 해결을 위해 추측한 사실에 대한 진위 여부의 판단 근거로 분석적 활동을 활용함을 확인하였다. 그리고 표적 문제의 문제점을 인식하게 하여 표적 문제의 해결 방향을 설정하는데 도움을 제공하는 것으로 비교 활동을 활용함을 확인하였다. 따라서 현장에서 수학을 가르치는 교사는 표적 문제의 해결을 위해 유사 문제와의 구조적 유사성, 분석적 활동 그리고 비교 활동에 초점을 맞추어 문제의 해결을 지도하는 노력이 요구된다. 뿐 만 아니라 본 연구에서 언급한 세 가지 요소 이외에 더 많은 요소가 있을 수 있으며 그 요소들의 역할을 탐구하는 후속연구도 필요하다.

Ⅰ. 들어가며

1980년대 문제 해결이 학교 수학의 초점이 되어야 한다는 NCTM의 권고 이후, 문제 해결은 모든 수학 학습의 통합적인 부분으로서 수학 교육의 기본적인 목표 중의 하나로 인식되고 있다. 우리나라에서도 문제 해결은 제4차 수학과 교육과정 이래로 수학 교육의 목표로 강조해 온 사항이며, 개정 교육과정에서도 지속적으로 강조하고 있다(교육과학기술부, 2007).

문제 해결의 중요성이 제기되면서 학생들의 문제 해결력 신장을 위한 다양한 연구들이 있었다 (Dooren, Verschaffel & Onghena, 2002; Lawson & Chinnappan, 2000; NCTM, 2000). 특히 Polya(1997)는 '문제의 해결을 발견하는 것은 분리되어 있는 아이디어들 사이의 연결을 찾는 것이다'

* 접수일(2010년 12월 21일), 심사(수정)일(2011년 1월 24일), 게재확정일자(2011년 1월 31일)
* ZDM분류 : D53
* MSC2000분류 : 97D50
* 주제어: 유사 문제, 근원 문제, 표적 문제, 구조적 유사성, 분석적 활동, 비교 활동

라고 말하고, 이 과정을 문제 이해, 계획 수립, 계획 실행, 반성의 4단계로 구분하여 제시하였다. Polya는 학생들이 이 네 단계를 원활하게 수행하여 문제 해결에 이르게 하기 위해서는, '미지인 것은 무엇인가?', '조건은 무엇인가?', '자료는 무엇인가?', '관련된 문제를 알고 있는가?', '그림을 그려 보아라', '문제를 달리 진술할 수 있을까?' 등 다양한 발문을 제시하고 이것을 적절히 사용하여 학생들의 문제 해결에 도움을 제공할 것을 권고하였다. 이 중 '관련된 문제를 알고 있는가?'라는 발문이 문제 해결에 도움을 제공할 수 있다는 것은 문제 해결 과정에서 관련된 유사 문제를 생각해내는 것이 문제 해결에 중요한 역할을 수행할 수 있음을 의미하는데, 이것은 Clfareill(1993)와 Chinnappan(1998)가 우수한 문제 해결자는 이전에 문제를 해결한 경험을 근거로 유사한 부분을 생각해서 문제 해결에 성공한다고 주장한 내용과 그 맥을 같이 한다. 또한 이종희·이진향·김부미(2003)는 학생들이 새로운 문제를 해결해야 할 때 이전에 풀었던 비슷한 문제를 생각해 내서 그 해결책을 새로운 문제의 해결에 맞도록 변형시켜 새로운 문제를 해결하는 것은 하나의 문제 해결 전략이기도 하며, 이 전략은 새로운 통찰력을 불러일으키고, 복잡한 개념을 이해할 수 있게 할 뿐 만 아니라 새로운 지식을 익숙하지 않은 영역에 적용할 수 있다는 장점을 가지므로 이에 대한 연구가 의미가 있다고 하였다.

문제 해결 과정에서 주어진 문제와 관련된 유사 문제를 생각하는 것이 의미가 있고 가치가 있다는 사실이 부각되면서 유사 문제의 해결과 관련된 다음과 같은 다양한 연구들이 있었다. 문제에서 서술된 표면적 정보에 의존하여 유사성을 탐색한다는 결과를 얻은 연구들(Bassok & Holyoak, 1993; Chi, Glaser & Rees, 1982; Gentener, Rattermann & Forbus,. 1993; Reed, 1993), 또 이러한 연구가 연구자 중심으로 유사성을 해석한 연구 결과라는 비판과 함께 유사성을 탐구하기 위한 질적 연구들(박현정 · 이종희, 2006; Greeno, Moore & Smith, 1993; Lobato, 1997; Wagner, 2003)이 그것이다. 그런데 지금까지 이루어진 유사성에 관한 연구는 유사 문제에서 유사성의 역할에 대한 연구가 대부분이었으며(박현정 · 이종희, 2006; Gentener, Rattermann & Forbus, 1993), 유사 문제에서 문제 해결에 필요한 요소를 찾는 연구는 드물었다. 따라서 표적 문제[1]의 해결을 위해 유사 문제로부터 문제 해결에 필요한 다양한 요소를 찾고 각각의 요소들이 어떤 역할을 하는지 살피는 연구가 필요하다. 이에 본 연구에서는 표적 문제를 해결하는 과정에서 근원 문제와 관련지어 학생들이 보이는 다양한 활동 요소 중에서 구조적 유사성의 인식, 분석적 활동 그리고 비교 활동에 주목하여 이들 활동이 표적 문제의 해결에서 어떤 역할을 하는지 살펴보는 것을 연구문제로 설정하였다.

Ⅱ. 이론적 배경

여기에서는 본 연구에서 사용되는 구조적 유사성, 분석적 활동 그리고 비교 활동의 의미를 간략히 살펴보고자 한다.

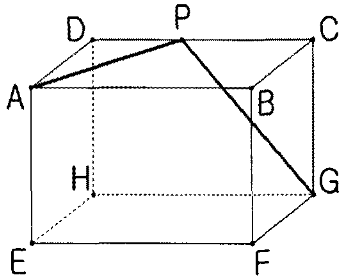
---

1) 본 연구에서는 주어진 문제를 표적 문제(target problem), 표적 문제와 유사한 이전에 풀었던 문제를 근원 문제(base problem)라고 정의하여 사용함.

1. 구조적 유사성

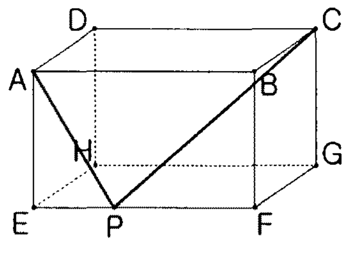
전영배 외(2010)는 구조적 유사성을 대응하는 주요 구성요소들 사이의 속성 및 관계에 대하여 구조의 수준에서 해법 원리가 공유되도록 인식되는 유사성을 의미한다고 하며, 다음 두 문제를 통해 구조적 유사성의 인식이 유사 문제 해결에서 반드시 필요한 요소임을 강조하였다.

근원 문제: 다음 직육면체 $ABCE-EFGH$에서 점 P는 $\overline{DC}$ 위의 점이다. 이 때 점 A에서 P를 거쳐 점 G에 도달하는 경로가 최소가 되도록 하는 점 P의 위치를 구하여라.



<그림 1> 근원 문제

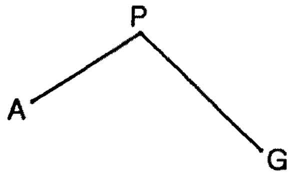
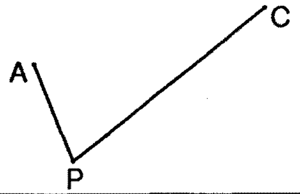
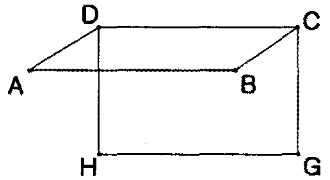
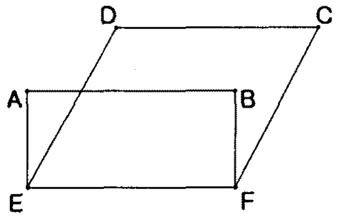
표적 문제: 다음 직육면체 $ABCE-EFGH$에서 점 P는 $\overline{EF}$ 위의 점이다. 이 때 점 A에서 P를 거쳐 점 C에 도달하는 경로가 최소가 되도록 하는 점 P의 위치를 구하여라.



<그림 2> 표적 문제

전영배 외(2010)는 위의 두 문제에서 구조적 유사성은 두 선분, 두 선분이 놓인 평면, 다른 평면 위에 놓여 있는 두 선분의 최단 경로, 두 선분의 길이의 합이 최소가 되도록 하는 점 P의 위치 등을 의미한다고 하였다. 즉, 다음 <표 1>과 같은 것이 구조적 유사성에 해당한다. 본 연구에서는 이와 같은 구조적 유사성의 개념을 바탕으로 연구를 진행하였다.

<표 1> 구조적 유사성

요소	근원 문제	표적 문제
두 선분		
두 선분이 놓인 평면		 (여기서 □$CDEF$는 보이지 않는 평면임)
두 선분의 최단 경로	두 평면 □$ABCD$, □$CDHG$에 각각 놓인 두 선분의 최단 경로	두 평면 □AEFB, □CDEF에 각각 놓인 두 선분의 최단 경로
점 P의 위치	두 선분 $\overline{AP}$, $\overline{PG}$의 길이의 합이 최소가 되도록 하는 점 P의 위치	두 선분 $\overline{AP}$, $\overline{PC}$ 길이의 합이 최소가 되도록 하는 점 P의 위치

2. 분석적 활동

위키백과(2010)[2]에서는 분석(分析)은 복잡한 내용, 많은 내용을 지닌 사물을 정확하게 이해하기 위해 그 내용을 단순한 요소로 나누어 생각하는 것을 뜻한다고 하였다. 본 연구에서는 이러한 분석의 정의에 근거하여 분석적 활동을 문제 해결을 위해 문제에 총체적으로 접근하는 것이 아니라 문제의 여러 구성 요소를 나누고 각 구성 요소에 초점을 맞추어 생각하는 것으로 정의하여 연구를 진행하였다.

Polya(2003)는 일반적인 위치에 있는 4개의 평면이 공간을 분할하는 문제에서 기하학적 상상력을 혹사시키지 말고, 사고를 하여 각 차원의 경계점을 기준으로 분할된 공간의 수를 헤아릴 것을 다음과 같이 권고하였다. 즉, 분할된 공간 중의 한 영역은 유한하며, 그것은 사면체의 내부이다. 무한한 영역은 사면체와 공통인 하나의 면(사면체의 2차원 경계면: 4개의 그러한 구역들이 있다)을 가질 수 있거나, 혹은 공통인 모서리(사차원의 1차원 경계점: 그러한 종류의 6가지 구역들이 있다)를 가질 수 있거나, 또는 공통인 꼭짓점(0차원의 경계: 4개의 영역들이 있다)을 가질 수 있다. 그러므로 모든 분할 영역들의 수는 $1+4+6+4=15$가 된다. 이와 같이 문제의 해결을 위해 분할된 공간을 총체적

2) http://ko.wikipedia.org/wiki/%EB%B6%84%EC%84%9D

으로 헤아리는 것이 아니라, 문제의 구성 요소(차원에 따른 경계점)별로 분할된 공간을 나누어 생각하는 활동이 본 연구에서 정의한 분석적 활동의 일종이다.

3. 비교 활동

네이버 국어사전(2010)[3]에서는 비교 활동을 둘 이상의 사물을 견주어 서로 간의 유사점, 차이점, 일반 법칙 따위를 고찰하는 일로 정의하였다. 본 연구에서는 네이버 국어사전의 견해를 따라 비교 활동이란 두 문제의 상황을 견주어 보아 서로 간의 유사점, 차이점 등을 고찰하여 문제 해결의 실마리를 발견하는 일로 정의하였다.

예를 들면, 볼록 다각형에 대해 성립하는 오일러 정리 $V-E+F=1$[4]에서 평면 도형인 볼록 다각형과 입체 도형인 볼록 다면체를 견주어 두 상황의 차이점(꼭짓점과 모서리의 개수가 동일한 평면 도형보다 입체 도형이 평면 도형을 입체 도형으로 만들어주는 면이 1개 더 많은 점)을 인식하여 볼록다각형에 대해 $V-E+F=nmc$이 성립하는 것을 알아내는 것은 본 연구에서 정의한 비교 활동이라 할 수 있을 것이다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

경남 창원 소재 A중학교 3학년 학생들 중 4명의 학생들을 대상으로 개별적 면담을 실시하여 각각 같은 문제를 제시하여 풀어보도록 하고 그 해결 과정을 관찰하였다. 이 연구 대상자들은 자신들의 수학교사인 K선생님의 권유에 따라 자발적으로 본 연구에 참여한 학생들로서, 본 연구의 관찰이 방과 후에 이루어졌음에도 적극적인 자세로 임하였다. 학생들은 수학 학습에 대하여 자신감을 가지고 있고, 또한 연구자가 제시한 문제를 해결하는 과정 내내 적극적으로 문제 해결에 참여하였다. 본 연구에 참여한 학생들은 중학교 3학년 원 단원을 학습하는 중이었는데, 피타고라스의 정리를 이미 학습하여 잘 알고 있는 상태였다. 한편, 3명의 연구 대상자들의 수학 학업 성적은 중상위권이며, 나머지 한 연구 대상자(학생 4)는 매우 우수한 성적을 가진 학생이었다. 이는 수학 성취도가 낮은 학생의 경우 본 연구에서 제시한 문제에 대한 근원 문제의 해법 원리를 숙지하지 못할 우려와 함께 근원 문제에서 표적 문제로 이어지는 과정의 관찰이 어려울 수 있는 연구의 현실적인 한계를 극복하기 위함이었다.

3) http://krdic.naver.com/detail.nhn?docid=18337400
4) V는 꼭짓점의 개수, E는 모서리의 개수, F는 면의 개수임.

2. 문제의 선정

학생들에게 제시된 근원 문제와 표적 문제는 중학교 3학년 학생들이 이미 학습한 내용, 즉, 피타고라스의 정리를 이용하여 해결할 수 있는 문제들이다. 특히, 근원 문제는 중학교 9-나 교과서에 제시되는 문제이므로 학생들이 근원 문제의 해결에 어려움을 겪지는 않을 것이라 판단하였고, 표적 문제는 이러한 근원 문제의 조건을 조금 변경한 것으로서 학생들에게 생소한 문제가 되도록 하였다.

한편, 유사성에 대한 연구들이 대수 영역의 문제를 다루는 경우가 대부분을 차지하고 있었다(이종희·김진화·김선희, 2003; 박현정·이종희, 2006; Bassok, 1990, 1997; Bassok & Holyoak, 1993). 하지만 대수 영역이 아닌 영역에서의 유사 문제에 대한 논의 또한 필요한 연구라 생각되어 본 연구에서는 기하 영역에서 많이 다루는 근원 문제로부터 문제의 조건이 조금 변경된 표적 문제를 제공하여 유사 문제 해결에 필요한 활동 요소로서 구조적 유사성의 인식, 분석적 활동, 비교 활동에 주목하여 이들 활동이 표적 문제의 해결에서 갖는 역할을 고찰하고자 하였다.

3. 자료 수집 및 분석

연구에 참여한 4명의 학생들은 각각 다른 시간에 연구자와 개별적 면담을 가졌다. 이러한 면담을 하면서 연구자는 학생들의 문제 해결 과정을 관찰하였다. 각 연구 대상자들에게 제시된 문제는 동일하며, 문제 해결을 위해 제공하고자 하는 발문은 연구 대상자가 해결한 문제 상황에 따라 달리 하였다. 학생들에게 주어진 시간은 50분이고, 그 시간 동안 문제를 해결하여 답안을 제출하도록 하였다. 근원 문제를 제시하고 이 문제를 학생들이 해결할 수 있는지를 살펴본 후, 근원 문제와 해법 원리가 유사한 표적 문제를 제공하여 학생들이 해결하는 과정을 관찰하였다. 학생들의 반응을 관찰하면서 필드노트를 작성하고 동시에 녹음기를 이용하여 학생들의 문제 해결 전 과정을 녹취하였다.

본 연구의 연구문제가 유사 문제의 해결 과정에서 구조적 유사성의 인식, 분석적 활동 그리고 비교 활동에 주목하여 이들 활동이 표적 문제의 해결에서 어떤 역할을 하는지 살펴보는 것이므로 학생들이 보이는 반응을 이들의 관점에서 정리하였다. 각 학생들의 문제 해결 과정을 일관성 있게 관찰하고자, 다음과 같은 몇 가지 기준안을 정하였다. 첫째, 모든 학생들에게 근원 문제를 해결해 볼 것을 요구하며, 근원 문제를 해결하지 못할 경우 표적 문제를 제공하지 않으며, 근원 문제를 원만히 해결할 경우에만 표적 문제를 제공한다. 둘째, 본 연구는 학생들의 반응에 대한 깊이 있는 관찰이 필요한 질적 연구이므로 학생들이 보이는 특이한 반응에 대한 질문은 불가피하다고 생각하였기 때문에, 학생들이 보이는 반응에 대한 이유를 파악하기 위한 질문을 실시한다. 셋째, 문제 해결 과정에서 학생들이 보이는 반응의 단계에 맞추어 적절한 차별화된 질문이나 권고를 제공한다. 하지만 서로 다른 두 학생들이 보이는 반응이 일치하는 경우에는 각각의 학생들에게 제공하는 질문이나 권고는 동일하게 한다. 넷째, 구조적 유사성의 인식, 분석적 활동 그리고 비교 활동의 관점에서 학생들의 유사 문

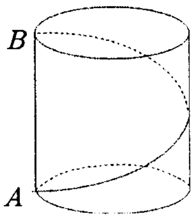
제 해결 과정을 살펴보아야 하므로 학생들이 보이는 반응을 통해 미진하다고 판단되는 활동에 대해 적절한 발문을 제공하여 이 활동이 표적 문제 해결에 어떤 부분까지 도움이 되고 어떤 부분에는 도달하지 못하는지를 살펴보아 그 활동의 역할이 갖는 경계를 모색해 보고자 한다. 이 때, 연구자가 제공하는 발문은 문제 해결에 직접적인 도움을 제공하는 것이 되지 않도록 하며, 각 활동들의 관점에서 문제 해결에 간접적 도움을 제공할 수 있는 것이 되도록 한다.

Ⅳ. 연구 결과 및 논의

1. 관찰 결과

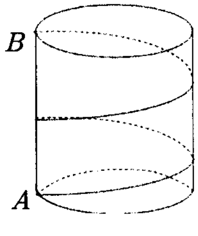
다음은 연구자가 학생들(학생 1, 학생 2, 학생 3, 학생 4)의 문제 해결 과정을 각각 관찰하면서 작성한 필드노트와 녹취 내용을 전사한 것이며, 학생들에게 제시한 문제는 다음과 같다.

근원 문제: 다음 그림은 반지름이 $3cm$, 높이가 $8cm$인 원기둥이다. 이 원기둥의 밑면의 A지에서 원기둥의 옆면을 따라 한 바퀴 돌아 B지점에 도달하는 경로의 최단 거리는?



<그림 3> 근원 문제

표적 문제: 다음 그림은 반지름이 $3cm$, 높이가 $8cm$인 원기둥이다. 이 원기둥의 밑면의 A지점에서 원기둥의 옆면을 따라 두 바퀴 돌아 B지점에 도달하는 경로의 최단 거리는?



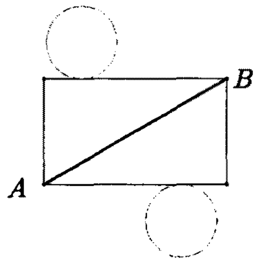
<그림 4> 표적 문제

1) 학생 1의 문제 해결 과정

학생 1에게 근원 문제가 제시되자 학생 1은 별다른 어려움 없이 근원 문제를 다음과 같이 해결하였다.

[학생 1이 제시한 근원 문제의 풀이]

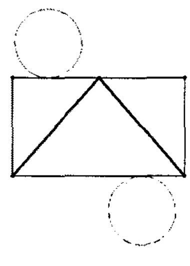
다음 그림과 같이 원기둥의 전개도를 펼치면 A지점에서 B지점으로 가는 최단 경로는 직사각형의 대각선이 된다.



<그림 5> 학생 1이 제시한 근원 문제의 최단 경로

따라서 구하고자 하는 경로의 최단 거리는 $2\sqrt{9\pi^2+16}\,cm$이다.

근원 문제를 쉽게 해결한 학생 1에게 표적 문제를 제시하였다. 학생 1은 표적 문제가 제시되자 근원 문제에서와 같이 원기둥의 전개도를 그린 후, 경로에 대해 생각을 하였다. 5분정도 시간이 지난 다음 <그림 6>과 같은 경로를 그렸다.

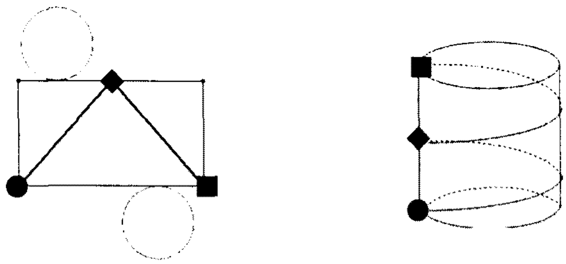


<그림 6> 학생 1이 제시한 표적 문제의 경로

<그림 6>을 본 연구자는 다음과 같이 물었다.

연구자 : 왜 경로가 그렇게 된다고 생각하지?

학생 1 : (다음 <그림 7>에서와 같이 표시를 하면서) 동일한 표시를 가진 것끼리 대응한다고 생각했어요.



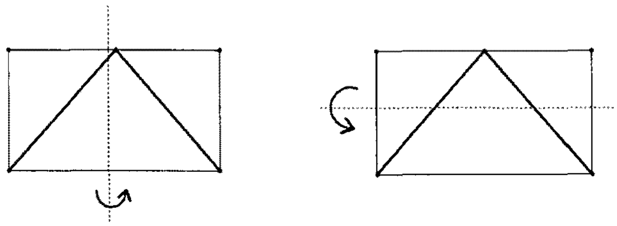
<그림 7> 학생 1이 제시한 경로에 대한 설명

이러한 학생 1의 설명에 대해 연구자는 다음과 같이 물었다.

연구자 : 전개도를 원기둥으로 만든다면 네가 전개도에 그린 경로가 <그림 4>와 같이 원기둥의 옆면을 따라 두 바퀴를 도는 경로가 될까?

학생 1 : 아마도 그렇게 될 것 같아요. 한 번 만들어 봐야겠어요.

학생 1은 A4용지에 <그림 6>과 같은 경로를 그린 후 원기둥으로 만드는 활동을 하였다. 이 때 전개도를 다음 <그림 8>의 왼쪽 그림과 같이 원기둥을 만들어보더니 자신이 그린 경로가 원기둥의 옆면을 두 바퀴 도는 경로가 아님을 확인하고, 이번에는 <그림 8>의 오른쪽과 같이 원기둥을 만들어 보았다.



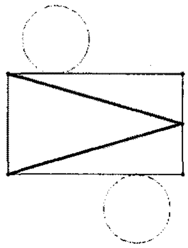
<그림 8> 원기둥을 만드는 학생 1의 활동

이러한 활동을 진행해 본 학생은 급기야 흰 종이를 감아 원기둥을 만든 뒤 그 위에 연필로 <그림 4>와 같은 두 바퀴 도는 경로 그리기를 시도하였으나 종이가 힘이 없어 생각만큼 쉽게 그리지 못하자, 이번에는 종이를 말아 종이에 탄력이 생기게 하여 경로 그리기를 시도하였다. 이렇게 직접 원기둥의 옆면에 두 바퀴 도는 경로를 그리는 활동을 하였음에도 불구하고 학생 1은 구하고자 하는 경로를 전개도에 끝내 나타내지 못하였다.

2) 학생 2의 문제 해결 과정

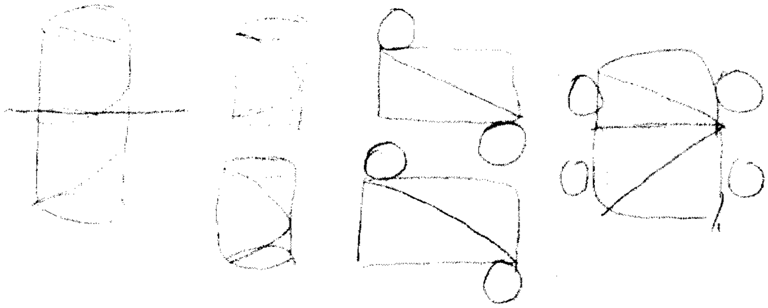
학생 2에게 근원 문제를 제시하자 학생 1과 같이 쉽게 해결하기에 표적 문제를 제시하였다. 학생

2는 표적 문제가 제시되자 근원 문제에서와 같이 원기둥의 전개도를 그린 후, 경로에 대해 생각을 하였다. 5분 정도 시간이 지난 다음 <그림 9>와 같은 경로를 그렸다.



<그림 9> 학생 2가 제시한 표적 문제의 경로

학생 2는 자신이 <그림 9>에서 그린 경로가 올바른지에 대해 한 동안 고민하는 모습을 보이더니 표적 문제에 주어진 원기둥을 두 개의 부분으로 나누는 시도를 하였다. 그리고 두 부분으로 나누어진 원기둥의 전개도를 각각 그린 후, 그 위에 경로를 표시하였다. 문제가 거의 해결된 듯이 보였지만 연구자의 기대와는 달리 학생 2는 두 전개도를 합치는 과정에서 <그림 9>와 같은 경로를 그렸다. 학생 2가 보여준 활동의 과정은 다음 <그림 10>과 같다.



<그림 10> 학생 2가 보여준 활동

이러한 학생 2의 활동을 지켜본 연구자는 다음과 같이 권고하였다(문제가 제시되고 나서 30분 경과 후).

연구자 : 원기둥을 전개도로 펼치려면 원기둥을 자르는 행위가 필요한데, 이러한 점을 고려해서 경로를 생각해 보렴.

하지만 연구자의 권고에도 불구하고 학생 2는 <그림 4>와 같이 원기둥의 옆면을 따라가는 경로가 <그림 9>와 같다는 의견을 고수하여 $4\sqrt{9\pi^2+4}\,cm$를 최종 답으로 제출하였다. 최종 답안을 받은 직후 연구자는 학생 2가 <그림 4>의 경로를 <그림 9>와 같이 생각한 이유를 알기 위해 면담을 실

시하였다.

연구자 : <그림 10>에서 두 분분으로 나눈 원기둥의 전개도 위에 왜 그렇게 경로를 그렸니?
학생 2 : 원기둥의 왼쪽을 잘라 펼친 안쪽 면을 본거예요.
연구자 : <그림 10>에서 두 전개도의 경로를 왜 그렇게 합쳤니?
학생 2 : 연결되어 있잖아요.
연구자 : 그게 무슨 뜻이니?
학생 2 : (<그림 4>를 가리키며) 문제에 주어진 경로가 처음부터 끝까지 연결되어 있잖아요.

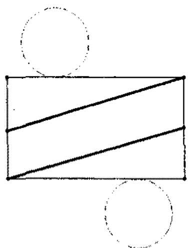
3) 학생 3의 문제 해결 과정

학생 3에게 근원 문제를 제시하자 학생 1과 같이 쉽게 해결하기에 표적 문제를 제시하였다. 학생 3은 표적 문제가 제시되자 근원 문제에서와 같이 원기둥의 전개도를 그린 후, 경로에 대해 생각을 하였다. 5분 정도 생각을 한 학생 3이 마침내 전개도에 경로를 그렸는데, 그 경로를 그리는 활동의 과정이 놀랍게도 학생 2가 보여준 <그림 10>와 일치하였다.

이러한 학생 3의 활동을 지켜본 연구자는 다음과 같이 권고하였다(문제가 제시되고 나서 15분 경과 후).

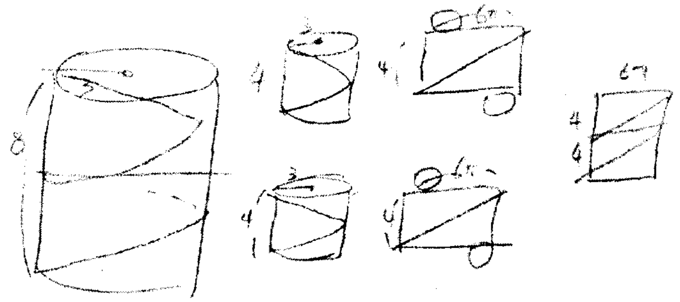
연구자 : 원기둥을 전개도로 펼치려면 원기둥을 자르는 행위가 필요한데, 이러한 점을 고려해서 경로를 생각해 보렴.

한 동안 고민을 거듭하던 학생 3은 자신이 보여준 활동을 한 번 더 그리는 활동을 진행하였는데, 앞의 <그림 10>에서 와는 달리 두 전개도를 합치는 과정에서 다음 <그림 11>과 같은 경로를 그렸다.



<그림 11> 학생 3이 제시한 표적 문제의 경로

학생 3이 새롭게 보여준 활동의 과정은 다음 <그림 12>와 같다.



<그림 12> 학생 3이 보여준 활동

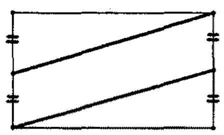
이러한 학생의 활동에 대해 연구자는 다음과 같은 질문을 하였다.

연구자 : 앞에서와는 다르게 경로를 그렸는데, 왜 그렇게 그린거니?
학생 3 : 이전에 원기둥을 전개도로 펼치는 행위에는 원기둥을 자르는 활동이 필요하다고하셨잖아요. 전개도는 원기둥의 옆면을 잘라 만든 것이니까 전개도에서의 경로는 이렇게 잘린 모습이 되어야 할 것 같아요. 그래서 이렇게 그렸어요.

이 후 연구자는 학생 3에게 최종 답안을 제출할 것을 요구하였다. 그러자 학생 3은 망설임 없이 $4\sqrt{9\pi^2+4}\,cm$를 최종 답으로 제출하였다.

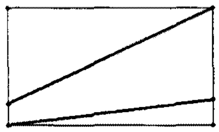
<그림 12>에 의하면 이 결과는 <그림 11>에 있는 경로가 원기둥의 옆면인 직사각형의 세로의 중점을 지나갈 때의 길이를 의미한다. 그래서 연구자는 다음과 같은 질문을 하였다.

연구자 : 네가 구한 것은 경로가 직사각형의 세로의 중점을 지날 때의 길이인데, 그렇게 되는 이유를 설명해주겠니?
학생 3 : …
연구자 : 네가 구한 경로의 길이는 다음 <그림 13>과 같은 상황에서의 경로의 길이이지.



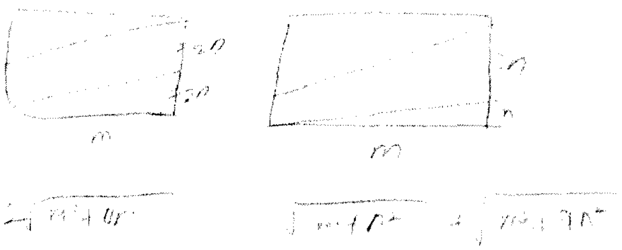
<그림 13> 학생 3이 추측한 표적 문제의 최소 경로

학생 3 : 예.
연구자 : 그런데 그 경로가 왜 최단거리임을 설명할 수 있지? 즉, 다음 <그림 14>와 같은 경로도 원기둥의 옆면을 두 바퀴 도는 경로인데, 위의 경로가 이런 경로에 비해 왜 최단 거리임을 확신할 수 있는 것이지?



<그림 14> 원기둥의 옆면을 두 바퀴 도는 다른 경로

이제 학생 3은 연구자의 질문을 이해하고, 이 질문에 대한 답을 생각하기 시작하였다. 학생 3은 얼마 동안 생각을 하더니 다음 <그림 15>와 같이 두 상황을 비교하는 활동을 하였다.



<그림 15> 두 상황을 비교하는 학생 3의 활동

학생 3이 보여준 활동의 모습은 기하학적 상황을 대수적으로 접근하는 것으로서 모든 경우를 대표하는 것이 아님에도 불구하고 문제의 해결에 다가간 활동임에는 틀림없다. 하지만 학생은 <그림 15>의 활동에서 $\sqrt{m^2+n^2}+\sqrt{m^2+9n^2}>2\sqrt{m^2+4n^2}$임을 설명해 내지 못하고 다음과 같이 말하였다.

> 학생 3 : (구체적인 수를 대입하여 보더니) m은 고정된 값이잖아요. 그러니까 세로의 길이만 보면 되는데, 세로의 길이가 서로 다른 경우인 $\sqrt{m^2+n^2}+\sqrt{m^2+9n^2}$이 세로의 길이가 같을 경우에 $2\sqrt{m^2+4n^2}$보다 더 클 것 같아요.

학생 3은 자신이 증명하고자 하는 부등식 $\sqrt{m^2+n^2}+\sqrt{m^2+9n^2}>2\sqrt{m^2+4n^2}$의 m, n에 실수를 대입하는 활동을 하여 위 부등식이 성립함을 확인하였지만 여전히 부등식이 성립하는 이유를 밝히지는 못하였다. 학생 3은 아직 식의 대소를 비교하는 방법에 익숙하지 않아 이러한 대수적 접근에 어려움이 있는 것 같아, 연구자는 기하학적으로 접근할 수 있도록 다음과 같은 조언을 하였다.

> 연구자 : 자, 근원 문제[5]를 생각해 보도록 하자. 근원 문제의 전개도에 그려진 최단 경로는 직사각형의

---

5) 연구자와 학생 3의 실제 대화에서는 근원 문제와 표적 문제라는 용어를 사용하지 않았으나, 같은 의미이므로 연구자가 고쳐 표현한 것임.

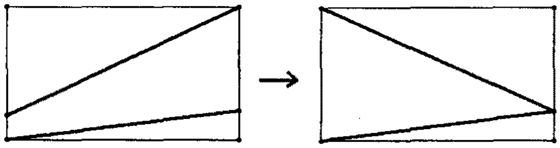
대각선이었지(<그림 5>). 그런데 표적 문제의 전개도에 그려진 경로(<그림 13> 또는 <그림 14>)는 근원 문제의 상황과 차이가 나는데, 어떤 차이점이 있지?

학생 3 : 음…, 경로가 끊어진 점이 차이가 나네요.

연구자 : 그래, 잘 찾았어. 그러면 표적 문제를 해결하려면 어떻게 해야 할까?

학생 3 : 끊어진 경로를 이어야 하겠네요.

학생 3은 대화를 통해 끊어진 경로를 연결해야 됨을 인식하고, 다음 <그림 16>과 같은 활동을 하였다. 이것은 연구자도 예측하지 못한 의외의 활동이었다.

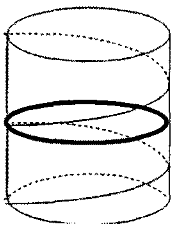


<그림 16> 학생 3이 보여준 경로를 연결하는 활동

학생 3은 <그림 16>과 같은 활동을 한 후에도 <그림 13>의 경로가 최소가 되느냐는 연구자의 질문에 대한 해결의 실마리를 찾지 못했다. 이것은 비록 경로를 연결하는데 성공하였지만 경로가 꺾여있는 새로운 문제 상황이 발생하였기 때문이다. 학생 3은 이 후에도 경로를 연결하려는 다른 활동을 시도하였지만 문제를 해결하지 못하고 말았다.

4) 학생 4의 문제 해결 과정

학생 4에게 근원 문제를 제시하자 쉽게 해결하여 표적 문제를 제시하였다. 학생 4는 수학 학업성취도가 매우 우수한 학생으로 표적 문제가 제시되자 전개도를 그린 후, 경로를 탐색하기 시작했다. 그리고 다음 <그림 17>와 같은 선을 긋는 활동을 한 후, 곧 바로 전개도에 <그림 11>과 같은 경로를 그렸다. 잠시 후 $4\sqrt{9\pi^2+4}\,cm$을 최종 답안으로 제출하였다.

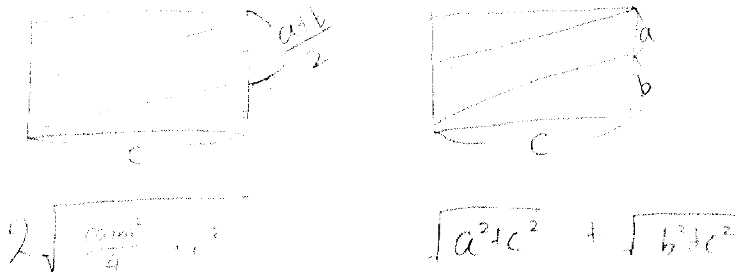


<그림 17> 학생 4가 전개도의 경로를 인식하기 위해 그은 보조선

이에 대해 연구자는 학생 3에게 했던 질문을 하였다.

연구자 : 네가 구한 것은 경로가 직사각형의 세로의 중점을 지날 때의 길이인데, 그렇게 되는 이유를 설명해주겠니?

이 질문에 대해 학생 4는 쉽게 대답을 하지 못하고 고민하는 모습을 보였다. 한 동안 고민하던 학생 4는 학생 3이 했던 것처럼 대수적으로 접근하려는 시도를 하였으며, 두 상황을 비교하는 학생 4가 보여준 활동은 다음 <그림 18>과 같다.

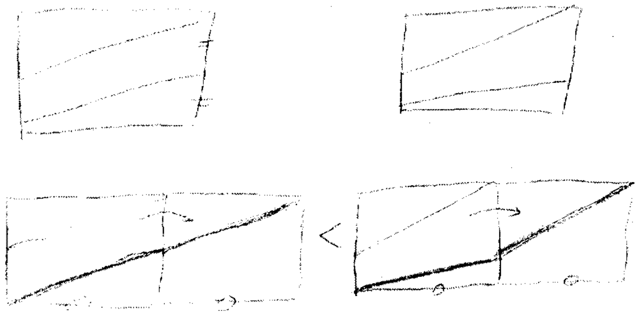


<그림 18> 두 상황을 비교하는 학생 4의 활동

학생 4가 보여준 활동의 과정은 학생 3과 같이 기하학적 상황을 대수적으로 접근하는 것이었지만, 학생 3과는 다르게 일반적 상황을 고려하여 문제를 해결하려고 하였다. 그러나 학생 4는 위의 활동에서 $\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}>2\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}+c^2}$임을 설명해 내지 못하고 한 동안 고민을 계속 하였다. 많은 시간이 지나도 학생 4는 대수적 접근에 집착한 활동만을 전개하여 문제 해결에 아무런 소득이 없었다. 학생 4가 이러한 대수적 해결에 어려움이 있는 것 같아, 기하학적으로 접근할 수 있도록 학생 3에게 했던 것과 동일한 조언을 하였다.

연구자 : 자, 근원 문제를 생각해 보도록 하자. 근원 문제의 전개도에 그려진 최단 경로는 직사각형의 대각선이었지(<그림 5>). 그런데 표적 문제의 전개도에 그려진 경로(<그림 13> 또는 <그림 14>)는 근원 문제의 상황과 차이가 나는데, 어떤 차이점이 있지?
학생 4 : 음…, 경로가 끊어진 점이 차이가 나네요.
연구자 : 그래, 잘 찾았어. 그러면 표적 문제를 해결하려면 어떻게 해야 할까?
학생 4 : 끊어진 경로를 이어야 하겠네요.

연구자의 조언이 제공된 이 후, 끊어진 경로를 연결하려는 다양한 시도를 거듭하던 학생 4는 드디어 <그림 13>의 경로가 최소가 되는 이유를 다음 <그림 19>와 같은 활동을 통해 보여주었다.



<그림 19> 최소 경로임을 설명하는 학생 4의 활동

2. 논의

1) 학생 1의 문제 해결 과정 논의

학생 1은 근원 문제의 해결 방법을 잘 알고 있음에도 표적 문제의 해결에는 실패하였다. 먼저, 학생 1의 문제 해결 과정에 대해 분석적 활동의 측면에서 접근해 보자. 학생 1의 문제 해결 과정을 살펴보면 원기둥의 옆면을 펼쳤을 때, 전개도에 그려지는 경로를 단번에 그려내는 모습을 볼 수 있다. 이것은 학생 1이 문제의 구성 요소 별로 분리하여 생각하는 분석적 활동을 전혀 전개하지 않고 총체적인[6] 느낌으로만 경로를 그려냈다는 것을 의미한다. 특히 이것은 연구자가 학생 1에게 '왜 경로가 그렇게 된다고 생각하지?'라고 질문한 것에 대해 <그림 7>에서 표시한 것끼리 대응하는 것이라고 설명한 학생 1의 대답을 보면 더욱 분명해진다. 만약 학생 1이 총체적 느낌 이외에 조금이라도 분석적 활동을 전개했더라면 <그림 7>에 표시된 두 그림에서의 ●와 ■이 서로 대응하지 않는 요소임을 인식할 수 있었을 것이다. 왜냐하면 <그림 7>에서 전개도를 원기둥으로 만들게 되면 전개도에 표시된 ●와 ■가 모두 아랫면에서 만나야 하는데, 원기둥에 표시된 ●와 ■는 아랫면과 윗면에 각각 위치하고 있기 때문이다. 학생 1이 이러한 분석적 활동을 시도했더라면 경로가 그려진 전개도를 직접 원기둥으로 만들어보는 활동을 시도하지 않더라도 자신이 예측한 경로가 잘못된 것임을 알 수 있었을 것이다. 한편, 학생은 전개도를 원기둥으로 만드는 활동의 진행 이 후에도 자신이 예측한 경로를 폐기하지 못하고 다른 방향으로 회전시켜 원기둥을 만드는 활동을 하였는데, 이러한 활동은 학생 1의 예측이 분석적 활동이 배제된 총체적 느낌에 의존한 결과이다. 총체적 느낌에 의존하여 만든 경로이므로 느낌이 버려지지 않는 이상 쉽게 폐기할 수 없는 것이다.

다음으로 학생 1의 활동을 구조적 유사성의 관점에서 보면 학생 1은 구조적 유사성을 인식하지 못하고 있음을 알 수 있다. 즉, 표적 문제는 근원 문제가 상하로 포개어진 구조로 이루어진 문제인

---

6) 총체적이란 문제를 구성 요소별로 분리하여 생각하는 것이 아니라 구성 요소를 하나로 합치거나 묶어서 문제의 해결을 모색하거나 생각하는 것을 뜻함.

데, 학생 1은 이러한 구조를 인식하지 못하고 문제 해결에 임하고 있음을 알 수 있다. 전영배 외 (2010)는 유사 문제 해결에서 구조적 유사성의 인식이 필요함을 주장하였는데, 이런 측면에서 학생 1의 문제 해결 과정을 살펴보면 학생 1의 구조적 유사성에 대한 인식 부족이 문제 해결 실패의 한 요인으로 자리 잡고 있음을 알 수 있다.

2) 학생 2의 문제 해결 과정 논의

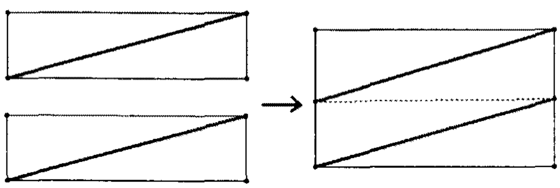
문제 해결 과정에서 학생 2가 보여준 경로의 모습(<그림 10>)을 보면, 근원 문제와 표적 문제의 구조적 유사성을 인식하고 있음을 알 수 있다. 학생 2는 표적 문제를 두 부분으로 분리함으로써 표적 문제를 근원 문제와 동일한 구조가 위 아래로 중첩된 복층 구조를 형성하였다. 이러한 구조적 유사성의 인식을 통해 학생 2는 표적 문제의 상황을 근원 문제의 상황으로 가져올 수 있었고, 이를 통해 근원 문제에서의 해법을 표적 문제에 적용해 볼 수 있었다. 이러한 과정을 통해 학생 2는 표적 문제의 문제 해결에 상당히 접근한 것을 알 수 있다. 이와 같이 유사 문제 해결에서 구조적 유사성은 표적 문제의 해결에서 근원 문제의 해법을 적용하는 토대를 마련해 주는 역할을 한다. 이상의 논의를 도식화 하면 다음 <그림 20>과 같다.

구조적 유사성의 인식 → 표적 문제를 근원 문제의 상황으로 전환 → 표적 문제의 해결에 근원 문제의 해법 적용

<그림 20> 유사 문제 해결에서 구조적 유사성 인식의 역할

학생 2는 구조적 유사성을 인식하여 표적 문제의 해결에 상당히 접근했고 표적 문제의 최소 경로의 길이를 얻었다. 그럼에도 불구하고 <그림 4>의 경로를 전개도 위에 올바르게 그리지는 못했다. 따라서 학생 2의 풀이 과정을 분석하여 <그림 4>의 경로를 전개도 위에 정확하게 그리기 위해 더 필요한 요소가 없는지 살펴볼 필요가 있다.

원기둥의 옆면에 그려진 경로는 한 번도 끊어진 적 없이 연결된 경로이다. 학생 2는 이러한 점에 집착한 모습을 보이고 있다. <그림 10>에서 보여준 학생 2의 활동 과정을 보면 최종 경로는 다음 <그림 21>과 같아야 한다.

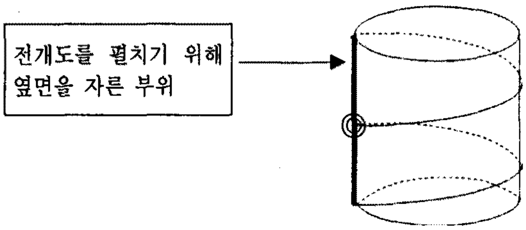


<그림 21> 올바른 최종 경로

그런데 학생 2가 그린 최종 결론은 이것과는 다르다. 이것은 학생 2가 원기둥에 그려진 경로가 연결되어 있다는 것을 의식해서 나온 결론으로 보인다. 즉, 끊어지지 않고 이어진 경로가 전개도에서도

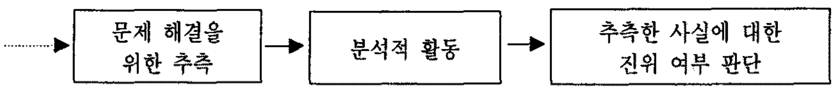
그대로 유지되어야 한다고 생각했기 때문에 구조적 유사성을 인식하여 올바른 최종 경로에 도달하려는 순간 방향을 전환하여 다른 경로를 그린 것이다.

한편, 이러한 집착에 대해 연구자는 학생 2에게 전개도는 원기둥을 자르는 행위로부터 만들어진다는 것을 조언하였음에도 <그림 4>의 경로를 전개도 위에 정확하게 그리는데 실패하였다. 하지만 연구자의 조언을 통해 분석적 활동을 적절히 시도하였다면 학생 2는 정확한 경로를 그리는데 성공하였을지 모른다. 원기둥을 펼쳐 전개도를 만들기 위해 원기둥의 옆면을 자르는 행위가 필요한데, 다음 <그림 22>와 같이 잘랐다고 하면 ◎와 같이 표시된 부분에서 경로가 끊어지게 된다. 따라서 전개도의 경로는 연결되어 있어야 할 것이 아니라 끊어져 있어야 하는 것이다.



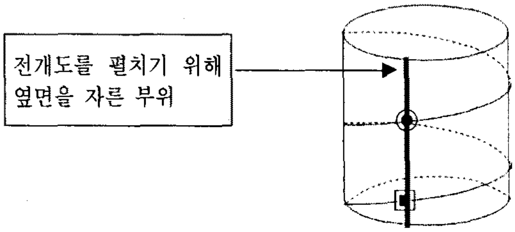
<그림 22> 표적 문제의 경로를 인식하기 위한 활동

이러한 상황을 좀 더 분석해보면 아래쪽에 위치한 원기둥의 경로의 끝점과 위쪽에 위치한 원기둥의 경로의 시작점이 서로 끊어짐을 알 수 있는데, 이와 같은 분석적 활동을 시도했더라면 학생 2가 그린 전개도 위의 경로는 달라졌을 것이다. 이처럼 분석적 활동은 구조적 유사성 인식을 바탕으로 그린 두 가지 경로를 하나의 경로로 만드는 과정에서 이 경로가 올바른지에 대한 판단의 근거를 제공하는 역할을 수행할 수 있는 것이다. 즉, 분석적 활동의 수행이 곧 문제 해결로 이어지는 것은 아니지만, 분석적 활동은 학생들이 문제 해결을 위해 추측한 사실에 대한 진위 여부의 판단을 가능하게 해주는 역할을 하는 것이다. 이상의 논의를 도식화하면 다음 <그림 23>과 같다.



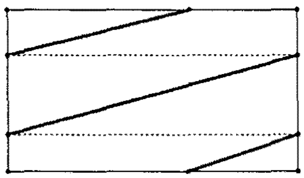
<그림 23> 유사 문제 해결에서 분석적 활동의 역할

이러한 분석적 활동은 복잡하고 새로운 상황이 전개되면 될수록 추측한 사실에 대한 판단을 위해 더욱 필요한 활동이다. 원기둥의 전개도를 펼치기 위해 옆면을 자른 부위가 <그림 22>와는 다르게 <그림 24>에 표시된 부위를 자를 경우의 경로에 대해 그려보는 상황이 펼쳐진다고 해 보자. 이 새로운 상황에 대해 구성 요소를 나누어 생각하는 분석적 활동을 진행하지 않고 총체적인 느낌으로만 전개도에 그려진 경로를 생각하는 것은 쉬운 일이 아니다.



<그림 24> 경로를 인식하기 위한 다른 활동

이러한 복잡하고 새로운 상황에서 자신이 추측한 전개도에서의 경로가 올바른 경로인지를 판단하기 위해서는 자른 부위의 구성 요소인 ◉와 ▣으로 표시된 부분에 대한 분석적 활동이 필요하다. 자른 부위에서 경로는 ◉와 ▣으로 표시된 부분에서 분리됨을 분석해 낼 수 있다. 이러한 분석적 활동으로 전개도 위에 나타나는 경로는 세 부분으로 나누어짐을 인식할 수 있는 것이다. 이제 이렇게 분리된 세 가지를 경로 별로 구분하여 분석하는 활동을 진행해 보자. 세 부분으로 나누어진 경로는 3층으로 포개진 구조인데, 여기서 중간층에 위치한 경로는 원기둥의 옆면을 따라 한 바퀴 도는 경로이고 나머지 층에 위치한 두 경로는 한 바퀴를 돌지 못하는 경로임을 인식 할 수 있다. 분석적 활동을 통해 이러한 결과를 알아차린다면 <그림 24>에서 제시된 부위로 잘랐을 때, 원기둥의 전개도 위에 나타나는 경로의 모습은 <그림 25>에 나타나는 경로가 됨을 인식하는 것이 어렵지 않을 것이다. 이처럼 복잡하고 새로운 상황에 대한 예측이 필요한 경우 분석적 활동은 예측의 정확도를 높여 문제 해결의 가능성을 높여주는 역할을 한다.



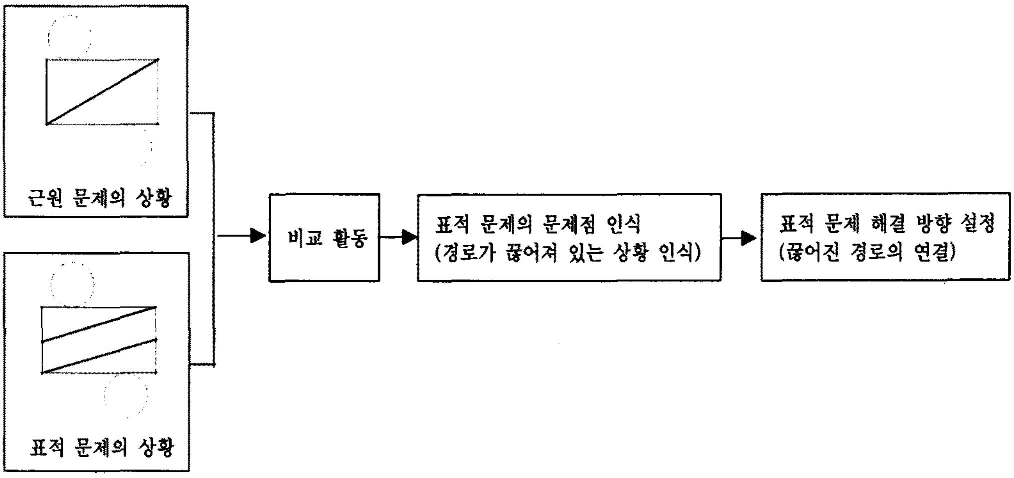
<그림 25> 전개도에 나타난 경로

3) 학생 3의 문제 해결 과정 논의

학생 3의 문제 해결 과정을 살펴보면 학생 2와 아주 유사하다. 차이가 나는 것은 학생 3은 연구자의 조언 이 후 자신이 처음에 그린 경로를 폐기하고 새로운 경로를 그려내는데 성공하였는데, 이러한 결과는 학생 2의 문제 해결 과정의 논의에서 보여준 분석적 활동의 결과로 보여 진다. 이것은 연구자와 학생 3이 나눈 대화를 보면 더욱 분명하다. 연구자의 조언으로 전개도를 펼치는 행위에 주목하여 전개도를 펼치기 위해 자르는 활동을 수행하면, 학생 3은 문제의 구성 요소 중 <그림 22>에서 ◎와 같이 표시된 부분이 분리됨을 인식한 것이다.

한편 학생 3은 정확한 경로를 그려내는데 성공한 이 후 망설임 없이 최단 경로는 직사각형의 세

로의 중점을 지날 것이라는 자신의 직관을 확신하여 문제의 답을 구해내었다. 하지만 학생 3은 연구자가 그렇게 되는 이유를 밝히라는 요구에 대수적 접근만을 거듭하는 모습을 보였을 뿐 이유 제시를 못하였다. 이것에 대해 연구자는 기하학적 접근을 시도할 수 있는 의미 있는 조언을 주었는데, 이것은 근원 문제의 전개도의 상황과 표적 문제의 전개도의 상황을 비교하라는 것이었다. 이 조언이 있은 이 후, 학생 3은 표적 문제의 전개도의 상황에서 무엇이 문제인지를 알아내고, 이 문제를 해결하려는 노력을 하였다. 표적 문제의 전개도의 경로는 끊어져 있는 것이 문제인데, 이러한 것에 대한 인식은 근원 문제의 상황과 표적 문제의 상황을 비교하는 활동을 통해 가능한 것이었다. 비록 학생 3은 문제 해결에 실패하였지만 문제 해결 방향을 설정할 수 있었으며 이를 통해 <그림 16>과 같은 활동을 시도할 수 있었다. 학생 3이 보여준 근원 문제의 상황과 표적 문제의 상황을 비교하는 활동으로부터 문제 해결 방향을 설정하는 과정을 도식화하면 다음 <그림 26>과 같다.



<그림 26> 유사 문제 해결에서 비교 활동의 역할

4) 학생 4의 문제 해결 과정 논의

학생 4는 수학 학업 성취도가 우수한 학생인데, 구조적 유사성을 인식하여 전개도에 그려진 경로의 모습을 쉽게 찾을 수 있었다. 학생 4의 이러한 일련의 과정은 비록 생략이 많았지만 구조적 유사성의 인식의 과정은 앞의 두 학생(학생 2, 학생 3)과 크게 다르지 않을 것이다.

한편, 학생 4 역시 정확한 경로를 그려내는데 성공한 이 후 학생 3과 같이 망설임 없이 최단 경로는 직사각형의 세로의 중점을 지날 것이라는 자신의 직관을 확신하여 문제의 답을 구해내었다. 학생 4는 연구자가 그렇게 되는 이유를 밝히라는 요구에 학생 3이 했던 것처럼 대수적 접근만을 거듭하는 모습을 보였을 뿐 이유를 제시하지 못하였다. 이것에 대해 연구자는 학생 3에게 했던 것과 같이 기하학적으로 접근할 수 있도록 하는 조언을 하였는데, 이것은 근원 문제의 전개도의 상황과 표적 문제의 전개도의 상황을 비교하라는 것이었다. 이 조언이 있은 이 후 학생 4는 표적 문제의 문제 상황

을 인식하고 경로를 연결하려는 시도를 하였다. 그리고 연구자의 물음에 답할 수 있는 완벽한 답을 찾아내는데 성공하였다.

이러한 학생 4의 문제 풀이 과정을 살펴보면, 학생 3의 경우에서와 같이 새로운 상황을 기존의 상황과 비교하여 새로운 상황의 문제점을 인식해 내고, 이러한 문제점을 해소하려는 노력은 문제 해결의 방향 설정으로 이어질 수 있음을 알 수 있었다. 즉, 주어진 상황과 새로운 상황을 비교하는 활동은 새로운 상황을 이해하고 해결하는 아이디어를 제공할 수 있는 것이다.

Ⅴ. 결론 및 제언

이종희·이진향·김부미(2003)는 문제 해결 과정에서 이전에 풀었던 비슷한 문제를 생각해 내서 그 해결책을 모색하는 것은 새로운 통찰력을 불러일으키고, 새로운 지식을 익숙하지 않은 영역에 적용할 수 있게 하므로 문제 해결의 강력한 도구가 될 수 있다고 하여 문제의 해결을 위해 유사한 관련 문제를 생각해 내는 것이 중요한 활동임을 강조하였다. 어떤 새로운 문제를 해결해야 할 때 이전에 풀었던 비슷한 문제를 생각해 내서 그 해결책을 새로운 문제의 해결에 맞도록 변형시켜 새로운 문제를 해결하는 문제 해결의 전략으로서 유추는 수학교육에서 그 중요성이 꾸준히 부각되고 있으며, 이에 대한 다양한 연구들이 진행되어 왔다. 특히, Polya는 문제 해결 전략으로 친숙한 문제로 미지인 것이 같거나 유사한 문제를 생각해 보도록 권고하고 있는데, 단순히 표적 문제에 대한 근원 문제를 제시하는 것만으로 문제 해결에 성공할 수 없다는 사실이 알려져 있으며(이종희·이진향·김부미, 2003), 이러한 사실을 고려할 때, 표적 문제의 해결을 위해서는 근원 문제와 표적 문제 사이의 연결을 위한 문제 해결 요소가 존재함을 알 수 있다. 이에 따라 두 문제의 연결을 도와 표적 문제의 해결로 이어질 수 있는 문제 해결 요소에 대한 탐색과 이들 요소가 문제 해결에서 갖는 역할을 모색하는 연구가 필요하며, 이를 통해 표적 문제의 해결을 위해 단순히 근원 문제를 제시하는 것 이외에 고려되어야 하는 요소들로 어떤 것이 있으며, 이들 요소가 표적 문제의 해결에 어떤 역할을 하는지를 이해할 수 있게 되는 것이다.

본 연구에서는 유사 문제 해결에서 표적 문제와 근원 문제 사이의 연결 고리로서 작용할 수 있을 것으로 생각되는 구조적 유사성의 인식, 분석적 활동과 비교 활동에 주목하여 학생들의 문제 해결 과정을 관찰하여 수학 문제 해결 과정에서 이들이 어떤 역할을 수행할 수 있는지 살펴보아 다음과 같은 결과를 얻었다.

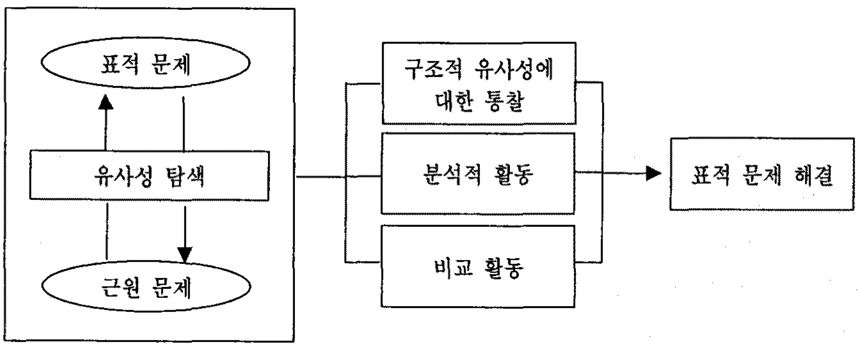
먼저, 구조적 유사성 인식의 측면에서 학생들의 문제 해결 과정을 살펴보면, 학생 1을 제외한 나머지 학생(학생 2, 학생 3, 학생 4)들은 구조적 유사성의 인식을 통해 근원 문제의 해법을 적용함으로써 표적 문제에서 원기둥의 옆면을 두 바퀴 도는 경로가 전개도에서 나타나는 모습을 그려낼 수 있었다. 하지만 학생 1은 구조적 유사성의 인식에 실패하여 자신이 갖는 느낌만으로 전개도에서의 경로를 그려봄으로써 근원 문제의 해법을 전혀 적용하지 못하였다. 이러한 사실로부터 유사 문제 해결

에서 구조적 유사성의 인식은 표적 문제의 상황을 근원 문제 해법의 적용이 가능한 상황으로 전환하는 역할을 할 수 있음을 알았다. 하지만 구조적 유사성의 인식 만으로 문제의 해결에 도달할 수 있는 것은 아님을 알 수 있었다.

둘째, 분석적 활동의 측면에서 학생들의 문제 해결 과정을 살펴보자. 학생 3은 원기둥의 전개도를 만들기 위해 자르는 부위에 주목한 분석적 활동으로부터 원기둥의 옆면을 한 바퀴 도는 경로가 전개도에서 나타나는 두 경로를 연결하여 원기둥의 옆면을 두 바퀴 도는 경로가 전개도에서 나타나는 경로를 추측하는 과정에서 자신이 추측한 경로가 잘못된 경로임을 파악하여 경로를 수정할 수 있었던 반면, 학생 1과 학생 2는 분석적 활동의 부재로 인해 지신이 추측한 경로가 잘못되었음을 인식하지 못하였다. 이러한 사실로부터 문제를 구성 요소 별로 나누어 생각하는 분석적 활동은 문제 해결 과정에서 추측된 다양한 사실에 대한 판단의 근거를 제공할 수 있음을 알 수 있었다. 한편, 좀 더 복잡한 상황을 고려해 봄으로써 분석적 활동은 복잡하고 새로운 상황이 진행될수록(<그림 24>) 이러한 상황의 이해를 도울 수 있는 역할을 수행함을 알 수 있었다.

셋째, 비교활동의 측면에서 학생들의 문제 해결 과정을 살펴보자. 학생 3과 학생 4는 비교 활동을 통해 연구자로부터 새롭게 주어진 과제(<그림 13>과 <그림 14>의 비교)를 해결하는 자신들의 관점(대수적 접근)을 탈피하고 새로운 접근을 시도할 수 있었다. 이러한 접근은 비교활동을 통해 문제 해결을 위한 방향을 설정함으로써 가능한 것으로 보인다. 이러한 사실로 미루어 볼 때, 기존의 상황과 새로운 상황을 비교하는 활동은 두 상황의 차이점을 인식하게 하여 새로운 상황의 해결을 위한 방향 설정에 도움을 제공할 수 있음을 알았다. 그런데 학생 3은 문제 해결에 실패하였지만 학생 4는 문제 해결에 성공하였는데, 이로부터 비교 활동이 문제 해결 방향 설정에 도움이 되는 것은 분명하지만, 문제 해결의 성공 여부를 결정짓는 것은 아님을 알 수 있었다.

이상의 연구 결과를 살펴보면 구조적 유사성의 인식뿐만 아니라 문제의 구성 요소를 나누어 생각하는 분석적 활동 및 두 상황을 비교하는 활동이 유사 문제의 해결에 도움을 제공할 수 있음을 알았다. 이와 같이 근원 문제를 통한 표적 문제의 해결 과정을 도식화하면 <그림 27>과 같다.



<그림 27> 표적 문제의 해결 과정

따라서 현장에서 수학을 가르치는 교사는 <그림 27>에 제시되어 있는 과정을 충분히 인지하여 표적 문제의 해결을 위해 유사 문제와의 구조적 유사성, 분석적 활동 그리고 비교 활동에 초점을 맞추어 문제의 해결을 지도하는 노력이 필요하다. 뿐만 아니라 문제 해결력을 강화하는 방법으로서의 구조적 유사성, 분석적 활동, 비교 활동에 대한 교수 학습 프로그램을 개발하는 후속 연구가 요구된다.

한편, 본 연구에서는 표적 문제의 해결을 위해 유사 문제로부터 문제 해결에 필요한 세 가지 즉, 구조적 유사성, 분석적 활동 그리고 비교 활동의 관점에서 분석하였으나, 이들 요소 이외에 다양한 요소가 있을 수 있으며 그 요소들의 역할을 탐구하는 후속연구도 필요하다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2007). 초등학교 교육과정 해설(IV): 수학, 과학, 실과. 교육과학기술부.

박현정 · 이종희 (2006). 중학생들이 수학 문장제 해결 과정에서 구성하는 유사성 분석. 대한수학교육학회지 수학교육학연구, **16(2)**, 115-138.

이종희 · 김진화 · 김선희 (2003). 중학생을 대상으로 한 대수 문장제 해결에서의 유추적 전이. 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육>, **42(3)**, 353-368.

이종희 · 이진향 · 김부미 (2003). 중학생들의 유추에 의한 수학적 문제 해결 과정 : 사상의 명료화를 중심으로. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **16**, 245-267.

전영배 · 노은환 · 강정기 (2010). 유사 문제 해결에서 구조적 유사성의 인식. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> (투고중)

Bassok, M. (1990). Transfer of domain-specific problem-solving procedures. *Journal of Experimental Psychology: Learnging, Memory and Cognition*, **16(3)**, 522-533.

Bassok, M. (1997). Two types of reliance on correlations between content and structure in reasoning about word problems. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Anaogies, metaphors, and images* (pp.221-246). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Bassok, M., & Holyoak, K. (1993). Pragmatic knowledge and conceptual structure: Determinants of transfer between quantitative domains. In D. K. Detterman & R. J. Sternberg (Eds.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition, & instruction* (pp.68-98). Norwood, NJ: Ablex.

Chi, M. T. H., Glaser, R., & Rees, E. (1982). Expertise in problem solving. In R. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence* (pp.7-75). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Chinnappan, M. (1998). Schemas and mental model in geometry problem solving, *Educational Studies in Mathematics*. **36(3)**, 201-217.

Clfareill, V. (1993). Representation processes in mathematical problem solving. Paper presented at Annual Meeting of the American Educational Research Association Atlanta, Georgia.

ED365522.

Dooren, W. V., Verschaffel, L., & Onghena, P. (2002). The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra word problems, *Journal for Research in Mathematics Education,* **33(5)**, 319-351.

Gentner, D., Rattermann, M. J., & Forbus, K. D. (1993). The roles of similarity in transfer: Separating retrievability from inferential soundness. *Cognitive Psychology,* **25(4)**, 524-575.

Greeno, J. G., Moore, J. L., & Smith, D. R. (1993). Transfer of situated learning. In D. K. Detterman & R. J. Sternberg (Eds.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition, and instruction* (pp.99-167). Norwood, NJ: Ablex.

Lawson, M. J., & Chinnappan, M. (2000). Knowledge connectedness in geometry problem solving, *Journal for Research in Mathematics Education,* **31(1)**, 26-43.

Lobato, J. (1997). *Transfer reconceived: How 'sameness' is produced in mathematical activity.* Unpublished doctoral dissertation, University of California, Berkeley.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Polya, G. (1997). 어떻게 문제를 풀 것인가?. (우정호 역), 서울: 천재교육 (원저는 1986년 출판).

Polya, G. (2003). 수학과 개연추론 I 권 : 수학에서의 귀납과 유추, (이만근, 최영기, 전병기, 홍갑주, 김민정 역), 서울: 교우사 (원저는 1973년 출판).

Reed, S. K. (1993). A schema-based theory of transfer. In D. K. Detterman & R. J. Sternberg (Eds.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition, and instruction* (pp.39-67). Norwood, NJ: Ablex.

Wagner, J. F.(2003). *The Construction of similarity: context sensitivity and the transfer of mathematical knowledge.* Unpublished doctoral dissertation, University of California, Berkeley.

The Roles of Structural Similarity, Analytic Activity and Comparative Activity in Stage of Similar Mathematical Problem Solving Process

Roh, Eun Hwan

Department of Mathematics Education, Chinju National University of Education, Jinju 660-756, Korea

E-mail : ehroh@cue.ac.kr; idealmath@gmail.com

Jun, Young Bae

Department of Mathematics Education, Gyeongsang National University, Jinju 660-701, Korea

e-mail : skywine@gmail.com; http://www.skywine.blogspot.com

Kang, Jeong Gi

Annam Middle School, Chang-Won 641-805, Korea

E-mail : jeonggikang@gmail.com

It is the aim of this paper to find the requisites for the target problem solving process in reference to the base problem and to search the roles of those. Focusing on the structural similarity, analytic activity and comparative activity in stage of similar mathematical problem solving process, we tried to find the roles of them. We observed closely how four students solve the target problem in reference to the base problem. And so we got the following conclusions.

The insight of structural similarity prepare the ground appling the solving method of base problem in the process solving the target problem. And we knew that the analytic activity can become the instrument which find out the truth about the guess. Finally the comparative activity can set up the direction of solution of the target problem. Thus we knew that the insight of structural similarity, the analytic activity and the comparative activity are necessary for similar mathematical problem to solve.

We think that it requires the efforts to develop the various programs about teaching-learning method focusing on the structural similarity, analytic activity and comparative activity in stage of similar mathematical problem solving process. And we also think that it needs the study to research the roles of other elements for similar mathematical problem solving but to find the roles of the structural similarity, analytic activity and comparative activity.

* ZDM Classification : D51

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50

* Key Words : Mathematical problem solving process, The target problem, The base problem, Insight into an structural similarity, Analytic activity, Comparative activity.