韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2011. 02. 제 50권, 제 1호, 27-40.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
February. 2011, Vol. 50, No. 1, 27-40.

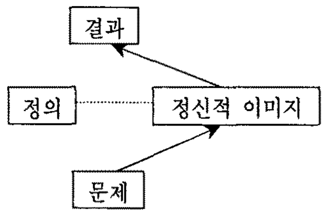
점, 선분, 각에 대한 초등교사의 인식분석에 따른 내용학적 고찰

최 근 배 (제주대학교)
김 해 규 (제주대학교)
김 대 진 (제주북초등학교)

I. 서 론

기하는 학교수학에서 다루는 주요 학습 영역 중 하나이다. 그 이유는 수와 더불어 오랜 역사를 지닌 수학의 한 분야로, 우리 주변의 상황을 시각적·직관적으로 인식하고 표현하는 데 도형이 가장 유용한 수단 중의 하나이기 때문이다. 또 다른 이유 중 하나는 기하적인 개념과 공간 감각이 좋은 학생은 수의 개념과 측정의 개념뿐만 아니라, 다른 상급의 수학 주제를 배우는데 더 유리하기 때문이다(NCTM, 1989, 2000).

따라서 학교수학에서 도형을 어떻게 다루고 있는가?는 중요한 교육적 연구문제가 될 수 있다. 특히, 도형을 직관적·활동적으로 취급하는 초등수학에서는 도형을 취급하는 방법의 문제가 학생의 개념이미지[1](concept image; Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1983; Tall, 1991) 형성에 지대한 영향을 끼친다고 볼 수 있다. 일반적으로, 교사들은 개념정의(concept definition; Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1983; Tall, 1991)를 통하여 주어진 문제의 답을 산출하도록 이상적인 과정을 요구한다. 그러나 일반적으로 학생에게서 일어나는 실제적 문제해결과정은 <그림 I-1>과 같이 개념정의 보다는 정신적 이미지에 의하여 결과를 도출하는 경향을 띠며, 특히, 저학년 일수록 이러한 현상이 두드러지게 나타난다. 이는 도형과 관련된 비언어적인 시각적 표상 또는 경험이 언어적 설명보다 앞서기 때문이다. 결국, 이러한 문제는 학교수학에서의 정의 수준(조영미, 2001)과도 밀접한 관계가 있다.



<그림 I-1> 학생의 직관적 문제해결 과정

초등학교에 주어지는 문제의 대부분은 포괄적으로 획득한 정신적 이미지만을 적용해도 성공할 수 있고, 교사들은 학생들이 개념을 잘 형성했다고 오판할 가능성이 있다. 특히, <그림 I-1>에서 도형과 관련된 정신적 이미지는 도형에 대한 '시각적 표상' 또는 '도형을 어떻게 취급하고 다루는가?' 또는 '도형과 관련하여 어떤 학습활동을 하였는가?'와 같은 경험적 사실에 따라서 많은 영향을 받을 수 있다.

이 논문에서는 고진아(2009)의 초등학교 대상으로 한 학생들의 도형에 관한 인식도와 관련된 설문에서 다수의 학생들이 '점', '선분', '각'을 도형으로 인식하지 않는 경향이 있다[2]는 결과에 대한 원인 분석 및 해결책을 논의할 목적으로, 초등학교 교사 24명을 대상으로 기초 도형(점, 선분, 각)과 관련된 과거 경험적 사실과 일반적 관념을 조사·분석하고, 이로부터 내용교수지식(Pedagogical Content Knowledge) 중에서 교과 내용 지

* 접수일(2010년 10월 20일), 수정일(2010년 11월 19일), 게재확정일(2011년 2월 10일)
* ZDM분류 : B52, D72
* MSC2000분류 : 97D70, 97B50
* 주제어 : 점, 선분, 각, 합동
* 이 논문은 2009학년도 제주대학교 교육대학 및 초등교육연구소의 지원에 의해서 연구되었음

1) 개념과 관련된 용어를 보거나 들을 때 우리의 기억이 자극을 받아 떠오르는 정신적 이미지로 시각적 표상, 인상이나 경험적 집합체로 볼 수 있다.

2) 설문의 방법은 단순히 '다음 중 도형을 모두 찾아보세요.' 라는 문항으로 제시하고 있다.

식과 이를 다루는데 요구되는 방법적 지식을 중심으로 논의 하고, 교육적 시사점을 얻고자 한다.

II. 연구방법

1. 연구대상

기초도형(점, 선분, 각)과 관련된 초등교사의 인식도 분석을 위하여, 제주도 지역 초등수학교과 연구회 회원들 중 24명을 설문대상으로 선택하였다. 수학교과 연구회 회원을 대상으로 선택한 이유는 설문의 효율성과 설문문항에 대한 반응의 다양성을 위해서이다. 즉, 설문의 문항구성이 주로 수학내용학적인 지식과 연관된 내용으로 구성되었기 때문에, 설문에 대한 응답비율이 일반교사집단보다는 수학에 관심이 높은 수학교과연구회에 속한 교사집단이 높을 것이라는 점과 응답반응 또한 다양할 것이라는 점을 고려하였다. 또한 설문문항은 기초도형의 인식도 분석을 위한 것과 논의를 위한 문항으로 구성하였다.

초등학생 다수가 기초도형을 도형으로 인식하지 않는 경향이 있다는 사실(고진아, 2009)에 대한 실제적 논의를 위하여 7차 교육과정 초등수학교과서의 도형관련 영역과 비교를 위한 미국 초등수학교과서의 일종인 Hartcourt Math(Maletsky, Evan M. et al., 2002) 등을 주된 연구대상으로 삼았다.

2. 연구절차

연구의 절차는 다음과 같은 단계로 하였다.

먼저, 제주도 지역 초등수학교과 연구회 정기모임에 참석한 회원을 대상으로 설문을 한다.

둘째, 다수의 초등학교 학생들은 '점', '선분', '각'을 도형으로 인식하지 않은 경향이 있다는 것에 대하여, 교사 설문반응을 통해서, 초등교사 관점의 원인분석과 그 해결책을 분석한다.

세째, 원인분석에 대한 논의를 위하여 먼저, 초등교과서에서의 기초도형(점, 선분, 각)을 다루는 관점에 대하여 Hartcourt Math와 비교 분석 한다. 그 후, 정의 수준과 인지수준, 도형을 취급하는 관점을 중심으로 논의한다. 특히 도형을 취급하는 관점은 교과과정, 같음과 동치, 합동, 공간감각 기르기와 합동의 관점을 중심으로 분석 논의한다.

III. 기초 도형에 대한 초등교사 인식도 분석

초등학교 대상으로 한, 고진아(2009)의 연구에서 다수의 학생들이 '점', '선분', '각'을 도형으로 인식하지 않는 경향이 있다는 사실을 보여주고 있다. 이러한 사실과 관련하여, 초등교사 관점에서의 원인 분석과 해결책을 알아보고자 한다. 이를 위하여 다음과 같은 설문 문항을 택하였다.

설문 문항: 일부 초등학교 학생들은 '점', '선분', '각'을 도형으로 인식하지 않은 경향이 있다고 한다. 이러한 현상이 발생하는 이유가 무엇 때문이라고 생각합니까? 그리고 그 해결책을 기술하시오.

1. 원인 분석

초등학교 학생들의 기초 도형을 도형으로 인식하지 않은 경향에 대한 교사 24명의 원인 분석은 <표 III-1>과 같다.

이 표에 의하면, 원인은 크게 6개의 범주로 나타났고, 중복된 반응도 다수 나타났음을 알 수 있다. 또한 학습경험 또는 시각적 경험을 가장 큰 요인으로 간주하고 있다.

가. 경험

24명의 교사 중에서 11명(46%)이 '경험'을 그 원인으로 보고 있다. 실제로, <표 III-1>를 살펴보면, 초등학교 학생들의 기초 도형을 도형으로 인식하지 않은 경향에 대한 원인으로 '경험'을 첫 번째 요인으로 보고 있음을 알 수 있다. 여기서 말하고 있는 경험이란 '학습경험', '생활 주변에서의 경험' 등을 의미한다.[3)]

---

3) 3명의 교사는 활동 위주의 학습 환경 및 주변에서 자주 접하는 수학적 도형과 관련된 경험이 도형은 '면'을 가지고 있어야 한다는 인식을 학생에게 줄 수 있다는 점을 원인으로

<표 Ⅲ-1> 기초 도형을 도형으로 인식하지 않은 경향에 대한 교사 24명의 원인 분석

원인	명(중복허용)
경험(학습, 시각적)	11
교과 과정	6
도형의 일부(구성요소)	5
교사의 인식 부족	5
닫힌곡선	5
도형의 정의 문제	2
무응답	1

나. 교과 과정

24명의 교사 중 6명(25%)이 교과과정을 원인으로 보고 있는데, <표 Ⅲ-1>에 의하면, 학생들이 기초 도형을 도형으로 인식하지 않은 경향에 대한 원인으로 '교과과정'을 두 번째 원인으로 보고 있음을 알 수 있다.

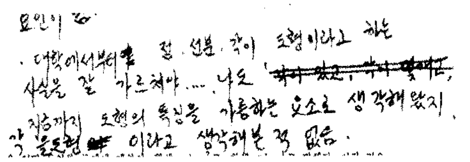
주로 이 범주의 교사들은 교과과정에 이러한 내용과 관련된 언급이 없음을 그 원인으로 보고 있다. 또한 2명의 교사는 교과서 내용의 도입순서[4]에 그 원인을 찾고 있다.

다. 도형의 일부

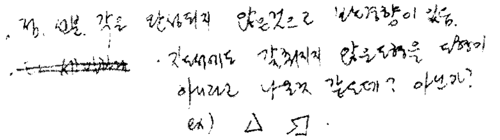
기초 도형(점, 선분, 각)을 단지 도형을 이루는 구성요소 만으로 취급하고, 이를 수학적 도형의 범주로 생각하지 않는다는 관점으로 그 원인을 파악하고 있다. 실제로, 24명 중 5명의 교사(21%)가 도형의 구성요소적인 관점을, 초등학교 학생들이 기초 도형을 도형으로 인식하지 않은 경향에 대한, 원인으로 보고 있다.

라. 교사의 인식

<표 Ⅲ-1>에서 '교사의 인식 부족' 범주는 도형과 관련된 교사의 인식 문제로, 반응은 주로 '이와 같은 관점으로 생각을 해 본 적이 없다'는 것이고(<그림 Ⅲ-1> 참조), 특히 1명의 교사는 '기초도형(점, 선분, 각)을 도형이 아니다'는 관점을 취하고 있다(<그림 Ⅲ-2> 참조).


요인이
· 대학에서부터 점. 선분. 각이 도형이라고 하는 사실을 잘 가르쳐야.... 나도
지금까지 도형의 특성을 가름하는 요소로 생각해 왔지,
점. 선. 각을 도형 이라고 생각해 본 적 없음.

<그림 Ⅲ-1> 교사 인식 1


· 점. 선분. 각은 완성되지 않은 것으로 보는 경향이 있음.
· 지식에서도 갖춰지지 않은 도형은 도형이 아니라고 나온 것 같은데? 아닌가?
ex)

<그림 Ⅲ-2> 교사 인식 2

마. 닫힌곡선

도형이란 '둘러싸인 것', '닫힌 것'이라는 학생들의 고정관념을 그 원인으로 보고 있다. 이와 같은 고정관념은 학생들이 쉽게 접하는 도형과 관련된 경험의 산물로 볼 수 있다.

바. 도형의 정의

2명의 교사가 '도형의 정의'를 그 원인으로 보고 있다. 이 두 교사의 실제적인 응답은 다음과 같다.

· 약속하기에서 정확히 짚고 넘어가지 않기 때문에. '~형'(삼각형, 사각형, …)으로 끝나지 않기 때문에.
· … 저 스스로도 정확히 도형에 대한 정의를 내리기 어려운 것 같습니다.

2. 해결책

초등학교 학생들의 기초 도형을 도형으로 인식하지 않은 경향에 대한 교사 24명의 해결책은 <표 Ⅲ-2>와 같다. 이 표에 의하면, 주로 약속하기와 학습의 방법을 그 해결책으로 제시하고 있다. 또한 29%(24명 중 7명)의 교사는 적절한 반응을 보여 주지 못하였다.

교사 설문에서 무반응 29%를 포함하여 전반적으로

보고 있다. 즉, 면의 유·무로 도형인지 아닌지를 판단한다는 관점을 그 원인으로 보고 있다.

4) '시각적 이미지에서 구성성분'이라는 반힐의 수준이론 관점의 초등 교과서 도형 도입순서를 그 원인으로 보고 있다. 아마도 도형인식에 있어 구성성분보다는 전체적인 시각적 이미지의 영향을 더 크다는 관점을 그 원인으로 보고 있는 것 같다. 이러한 점은 '경험'의 범주와도 중복된다고 볼 수 있다.

적절한 해결책으로 보여 주지 못하고 있음을 보여 주었다.

<표 III-2> 기초 도형을 도형으로 인식하지 않은 경향에 대한 교사 24명의 해결책

해결책	명
약속하기	6
학습	10
도형 아님(<그림 III-2 참조>)	1
무응답	7
	N=24

가. 약속하기

앞선 설문 문항에 대하여, 이 범주에 속한 교사의 해결책은 주로 약속하기 방식을 취하였다. 이를 테면, 단순히 '점, 선분, 각은 도형이다.' 1명의 교사는 수학적 '도형'의 정의를 명확히 하는 해결책을 제시하였다.

나. 학습

학습을 통해서 학생으로 하여금 점, 선분, 각을 도형으로 인식하도록 해야 한다는 점을 강조 하고는 있지만, 학습 방법에 대한 구체적인 대안이 없었다. 또한 1명의 교사는 다음과 같은 특이한 해결책을 제시하고 있다.

- 도형은 '면'을 가지고 있다는 인식을 하고 있기 때문에 넓이의 개념을 다시 제시할 필요가 있음5)

IV. 초등교과서 분석 및 논의

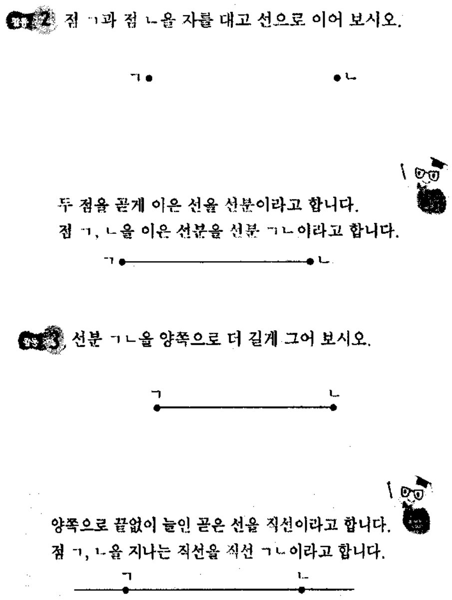
앞선 초등학교 학생들이 기초 도형을 도형으로 인식하지 않은 경향에 대한 교사 24명의 원인 분석과 그 해결책에 나타난 결과에 대한 교육적 논의의 핵심은 크게 보면 결국 교과과정 상에서의 학습 경험이나 방법에 따라 파생된 문제, 초등교사의 기초 도형을 보는 인식의 문제로 귀착된다(<표 III-1>과 <표 III-2> 참조).

도형영역에서의 학습은 다른 영역에 비해 '시각적 이미지' 또는 '정신적 이미지'에 많은 영향을 받는다. 따라서 도형을 어떠한 관점으로 배우고 다루었는가와 같은 학습경험을 살펴보는 것이 논의의 핵심이 되어야 한다. 이를 위해서, 먼저 초등 수학교과서 기초 도형 영역을 분석하고, 기초 도형의 정의 수준과 인지수준 및 도형을 취급하는 관점에 대하여 논의한다.

1. 초등교과서 내용 분석

가. 점과 선분

모든 도형정의에 밑바탕이 되는 용어는 '점(point)', '직선(straight line)', '평면(plane)'인데, 일반적으로 무정의 용어(undefined terms; Hilbert 공리계)로 취급하며 수학적인 정의대신 설명의 방식으로 그 의미를 전달한다. 따라서 이러한 용어를 도입할 때 생각해야 중요한 점은 '설명'과 '표현'의 문제이다.



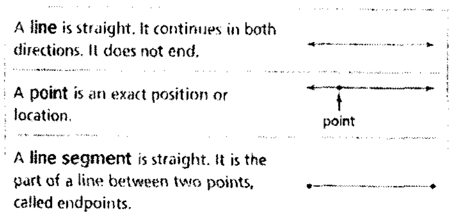
<그림 IV-1> 선분과 직선(교육과학기술부, 2008, p. 33)

(개정) 7차 초등 수학교과서에서는 초등학생의 인식수준에 맞게 추상적인 개념의 일반적인 설명보다는 직관

5) 이를 유추하면, '면=넓이'를 가지고 있지 않는 것은 도형이 아니다. '넓이가 없다'와 '넓이가 0이다'는 두 관념의 문제를 이야기하고 있다.

적인 관점 또는 시각적 표현으로 그 용어를 도입하고 있다. 구체적으로 살펴보면, '점'은 용어에 대한 설명 없이 시각적 표현의 관점에서 점(dot; ·)으로 도입하고, 이로부터 선분을 그 후 직선을 도입하고 있다 (<그림 IV-1> 참조).

반면, 미국 교과서 (Harcourt Math)의 도입방식(<그림 IV-2> 참조)은 우리의 경우보다 좀 더 수학적인 도입 방식을 보여주고 있다.



<그림 IV-2> 점, 선과 선분(Maletsky et al., 2002; Harcourt Math, Math-Grade 3, p. 300)

여기서 우리의 경우에 수학적 개념의 용어인 'point'와 그 시각적 표현(기호)인 'dot'을 모두 '점'이라는 용어로 혼용하고 있음을 교수학적 관점에서 상기할 필요가 있다. 실제로, 초등 수학교과서에서 점이라는 용어를 많이 사용하고 있지만 이에 대한 개념적 설명인 'point' 또는 'position'의 의미가 없이 표현(dot)만 사용하고 있음을 염두에 두어야 한다.

초등수학교과서에서는 "점"이라는 용어를 설명 없이 시각적 표현(dot; •)으로만 도입하고 있습니다. 이에 대해 어떻게 생각하십니까?

① ___지금처럼 시각적 표현으로만 도입해도 별 문제가 없다.

② ___점의 본래 의미인 공간에서의 장소 또는 위치의 의미(point, position, location)도 설명해주어야 한다.

③ ___시각적 표현과 위치적 의미를 알 수 있도록 점에 대해서 교과서에 설명되어야 한다.

④ ___깊이 생각해 본적이 없다.

⑤ ___기타(   )

<그림 IV-3> 점을 보는 관점에 관한 설문

실제로, 최근배 · 오숙경(2008)의 초등교사 80명을 대상으로 한 설문(<그림 IV-3> 참조)에서 ③번을 택한 교사(30명), ②번을 택한 교사(26명)으로 수학적인 의미의 설명을 강조하고 있는 반면, 지금과 같이 시각적 표현으로 만으로 도입하여도 무방하다는 교사의 수는 12명이고 또한 위에서 논의 한 관점에 대하여 생각해본 적이 없다는 교사도 11명으로 나타났다. 이러한 교사의 기본도형을 보는 관점은 결국 학생들의 기본 도형과 관련된 개념 이미지 형성에 많은 영향을 줄 수 있다.

직선과 선분의 도입방식은 논리적인 관점보다는 초등학생의 '인식수준'을 따르고 있는 것처럼 보인다(<그림 IV-1> 참조). 즉, 사전적의미로 선분이라는 용어는 '(직)선의 부분'을 의미하고 있으므로 직선이 먼저 도입되고 그 후 선분의 용어가 약속되어야 한다(<그림 IV-2> 참조).[6]

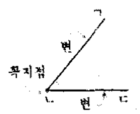
한편, 고진아(2009)의 초등학교 대상으로 한 학생들의 도형에 관한 인식도와 관련된 설문에서 점을 도형으로 생각한다는 학생은 21%였고, 선분을 도형으로 생각한 학생은 4.9%에 불과 하였다.

나. 각

우리의 경우 초등에서의 '각'과 관련된 정의는 <그림 IV-4>와 같이 '한 점에서 그은 두 직선으로 이루어진 도형'으로 도입하고 있으나, 고진아(2009)의 초등학교 대상으로 한 학생들의 도형에 관한 인식도와 관련된 설문에서 각을 도형으로 생각한 학생은 8.4%에 불과 하였다.

한 점에서 그은 두 직선으로 이루어진 도형을 각이라고 합니다.

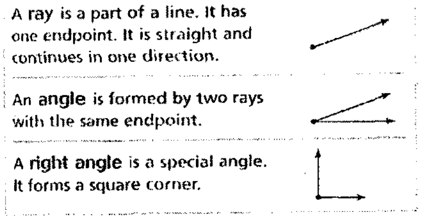
그림에서 점 ㄴ을 각의 꼭지점이라 하고, 두 직선 ㄱㄴ, ㄴㄷ을 각의 변이라고 합니다. 또, 이 각을 각 ㄱㄴㄷ이라고 합니다.



<그림 IV-4> 각(교육부, 2007, p. 33)

반면, 미국의 경우는 '사선(ray)'을 이용하여 정의하고 있다(<그림 IV-5> 참조).

6) 실제로, 우리의 경우는 생활에서 알아보기를 통해서 '곧은 선'과 '굽은 선'을 구별하는 활동을 하고 직선과 선분을 도입하고 있다. 따라서 우리의 경우 직선의 부분이라는 관점에서 본다면 선분의 실제적 용어는 직(곧은)선분(straight line segment)이 타당할 수 있다(최근배 · 오숙경, 2008).



<그림 IV-5> 점, 선과 선분(Maletsky et al., 2002; Harcourt Math, Math-Grade 3, p. 301)

일반적으로, 우리의 경우는 도형을 미국의 경우보다 좀 더 직관적으로 다루고 있음을 알 수 있다. 여기서 우리가 고려해야 할 점은 미국의 경우는 우리와는 달리 기호의 도입과 표현을 도형의 도입과 동시에 다루는 것이 아니라 다음 학년에서 다루는 나선형 방식을 취하고 있다는 것이다.

2. 교사의 인식분석에 따른 내용학적 고찰

가. 정의 수준과 인지 수준

우정호·조영미(2001) 및 조영미(2001, 2002)는 van Hieles의 기하학습 수준이론과 Freudenthal의 수학적 언어수준 이론을 바탕으로 학교수학에 제시된 정의의 수준을 전(前)수학적 수준, 기술적 수준, 대상기호를 사용하는 수준, 관계기호를 사용하는 수준, 함수언어를 사용하는 수준의 5수준으로 설정하고 있다. 이 중에서 초등학교 수학과 관련된 수준은 0수준과 1수준에 해당한다.

제 0수준은 전(前)수학적 수준으로 일상적 의미를 대응시키는 단계로, 외형을 지시, 동의어 사용, 이미지나 행동을 연상하도록 묘사하는 방법이다. 이 수준은 도형의 도입시기에 해당하는 '경험적 추상화'의 수준으로 볼 수 있다.

제 1수준은 용어를 정의하는 데 성질이나 관계를 기술하는 성격의 문장을 사용한다. 이 수준은 van Hieles의 기하 학습 수준 중에서 도형의 구성 요소와 성질에 대한 비형식적 분석을 통해 도형을 파악하는 제 1수준에 대응한다고 볼 수 있다. (개정) 7차 교육과정 초등수학 교과서에서는 2학년부터의 정의(약속하기)가 이 수준에 해당되며, 비로소 도형에 대한 일반적인 수학적용어가 도입된다.

조영미(2001)는 제 1수준은 다시 두 단계로 구분하고 있다. 제 0수준의 시각적 특성이, 기술된 성질과 관계가 동시에 사용되어 정의되는 단계로, 이를 1a수준(<그림 IV-1>과 <그림 IV-4> 참조)으로, 또한 순전히 기술된 성질과 관계만으로 정의하는 단계로, 이를 1b수준[7]으로 분류하고 있다.

도형과 관련된 용어를 정의함에 있어, 초등의 경우, 대부분의 1수준 정의는 학생들의 인지적 부담을 고려한 1a수준으로 그 정의를 도입한다. 이 경우 도형에 대한 개념이미지 형성에 인지적 부담을 고려한 0수준으로 제시된 '시각적 이미지'가 언어적으로 기술된 정의의 '설명항' 보다 많은 영향을 끼친다. 예를 들어, <그림 IV-4>에서 각을 '한 점에서 그은 두 직선으로 이루어진 **도형**'으로 도형이라는 류(類)안에서 설명하고 있지만 오히려 시각적 이미지 또는 자신의 과거 학습경험(<표 III-1> 참조) 등이 영향을 더 끼친다. 실제로, 고진아(2009)의 설문에 의하면 각을 도형으로 인식하지 않는 학생들이 많음을 알 수 있다.

나. 도형을 취급하는 관점

1) 교과과정

기초도형(점, 선분, 각)의 경우는 일반적으로 기하적인 도형을 정의하기 위한 도구적 이미지가 강하며, 이러한 것이 학생들이 기초도형을 도형으로 인식하지 않는 원인 중에 하나이다(<표 III-1> 참조). 예를 들어, 삼각형은 '세 개의 선분으로 둘러싸인 도형'으로 정의하고 있는데 여기서 선분은 학생들에게 도형이라는 이미지보다는 삼각형이라는 도형을 정의하기 위한 도구로 인식되기 쉽다. 또한 우리의 경우 각을 다룰 때, 각이라는 도형의 범주에서 직각, 예각, 둔각을 동시에 취급하는 것이 아니라, 3학년에서 직각삼각형, 직·정사각형을 다루는 수단으로 직각을 도입하고, 4학년에서 예각삼각형과 둔각삼각형을 취급하기 위한 도구로 예각과 둔각이 도입되고 있음에 주목할 필요가 있다.

7) 예를 들어, '직육면체에서 밑면과 수직인 면을 옆면이라고 한다.'라는 정의는 옆면을 밑면과의 관계를 통해서 정의 한 것(조영미, 2001).

2) 같음과 동치

'동치(equivalent)'는 '같음(equal)'의 일반화로 수학분야에서 가장 많이 취급하는 수학적 개념이다. 특히, 분류의 문제를 다룰 때 기준이 되는 관념이 바로 이 동치개념이다. 실제로, 동치관계는 사물의 분류에 있어서 만족해야 할 최소한의 수학적 기준으로 반사적, 대칭적, 추이적인 이항관계를 의미한다.

일반적으로 두 개념 '동치'와 '같음'을 혼용하여 사용하는 경우가 많지만, 경우에 따라서는 수학적 개념형성을 위하여 정확한 사용이 필요할 경우가 있다. 이를테면, 동치분수 개념, 도형의 합동 등이 있다.

동치분수 개념과 관련하여 다음과 같은 문제를 초등교사 24명에게 제시하고 결과를 분석하였다. 이 분석의 목적은 교사의 과거 학습 경험을 통해서 형성된 관념의 영향을 분석하는 것이다. 실제로, 교사에게 무의식적으로 형성된 수학적 관념은 학생에게 많은 영향을 끼친다.

설문 문항: 어떤 동일한 문제에 대하여, 학생 A는 $\frac{2}{4}$로, 학생 B는 $\frac{1}{2}$로 답했다. 이런 경우 당신이 채점을 해야 할 상황이라면 어떻게 하겠습니까? 그 이유는 무엇입니까?

위의 문항이 '분수'의 개념(정의)으로 답하는 문제라면 두 학생의 답은 서로 다르다. 이유는 원래 분수의 정의[8]는 수라기 보다는 어떤 상태 또는 관계(정은실, 2006)를 말하며, 크기라는 관념이 드러나 있지 않기 때문이다. 반면 '크기'의 개념으로 답하는 문제라면 두 학생 모두 정답으로 볼 수 있다.

초등교사 24명의 응답 결과는 <표 IV-1>과 같다.

<표 IV-1> 분수를 보는 관점

문제해석	명
크기	18
분수	0
분수, 크기	5
무응답	1
	N=24

<표 IV-1>을 보면, 24명 중 18명(75%)의 교사가 분수와 관련된 이미지와 관련하여, 분수의 정의 (각주 8 참고)와는 무관하게 크기의 관념을 무의식적으로 가지고 있는 것 같다. 아마도 이러한 현상은 과거에 학습한 '유리수 관념'이 분수의 개념(정의)형성에 영향을 끼치고 있다고 볼 수 있다.

특히, 수의 경우와는 달리 도형의 경우에는 공간상의 위치적 관념을 고려해야 하지만, 동치개념으로 도형을 다루지 않은 경우가 흔하다. 예를 들어, 서로 다른 위치에 있는 반지름의 길이가 같은 두 원에 대하여, 두 원을 동치(합동)의 관념으로 보기보다는 같은 원으로 취급하는 경향이 있다. 즉, 기하적인 상황(합동: 동적)을 수에서의 상황(수치화(크기): 정적)으로 변환하여 취급하는 경향이 있다 (<표 IV-2> 참조).

실제로, <표 IV-1>과 <표 IV-2>에서와 같이 우리는 습관적으로 특별한 문제가 없다면 '동치'보다는 '같다'라는 용어를 선호하는 경향이 있다. 이러한 일종의 과거 학교수학에서 형성된 무의식적인 관념은 활동적인 수학을 중시하는 초등학교에서는 교사가 교육적인 면에서 두 가지 상황 모두를 의식적으로 고려해야 할 필요가 있다.

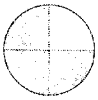
3) 합동

합동은 기하영역에서 도형의 같음과 다름을 결정하는 즉, 두 도형의 상등(같음)을 결정하는, 가장 근본적인 개념이며, 이로부터 모든 기하의 수학적인 개념이 출발된다고 볼 수 있다.

우리의 경우 초등학교 수학 5학년에서 '합동'의 개념을 <그림 IV-6>과 같이 도입하고 있다. 그러나 미국의 경우는 <그림 IV-7>과 같이 2학년에 대칭과 함께 우리보다 빨리 도입하고 있다.

---

8) 분수의 정의(교육인적자원부, 2007)



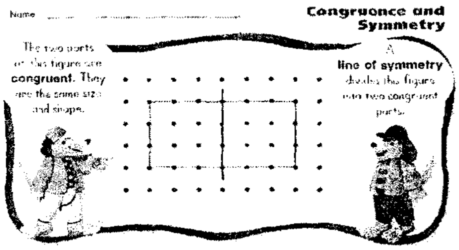
색칠한 부분은 전체를 똑같이 4로 나눈 것 중의 3입니다.

이것을 $\frac{3}{4}$이라 쓰고, 사분의 삼이라고 읽습니다.

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$과 같은 수를 분수라고 합니다.

모양과 크기가 같아서 완전히 포개어지는 두 도형을 서로 합동이라고 합니다.

<그림 IV-6> 합동(교육인적자원부, 2007, p. 37)



<그림 IV-7> 합동과 대칭(Maletsky et al., 2002; Harcourt Math, Math-Grade 2, p. 245)

빠른 시기에 도형의 움직임과 관련된 활동과 더불어 합동의 개념을 도입하는 것이 공간 감각을 기르고 또한 '도형'을 도형의 관점에서 바라보게 하는 것이다. 이를테면, '두 선분이 합동'이라는 사실과 '두 선분의 길이가 같다'는 사실은 동치이다. 그러나 선분을 도형의 영역에서 보면 합동이라는 용어가, 적어도 학교수학의 교육적인 측면에서, 타당하다. 왜냐하면, 선분의 길이가 같다는 관점은 도형의 관점이기보다는 측정의 관점이기 때문이다.

이와 관련하여 초등교사 24명을 대상으로 아래와 설문을 하였다.

설문 문항: 아래에 제시된 두 도형들은 서로 합동이다. 그 이유를 기술하시오.

결과 분석은 <표 IV-2>와 같다.

<표 IV-2> 선분의 합동

반응	명
길이의 같음	8
모양과 크기 같음	5
포개짐	8
무응답	3
	N=24

<표 IV-2>에서 24명 중 8명(33%)의 교사가 길이의 관점으로 합동을 설명하고 있다. 과거 학습경험에 의하면 삼각형의 합동 조건의 경우 교과서뿐만 아니라 교사 대부분이 '선분의 길이'와 '각도'의 관점으로 설명한다. 예를 들어, SSS 합동은 '대응하는 세 변이 합동이다.'보다는 '대응하는 세 변의 길이가 같다.'로 설명한다.

교사를 대상으로 합동과 관계된 이미지를 조사하면 대부분 '삼각형'이 떠오를 것이다.[9] 앞에서 언급한 기초 도형의 합동에 관한 관념은 거의 없다. 이를 테면,

- 모든 점은 합동이다(<그림 IV-8> 참조).
- 두 선분이 합동이다(<그림 IV-8> 참조).
- 두 각이 합동이다

이라는 '도형'의 관점보다 '측정'의 관점으로 다루고 또한 배웠다는 경향이 있다. 즉,

- 두 선분의 길이가 같다.
- 두 각의 크기가 같다.

선분의 길이가 같다고 해서 합동이라고 할 수 있는지 의문이 든다.
모양과 크기가 같은 도형을 변환을 통하여 합동임을 인식하고 있다는 점에서는
합동일 수 있지만... ? 모든 점은 합동인가?
좀 더 고민해봐야겠다. 합동의 정의가 뭘까?

<그림 IV-8> 선분과 점의 합동과 관련된 어느 교사의 고민

<그림 IV-9>에서 네모안의 내용을 보면, 도형으로서의 관점인 '각'의 합동개념 $\angle a \simeq \angle d$ 대신에 측정의 관점인 '각도'의 크기 개념 $\angle a = \angle d$으로 기술하고 있다.

9) 교사 24명을 대상으로 두 사각형의 합동과 관련된 설문에서, 8명(33%)의 교사들은 사각형을 대각선을 기준으로 두 개의 삼각형으로 나눈 후 삼각형의 합동조건을 사용하여 해결하려고 하였다.

오른쪽 그림과 같이 △ABC에서 변 BC를 연장한 직선 CD를 긋고, 점 C에서 변 AB에 평행한 직선 CE를 그어 보자.

이 때, $AB \parallel \overline{EC}$이므로

$\boxed{\angle a=\angle d\text{(엇각)}, \ \angle b=\angle e\text{(동위각)}}$

따라서, △ABC의 세 내각의 크기의 합은

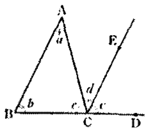
$$\angle a+\angle b+\angle c=\angle d+\angle e+\angle c=180^\circ$$

이다.

위로부터 다음을 알 수 있다.

삼각형의 내각의 크기의 합

삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이다.



<그림 IV-9> 각도와 각의 합동(조태근 외, 2001, p. 109)

실제로, 초등교사 24명을 대상으로 <그림 IV-9>의 박스 안의 내용을 지우고, 내용을 서술하는 설문을 해본 결과 무응답 1명을 제외한 23명의 교사가 도형의 관점인 '각'의 합동개념이 아니라 측정의 관점인 '각도'의 크기 개념으로 답을 하였다.

<그림 IV-10>은 삼각형의 합동을 순수한 도형의 관점에서 취급하는 영문책의 예를 보여주고 있다. 실제로, 외국에서 출판된 책들은 기초 도형들도 측정의 관점보다 합동의 관점으로 서술하는 경향이 많다.

PRINCIPLE 3: (a.s.a. ≅ a.s.a.) *If two angles and the included side of one triangle are congruent to the corresponding parts of another, then the triangles are congruent.*

Thus if $\angle A \cong \angle A'$, $\angle C \cong \angle C'$, and $b \cong b'$ in Fig. 5-4, then $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

<그림 IV-10> 합동(Rich, 1963)

여기서 구성성분으로 선분 및 각을 가지는 몇 가지 도형의 용어 설명을 생각해보자. 우리의 경우[10]는

· 이등변삼각형: 두 변의 길이가 같은 삼각형(4학년)
· 정삼각형: 세 변의 길이가 같은 삼각형(4학년)
· 마름모: 네 변의 길이가 모두 같은 사각형(4학년)
· 정다각형: 변의 길이가 모두 같고 각의 크기가 모두 같은 다각형

와 같이 '선분의 길이'와 '각도'의 관점으로 용어를 설명하고 있다. 이러한 이유는 합동의 개념이 교육과정의 내용편제상 5학년에서 도입되고 또한 도형을 보는 수학에 관한 일반적인 우리의 관념 등이 요인이 될 수 있다. 여기서 말하고 있는 수학에 관한 일반적인 우리의 관념이란 순수수학의 입장에서 만들어진 관념들을 교육적 관점에서의 여과 과정을 거치지 않고 그대로 받아들이는 것을 의미한다. 즉, 동치가 되는 두 수학적 개념들은 순수수학적 입장에서는 같은 것, 따라서 교육적인 입장에서의 선택보다는 이론 전개의 효율성을 따르는 경향이 있다. 예를 들어, 각의 측도를 생각해보면 도(degree)가 라디안(radian)보다 교육적 입장에서 선호되지만 순수 수학적 입장에서는 라디안을 많이 사용한다.

반면, 미국의 경우는 3학년에서는 우리와 같은 측정의 관점으로 용어를 설명하고 있지만, 4학년부터는 주로 합동의 관점으로 용어를 설명하고 있다. 실제로,

· 이등변삼각형: 2개의 합동인 변을 가지는 삼각형
· 등변삼각형(우리의 경우: 정삼각형): 3개의 합동인 변을 가지는 삼각형
· 마름모: 2쌍의 평행한 변과 4개의 합동인 변을 가지는 사변형
· 정다각형: 모든 변이 합동이고, 모든 각이 합동인 다각형(6학년)

1. *Scalene triangle*: A scalene triangle is a triangle having no congruent sides.

   Thus in scalene triangle *ABC*, $a \neq b \neq c$. The small letter used for the length of each side agrees with the capital letter of the angle opposite it. Also, ≠ means "is not equal to."

2. *Isosceles triangle*: An isosceles triangle is a triangle having at least two congruent sides.

   Thus is isosceles triangle *ABC*, $a = c$. These equal sides are called the *legs* of the isosceles triangle; the remaining side is the *base b*. The angles on either side of the base are the *base angles*; the angle opposite the base is the *vertex angle*.

3. *Equilateral triangle*: An equilateral triangle is a triangle having three congruent sides.

   Thus in equilateral triangle *ABC*, $a = b = c$. Note that an equilateral triangle is also an isosceles triangle.

<그림 IV-11> 삼각형 용어설명(Rich, 1963)

<그림 IV-11>은 삼각형의 용어 설명과 관련된 도형의 관점을 중시하는 예를 보여주고 있다.

4) 공간감각 기르기와 합동

여기에서는 앞서 논의한 '학생들이 기초 도형을 도형

10) 중학교의 수학 기하 영역에서의 정의도 측정의 관점으로 설명하고 있다(권석일, 2006, pp. 177-189 <부록 E> 참조).

으로 인식하지 않은 원인 중에 하나가 기초 도형을 기하적인 관점에서 보다 속성을 수치화한 측정의 관점으로 취급하고 있다' 점을 공간감각 기르기 활동의 관점에서 논의한다.

어떤 주어진 도형에서 '필요에 의해서(개념을 단순화하기 위해서)' 그 도형이 지닌 하나의 속성을 수치화하고 나면 그 후의 논의는 도형을 기하의 관점보다는 동치개념인 수의 관점에서만 보게 되는 경향이 있다. 특히, 기하영역에서 기하적인 불변량을 찾게 하는 활동이 중요하다고 볼 때, 학교수학에서는 이러한 점이 문제가 될 수 있다. 이를테면, 하나의 수로 수치화될 수 있는 기하적인 속성은 무엇인가? 와 같은 메타인지를 항상 고려해야만 한다.

전통적으로 우리는 교과서 기하영역의 내용을 구성할 때 주로 유클리드의 원론을 바탕으로 한 논증기하를 중심으로 구성하고 있다. 이러한 이유로 변환기하에 대한 학생들의 감각이 부족하고 교사들 또한 변환기하와 관련된 수학내용학적 지식이 논증기하에 비해서 상대적으로 부족하며 논리적·연역적 증명에 주로 관심을 두고 도형에 대한 감각적 활동과 관련된 내용을 구성하는 문제에 큰 관심을 두지 않는 경향이 있다.

변환기하학적인 접근은 기하적인 사고를 '정적인 것'에서 '동적인 조작'으로 변화시킬 뿐만 아니라, 변환의 합성과 군의 구조에 대한 학습 경험을 제공함으로써 기하와 대수의 구조적인 유사성을 음미할 수 있는 기회를 제공할 수 있다(우정호, 2006b). 이러한 관점에서 동적인 조작을 강조하는 초등학교 수학에서의 공간감각 기르기 활동과 합동과 관련된 내용을 교사의 분석과 함께 논의한다.

두 도형이 '같다'는 말은 일반적으로 두 도형의 '합동'을 의미한다. 즉, 어느 한 도형을 다른 도형으로 보내주는 등거리변환(isometry)이 존재할 때, 두 도형이 합동이다.

학교수학에서 합동의 정의는 <그림 IV-6>에서와 같이 순수수학에서의 정의보다 좀 더 활동적인 방법으로 정의를 도입하고 있다. 따라서 학생들에게 합동의 개념을 기르기 위한 실제적 학습활동이 중시된다. 여기서 중요한 것은 단순히 두 도형을 포개는 활동의 결과로서의 합동개념이 아니라 두 도형을 포개는 활동 중에 일어난 학생의 수학적 행위가 무엇인가를 파악하는 것이 중요하다. 즉, 밀기(slide), 뒤집기(flip), 돌리기(turn) 행위의 적당한 결합으로서의 합동개념 형성이 중요한다. 이를테면,

> "왜 초등학교 교과서에서는 공간감각 기르기 활동의 일환으로 밀기, 뒤집기, 돌리기 활동만을 하는가?"
>
> "합동의 개념과 밀기, 뒤집기, 돌리기 활동은 어떤 연관성을 지니는가?"
>
> "합동의 개념과 공간감각 기르기 활동(밀기, 뒤집기, 돌리기)을 동시에 교수·학습한 경험을 가지고 있는가?"

실제로, 위와 같은 질문을 (예비)교사에게 하면, 반응은 어떠할까? 아마도 이와 같은 생각을 해본 적이 없다는 반응이 많을 것이다. 실제로, <그림 IV-12>와 <그림 IV-13>는 OO교대생 3학년 학생을 대상으로 한 실제적 반응의 예인데, <그림 IV-12>은 합동변환과 공간감각 기르기 활동을 비교적 잘 설명하고 있는 반면, 대다수의 학생들이 <그림 IV-13>과 같이 합동과 초등학교 수학교과서에서의 공간감각 기르기 활동을 관계적으로 인식하지 못하는 반응을 보였다.

8. 7차 교육과정 초등수학교과서에서는 공간감각 기르기 활동으로 밀기(slide), 뒤집기(flip), 돌리기(turn)를 주로 도입하고 있다. 이러한 이유를 변환기하의 관점에서 이를 논하라.

변환기하에서 밀기, 뒤집기, 돌리기는 합동변환에 속한다 합동변환은 길이, 각, 넓이 등이 같게 위치를 변환시키는 것이다 이러한 합동변환이 성립하기 위한 활동으로 밀기, 뒤집기, 돌리기를 들 수 있다 선분의 길이, 각의 크기, 도형의 넓이가 변하지 않도록 변환시키는 것이 이 세가지이기 때문이다 현재 7차 교육과정에서는 구체적 조작 활동이 가능한 합동 변환만을 도입하고 있다 그렇기 때문에 합동변환의 조건을 충족시킬 수 있는 밀기, 뒤집기, 돌리기 활동을 공간감각 기르기의 주된 활동으로 도입하는 것이다

<그림 IV-12> 공간감각 기르기와 합동변환

8. 7차 교육과정 초등수학교과서에서는 공간감각 기르기 활동으로 밀기(slide), 뒤집기(flip), 돌리기(turn)를 주로 도입하고 있다. 이러한 이유를 변환기하의 관점에서 이를 논하라.

초등학생의 경우에는 아직 구체물을 통한 조작활동이 적합한 시기이기 때문에 구체물로 조작 활동이 쉬운 밀기, 뒤집기, 돌리기가 주로 도입되고 있다.

<그림 IV-13> 공간감각 기르기와 합동변환

또한 초등교사 24명을 대상으로 다음과 같은 합동과 공간감각 기르기 활동과의 관계를 묻는 설문을 하였다.

설문 문항: 다음의 두 도형에 대하여,

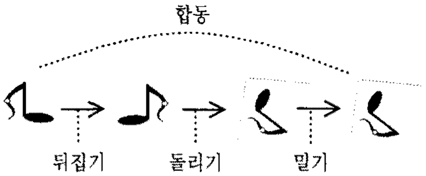
만약 합동이 된다면, 김교사는 5학년 학생들을 대상으로 하여 4학년 때까지 배운 도형영역 학습내용과 연관하여 합동을 설명하려한다. 이 때 당신이 김교사라면 어떻게 설명할 것인지 기술하시오.

분석결과는 <표 IV-3>과 같다.

<표 IV-3> 합동과 공간감과 기르기

반응	명
포개짐(정의)	5
뒤집기	3
뒤집기, 밀기	1
뒤집기, 돌리기	1
무응답	14
	N=24

위의 설문에서 바라고자 한 답은 '어느 한 도형을 움직여서 다른 도형과 포개지게 하는 활동의 과정 중에 일어난 도형의 변환에는 어떤 것들이 있었는가?' 라는 합동변환을 교사가 인식하고 있는지 여부를 알아보고자 하였다. 실제로, 이 경우 밀기, 뒤집기, 돌리기의 세 가지의 변환 모두가 일어나야 두 도형이 포개어 짐을 알 수 있다.



그러나 <표 IV-3>에 따르면 24명 교사 모두 합동변환의 관념이 없음을 알 수 있다. 즉, 4학년 때까지 배운 '공간감각 기르기 활동은 결국 합동변환이다.'라는 사실을 의식하고 있지 못함을 알 수 있다.

(개정) 7차 교육과정 초등학교 수학교과서에서 공간감각 기르기 활동으로 밀기, 뒤집기, 돌리기의 활동을 3학년에 도입하고 있는 반면 합동의 개념은 5학년에서야 비로소 도입하고 있다. 이러한 교과과정상의 내용편재가 합동변환의 관점에서 밀기, 뒤집기, 돌리기의 활동을 보지 못하는 원인 중에 하나라고 볼 수 있다.

<그림 IV-14>는 미국의 경우로, 3학년에서도 합동변환의 범주에서 공간감각 기르기 활동의 일환으로 밀기(slide), 뒤집기(flip), 돌리기(turn)의 활동을 하고 있음을 보여주고 있다.

19 **CONGRUENCE AND SYMMETRY** **330**

Check What You Know 331
1 • HANDS ON Congruent Figures 332
2 Symmetry • HANDS ON Activity 334
3 Similar Figures • HANDS ON Activity 336
4 • HANDS ON Slides, Flips, and Turns 338
5 Problem Solving Strategy: Make a List 340
Chapter 19 Review/Test 342
Standardized Test Prep 343
Intervention: Troubleshooting H25
Extra Practice H50

<그림 IV-14> 합동변환범주에서의 공간감각 기르기 활동(Maletsky et al., 2002; Harcourt Math, Math-Grade 3)

V. 결론 및 제언

이 논문은 고진아(2009)의 초등학교 학생들을 대상으로 한 설문에서 점, 선분, 각을 도형으로 취급하지 않는 경향에 의문점을 갖고, 이에 대한 원인 분석을 위해서 초등교사 24명을 대상으로 설문을 하였다. 이 설문 분석에 따르면, 학생들의 학습경험이나 방법, 교사의 도형을 보는 관점에서 그 원인(<표 III-1> 참조)을 찾고 있으나, 교육적인 측면에서의 명확한 해결책(<표 III-2>)을 제시하지 못하고 있다. 이러한 원인에 대한 해결책을 찾기 위해서, 도형의 정의수준과 인지수준, 도형을 취급하는 관점을 중심으로 그 원인을 분석하고 논의하였다. 특히, 도형을 취급하는 관점에서는 합동과 공간감각 기르기를 중심으로 분석하였다. 논의의 타당성은 주로 초등교사의 설문과 미국교과서(Harcourt Math, 2002)를 사용하였다.

먼저, 도형의 정의수준과 인지수준의 관점에서 원인분석을 요약하면, 초등수학 도형영역에서의 정의수준은 0수준 또는 1a수준으로 시각적 이미지 또는 자신의 학습경험(<표 III-1>참조) 등에 많은 영향을 준다는 것이

다. 결국 이러한 문제는 지식의 '교수학적 변환(didactic transposition; 강완, 1991)'과 관련된 학생의 인지수준 문제로 교사는 이러한 점을 항상 염두에 두어야 한다.

이제, 도형을 취급하는 관점을 중심으로 한 원인분석 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 교과과정의 관점에서 기초도형(점, 선분, 각)은 일반적인 도형을 정의하기 위한 도구적인 성격이 강하다. 따라서 기초도형을 도형의 관점으로 보지 못하는 경우가 발생할 수 있다. 이에 대한 해결책으로 교과과정을 재조직화하는 방법을 고려할 수 있으며, 이는 교육 '전문가'로서의 교사의 능력과 관련된다.

둘째, 우리는 습관적으로 특별한 문제가 없다면, '동치'보다는 '같다'라는 용어를 선호하는 경향이 있다. 도형의 범주에서 같은 것이라는 관념은 실제로 동치를 의미한다. 따라서 초등수준의 교육적인 관점에서는 이 두 가지 상황을 의식적으로 고려해야 할 필요가 있다.

셋째, 합동의 개념은 기학적 논의의 출발점이라고 볼 수 있다. 그러나 우리는 기초도형(점, 선분, 각)을 합동의 관점(도형)보다는 크기(측정)의 관점으로 취급하는 경향이 강하다. 이러한 점이 기초도형을 도형으로 보지 않는 원인 중 하나라고 볼 수 있으며, 교사의 기초도형을 보는 의식의 문제와 밀접한 연관이 있다. 따라서 교사는 과거 자신의 학습경험으로부터 형성되고 습관화된 기초도형과 연관된 의식을 교육적 측면에서 재고할 필요가 있다.

끝으로, 합동의 관념을 변환기하학적으로 해석하는 것은 기하적인 활동의 과정을 중시하는 것이며, 이는 결국 공간감각 기르기 활동과 연관이 있고, 공간감각 기르기 활동을 통해서 기본도형을 도형으로 취급하는 경험을 보다 많이 줄 수 있다.

앞선 분석과 논의를 통하여 교육적인 측면에서 얻을 수 있는 시사점을 요약 제언 하면 다음과 같다.

첫째, 도형을 다룸에 있어서 학교수학에서의 교육적 관점은 인지적 수준 등에 기인하여 순수 수학적 관점과는 많이 다르다. 순수 수학에서는 여러 가지 동치가 되는 개념을 자유롭게 사용할 수 있지만, 교육적 관점에서는 동치가 되는 개념으로의 변형 또는 도구적 이동에 따른 '메타 인지적 이동(meta-cognitive shift; 강완, 1991; 우정호, 2006a, pp. 458-459)'을 항상 염두에 두어야 한다. 예를 들어, 도형을 분류할 때, 그 기준을 도형의 관점으로 할 것인가? 아니면 측정의 관점으로 할 것인가?

둘째, 도형을 보는 우리의 일반적인 관념의 전환이 필요하다. 즉, 순수수학적 관점에서 도형을 바라보는 관점이 교육적 관점에서 도형을 바라보는 것으로의 방향전환이 필요하다. 예를 들어, 각의 관점으로 서술할 것인가? 각도의 관점으로 서술할 것인가? 의 문제는 교육적 입장과 순수 수학적 입장이 다르다.

끝으로, 본고에서는 도형영역에서의 지엽적인 문제를 다루고 있지만, 이를 통해서 전통적으로 형성된 당연하고 무의식적으로 받아들이게 되는 순수수학적 관념을 교육적 관점에서 다시 사고하고 재생산하는 습관을 가지는 계기가 되었으면 한다.

참고문헌

강완 (1991). 수학적 지식의 교수학적 변환, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 30(1), 71-89.

권석일 (2006). 중학교 기하 교재의 '원론' 교육적 고찰. 서울대학교 대학원 박사학위 논문

고진아 (2009). 초등수학 도형영역에 제시된 정의에 관한 학생들의 인식. 제주대학교 교육대학원 석사학위 논문.

교육인적자원부 (2007). 수학 <3-가>, <5-나> 교과서, 서울: (주)대한교과서 주식회사.

교육과학기술부 (2008). 수학 2-1, (주)두산.

우정호·조영미 (2001). 학교수학 교과서에서 사용하는 정의에 과한 연구, 수학교육학연구, 11(2), 363-384.

우정호 (2006a). 수학학습-지도 원리와 방법, 서울대학교 출판부.

우정호 (2006b). 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부.

정은실(2006). 분수 개념의 의미 분석과 교육적 시사점 탐구, 학교수학, 8(2), 123-138.

조영미 (2001). 학교수학에 제시된 정의에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문

조영미 (2002). 수학 교과서에서 사용하는 정의의 특성분석과 수준탐구, 학교수학, 4(1), 15-27.

조태근 외 (2001). 수학 7-나. 서울: 금성출판사.

최근배 · 오숙경 (2008). 초등수학 도형영역에 제시된 정의에 관한 교사의 인식과 오류, <u>한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육></u>, **47(2)**, 197-219.

Maletsky, Evan M. et al. (2002). *Harcourt Math* (Math-Grade 1, 2, 3, 4, 5, 6), Harcourt, Inc.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston, VA., The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. 구광조 · 오병승 · 류희찬 공역 (1992). <u>수학교육과정과 평가의 새로운 방향</u>, 서울: 경문사.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Rich, B. (1963) (revised by Philip A. Schmidt) (2000). Schaum's outlines *Geometry* (3rd Edition), McGraw-Hill Companies, Inc.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, **12(2)**, 151-169.

Tall, D. (1991). <u>고등수학적사고</u>, (류희찬 · 조완영 · 김인수 역). 서울: 경문사.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function, *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, **14**, 293-305.

A Study on the Content Knowledge via Analysis of Elementary Teachers' Cognition about Fundamental Figures(point, line segment, angle)

Keunbae Choi
Dept. of Math. Edu., Teachers College, Jeju National University, Jeju 690-781, Korea
E-mail : kbchoe@jejunu.ac.kr

Kim, Hae Gyu
Dept. of Math. Edu., Teachers College, Jeju National University, Jeju 690-781, Korea
E-mail : kimhag@jejunu.ac.kr

Kim, Daejin
Jejubuk. Elementary School, Jeju 690-808, Korea
E-mail : emath21@naver.com

The purpose of this paper is to analyze and discuss the viewpoint dealing with the fundamental figures-point, line segment, and angle-of elementary school teachers. In fact, our main subjects in this article are as follows; how do elementary school teachers deal with the fundamental figures?, what is the general notion about the fundamental figures of elementary school teachers? Our such subjects come from the survey results about the fundamental figures in J. A. Ko(2009); the elementary school students have a tendency to regard the fundamental figures as not mathematical figures.

In this article, we discuss mainly the meta-cognitive shift in the transform of notion, for example, from 'congruent' concept to 'equal' concept, about the fundamental figures.

* ZDM Classification : B52, D72
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70, 97B50
* Key Words : point, line segment, angle, congruent