韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2011. 02. 제 50권, 제 1호, 1-12.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
February. 2011, Vol. 50, No. 1, 1-12.

유사 문제 해결에서 구조적 유사성의 인식

전 영 배 (경상대학교)
노 은 환 (진주교육대학교)[1]
강 정 기 (창원안남중학교)

Ⅰ. 들어가며

1980년대 문제 해결이 학교 수학의 초점이 되어야 한다는 NCTM의 권고 이후, 문제 해결은 모든 수학 학습의 통합적인 부분으로서 수학 교육의 기본적인 목표 중의 하나로 인식되고 있다. 우리나라에서도 문제 해결은 제4차 수학과 교육과정 이래로 수학 교육의 목표로 강조해 온 사항이며, 개정 교육과정에서도 지속적으로 강조하고 있다(교육과학기술부, 2007).

문제 해결의 중요성이 제기되면서 학생들의 문제 해결력 신장을 위한 다양한 연구들이 있었다(이종희 · 이진향 · 김부미, 2003; 정찬식 · 노은환 2009; Dooren, Verschaffel, & Onghena, 2002; Lawson & Chinnappan, 2000; NCTM, 2000). 특히 Polya(1997)는 '문제의 해결을 발견하는 것은 분리되어 있는 아이디어들 사이의 연결을 찾는 것이다'라고 강조하면서 '가로, 세로, 높이가 주어진 직육면체의 대각선의 길이를 구하라'는 문제에서 학생들은 주어진 문제와 관련된 문제를 생각해내고 보조요소인 보조선을 도입하였음에도 불구하고 문제해결에 더 이상의 진척이 없는 현상에 대하여 '학생의 무감각함을 일깨우는데 충분하지 못한 경우'에 대해서도 대비하여야 한다고 지적하였다.

이것은 주어진 문제와 관련된 유사 문제를 생각해 낸 것만으로는 문제 해결에 도달하지 못할 수도 있음을 의미하고, 관련 문제를 생각해 낸 것이 문제 해결에 결정적 요소로 작용하기 위해서는 문제 해결에 필요한 다른 요소에 대한 인식이 작용해야 한다는 의미를 함의한다. 즉, 표적 문제와 근원 문제 사이의 전이 혹은 상승[2]은 표적 문제에 대한 근원 문제의 회상만으로 이루어지지 않으며, 표적 문제 해결을 위해 두 문제 사이의 연결을 위해 어떤 요소의 인식이 필요함을 알 수 있다. 이러한 점에 주목하여 본 연구는 주어진 문제를 표적 문제(target problem), 표적 문제와 유사한 이전에 풀었던 문제를 근원 문제(base problem)라고 정의하여, 표적 문제에 대한 근원 문제의 회상이 이루어진 이 후의 과정에서 근원 문제의 회상이 표적 문제의 해결로 이어지는 연결고리를 탐구하는 것을 목적으로 한다. 본 연구에서는 표적 문제에 대한 적절한 근원 문제의 회상이 이루어지는 과정에 대해서는 고려하지 않고, 적절한 근원 문제의 회상이 이루어지고 난 이후의 과정에 초점을 맞추어, 근원 문제가 표적 문제의 해결에 결정적 요소로 작용하는데 필요한 문제 해결 요인으로서 구조적 유사성에 대해 살펴보는 것을 연구문제로 설정하였다.

Ⅱ. 유사성

여기에서는 여러 학자들이 분류한 유사성의 유형과 유사성을 바탕으로 한 문제의 분류에 대해 간략하게 살펴볼 것이다.

* 접수일(2010년 9월 27일), 수정일(2011년 1월 22일), 게재확정일(2011년 2월 10일)
* ZDM분류 : D53, G23
* MSC2000분류 : 97D50
* 주제어 : 수학적 문제 해결 과정, 표적 문제, 근원 문제, 구조적 유사성 인식.

1) 교신저자

2) 전이는 자신이 이미 알고 있는 기저 지식을 바탕으로 같은 종류의 지식(대상)에 대한 적용을 의미하고, 상승은 고차원의 대상에 자신이 알고 있는 것을 적용하는 것을 의미함. 이 내용은 심사자의 조언으로부터 보완된 내용임.

1. 유사성의 유형

유사성의 유형 중 표면적 유사성과 심층적 유사성의 구분은 유비추리에서 유래하는데, 표면적 유사성은 개념들에 대하여 접근하기 쉬운 구성 요소들을 바탕으로 사고될 수 있는 것이며, 심층적인 유사성은 보다 중심적인 관점의 유사성으로서 개념에 대한 핵심적인 특성에 대한 것이다(Medin & Ortony, 1989).

Gentner(1989)는 문제의 내용에서 서술된 대상의 속성과 관계에 대한 서술이라는 두 부분으로 구분하여, 공유된 대상의 속성을 바탕으로 하는 것이 표면적 유사성이라고 하였으며, 관계적인 구조의 수준에서 말하는 유사성을 구조적 유사성이라고 하였다. 즉, 문제에 서술된 정보를 바탕으로 구체적인 단어나 문구 등으로 근원문제와 표적문제들의 유사성을 언급하는 경우가 표면적 유사성의 경우이며, 공유하는 해법원리나 주요 구성 요인들 사이의 인과적인 관계를 언급하는 경우를 구조적 유사성의 경우로 보는 것이다.

한편, Smith(1989)는 유사성을 총체적 유사성과 차원적 유사성으로 분류하였는데, 두 대상들이 어느 정도 전체적인 지각의 관점이냐 아니면 어떤 특정한 차원에서 제한적으로 비교하느냐에 따른다. 차원적 유사성의 개념은 표면과 심층적인 유사성과 연결된다고 볼 수 있다. 그러나 두 대상을 비교할 때, 단지 일반적으로 유사하다고만 한다면 그것은 무엇을 판단 기준으로 한 것인지를 알 수 없다. 이와 같이 두 대상들이 유사하다는 것만이 언급될 때, 구성되는 것이 총체적 유사성이다. 표면적인 유사성은 근원문제와 표적문제들에서 대상이나 특징과 같은 해법과는 관련이 없고 현저한 세부사항들만을 언급하는 지각적 유사성이다. 지각적 유사성이라는 것은 감각기관을 통하여 지각되는 속성들에 근거하는 것이다. Smith(1989)는 지각적 유사성을 구분하는 방식에는 발달에 따른 주된 변화가 있다고 하였다. 발달 초기에 아동들은 대상들을 단지 총체적, 혼합적 닮음의 관점으로만 보이는 방식으로 유사성들을 이해한다. 발달이 되면서 상관적인 유사성 체계가 뚜렷하게 차별화되면서 부분적인 동일화, 색상 그리고 크기, 보다 크다, 보다 작다와 같은 관계성의 차원을 바탕으로 하는 유사성의 유형들과 상호 관련된다.

본 연구에서는 표면적 유사성은 문제에서 서술된 정보를 바탕으로 구체적인 단어나 문구 등의 서술적 정보의 유사성으로 정의한 Gentner(1989)의 것을 그대로 사용하고, 구조적 유사성은 Gentner(1989)의 정의를 조금 변형하여 대응하는 주요 구성요소들 사이의 속성 및 관계에 대하여 구조의 수준에서 해법 원리가 공유되도록 인식되는 유사성이라고 정의하여 연구를 진행하였다.

2. 유사성을 바탕으로 한 문제의 분류

문제의 서술 내용에 대한 유사성과 해법 절차에 대한 유사성의 관계를 바탕으로 Reed(1993)는 문제 유형을 동치(equivalent)와 유사(similar), 동형(isomorphic), 그리고 관련되지 않은(unrelated) 문제로 구분하였다. 동치 문제는 표적 문제와 이야기 내용과 해법 절차가 같은 근원 문제이고, 유사 문제는 표적 문제와 이야기 내용은 같지만, 해법이 다른 근원 문제이다. 그리고 동형 문제는 표적 문제와 이야기 내용은 다르지만, 문제를 해결하기 위한 해법이 같은 근원 문제를 말한다. 그리고 마지막으로 관련되지 않은 문제는 표적 문제와 해법도 다르고 문제 내용도 다른 경우이다.

본 연구에서는 표적 문제에 대한 동형인 근원 문제와 표적 문제의 일부분과 동형인 근원 문제를 통해 연구대상자들이 표적 문제를 해결하는 메커니즘을 유사성의 관점에서 탐구하고자 한다.

3. 문제 해결과 유사성 인식

두 대상 사이의 유사성에 대하여 연구자들이 생각하는 개념은 어떤 공통된 구조를 가지고 있다는 것을 의미하는 것인데, 특히 문제 해결의 성공과 관련된 유사성은 문제의 피상적인 정보나 문맥에 대한 표면적인 유사성이 아니라 구조적인 것이라는 것이다(Silver, 1981; English & Halford, 2003). Reed(1987)는 학생들에게 혼합 문제와 일 문제에 대한 해법을 제시하고 각 예제를 변형한 문제를 해결하도록 한 연구를 하였는데, 이 연구에서 학생들이 반드시 예제를 이해하는 경우에만 전이를 성공하는 것은 아니며, 문제들 간의 대응을 할 수 있는 경우에는 문제해결에 성공한 연구의 결과를 얻었다. 한편,

Bassok(1997)은 문제에 서술된 내용을 이해하는 과정에서, 학생들은 같은 구조를 가진 동형 문제라도 다른 구조를 가진 문제로 해석할 수 있다고 주장하였는데, 이것은 학생들이 문제 정보의 어떤 부분에 집중하느냐에 따라 달라진다고 하였다.

문제 해결에서 유사성과 관련된 국내의 연구로 이승우·우정호(2002)는 교과서의 예제와 유제는 대수적인 계산 문제에서 구조적 유사성이 매우 높았으며, 활용문제에서 예제와 유제는 속력, 농도, 도형 등의 소재에 따라 분류되는 경향이 있어 구조적 유사성이 높지 않은 경우도 있어 학생들이 활용문제를 매우 어려워할 수 있으며, 활용문제의 예제와 유제의 구조적 유사성을 높이는 것이 필요하다고 지적하였다. 그리고 이종희·김선희(2002)는 인수분해 개념 발달 수준에 따른 유추 과제의 해결 능력을 조사한 결과, 인수분해 개념 발달의 수준이 높을수록 인수분해의 표면적 구조보다 내면적 구조를 찾아 분류하는 유추 과제의 해결에 더 성공적이었다는 연구 결과를 얻었다. 한편, 박현정·이종희(2006)는 연구대상자가 구성하는 유사성에 초점을 두고 연구를 한 결과 연구대상자들은 우선적으로 표면적 정보를 바탕으로 유사성을 구성하며, 문제 유형에 따라 다르게 유사성을 구성하며 연구 대상자들이 구성하는 표면적 유사성과 구조적 유사성은 상호 관련되었으며 연속적이라는 연구 결과를 얻었다. 이외에도 이종희·이진향·김부미(2003)는 학생들이 근원 문제를 인출한 경우만으로 유추 추론의 성공을 보장한다고 할 수 없고, 사상 과정에서 대응되는 성분들을 직접적으로 짝짓기 한 결과 표적 문제의 해결 뿐 만 아니라 새로운 유사 표적 문제의 유사성 인식에도 도움이 되었다는 연구 결과를 얻었다.

이상에서 살펴본 국내외의 연구는 학생들이 문제 해결에서 인식하는 유사성의 관점, 개념 발달 수준에 따른 유추적 전이 효과, 근원 문제와 표적 문제 사이의 사상 과정이 유사 문제 해결에 미치는 영향에 관한 연구가 있었음을 알 수 있다. 특히, 이종희·이진향·김부미(2003)는 대수 문제에서 사상할 요소를 직접 보여주기 전후의 상황을 비교하여 연구를 진행하였는데, 본 연구에서 사상할 요소를 보여주지 않고 근원 문제와 표적 문제 사이에서 학생들이 표적 문제의 해결을 위해 대응시키는 요소를 바탕으로 연구를 진행하여, 학생들이 보이는 표적 문제와 근원 문제 사이의 구성 요소들 사이의 대응과 표적 문제의 해결을 살펴보아 유사 문제 해결에서 구조적 유사성의 인식이 결정적 요소임을 확인해 보고자 하였다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

경남 창원 소재 A중학교 3학년 1개 반 학생들 중 6명의 학생들을 대상으로 2개의 소집단(1조-3명, 2조-3명)으로 구성한 후 각각 다른 문제를 제시하여 풀어보도록 하고 그 해결 과정을 관찰하였다. 연구대상자들은 자신들의 수학교사인 C선생님의 권유에 따라 자발적으로 본 연구에 참여한 학생들로서, 본 연구의 관찰이 방과후에 이루어졌음에도 적극적인 자세로 임하였다. 학생들은 수학 학습에 대하여 자신감을 가지고 있고, 또한 연구자가 제시한 문제를 해결하는 과정 내내 적극적으로 문제 해결에 참여하였다. 본 연구에 참여한 학생들은 중학교 3학년 원 단원을 학습하는 중이었는데 삼각형의 등적변형, 피타고라스의 정리를 이미 학습하여 잘 알고 있는 상태였다. 한편, 연구대상자들의 수학 학업 성적은 중상위권이었는데, 이는 매우 뛰어난 학생의 경우 본 연구에서 제시하는 문제를 너무 쉽게 해결하여 그 해결과정에 관한 유의미한 결과가 도출되지 않을 수도 있고, 또 수학 성취도가 낮은 학생의 경우 본 연구에서 제시한 문제에 대한 근원 문제의 추출 뿐 만 아니라 근원 문제의 해법 원리를 숙지하지 못할 우려와 함께 근원 문제에서 표적 문제로 이어지는 과정의 관찰이 어려울 수 있는 연구의 현실적인 한계를 극복하기 위함이었다.

2. 문제의 선정

두 조에 제시된 표적 문제는 중학교 3학년 학생들이 이미 학습한 내용, 즉, 피타고라스의 정리와 등적변형을 이용하여 해결할 수 있는 문제들이다. 표적 문제는 1조의 경우 중학교 9-나 교과서, 2조의 경우 중학교 8-나 교과서에 이와 유사한 문제가 제시되므로 유사한 근원 문제를 찾는 것이 어렵지 않도록, 교과서에 제시된 문제들의 조건을 조금씩 변경한 것이다. 두 조에 서로 다른

표적 문제를 제시한 것은 각 문제들은 유사 문제 해결에 필요한 요소를 탐색하고자 하는 측면, 특히 구조적 유사성의 측면에서 살펴보면 같은 맥락을 지니고 있기에 문제의 선정으로 발생할 수 있는 한계가 크게 문제시되지는 않을 것으로 판단하였기 때문이다.

영역에서 유사 문제의 해결에 필요한 해결 요소로서 구조한편, 유사성에 대해 지금까지 논의된 연구들은 심리학적인 접근이었거나, 대수 영역의 문제를 다루는 경우가 대부분을 차지하고 있었다(박현정 · 이종희 2006; Medin & Ortony, 1989; Gentner, 1989; Smith, 1989). 하지만 대수 영역이 아닌 영역에서의 유사 문제에 대한 논의 또한 필요한 연구라 판단하여 본 연구에서는 구조적 유사성을 살펴 유사한 기하 문제 해결에 필요한 문제 해결 요소를 논의해 보고자 하였다.

3. 자료 수집 및 분석

연구에 참여한 6명의 학생들을 2개의 소집단으로 나눈 후, 각 소집단 별로 한 명씩 학생들의 문제 해결 과정을 C교사(1조)와 연구자(2조)가 관찰하면서 필드노트를 작성하고 동시에 녹음기를 이용하여 학생들의 문제 해결 전 과정을 녹취하였다. 두 집단에 제시된 문제는 달랐지만 동일한 시간(30분) 동안 문제를 해결하여 답안을 제출하도록 하였다.

본 연구의 연구문제가 표적 문제의 해결에 결정적 요소로 작용하는데 필요한 문제 해결 요인으로서 근원 문제와의 구조적 유사성에 대해 살펴보는 것이므로 서로 다른 조에서 보이는 반응을 서로 비교하는 것이 아니라 그들이 보이는 반응을 구조적 유사성의 관점에서 정리하였다.

두 관찰자는 관점의 차이를 극복하기 위해 발생할 수 있는 여러 가지 문제점에 대해 논의를 하였으며 다음과 같은 몇 가지 안을 정하였다. 첫째, 표적 문제가 제시되고 학생들이 이 문제에 대한 적절한 근원 문제를 생각해내는 것에 실패할 경우 연구자는 적절한 근원 문제를 회상할 수 있도록 도움을 제공한다. 둘째, 학생들은 표적 문제에 대한 적절한 근원 문제의 해결 방법을 잘 알고 있어야 한다고 판단하고 학생들이 근원 문제의 해결 방법을 잘 모르는 경우 그 해결 방법을 지도한다. 한편, 관찰이 끝난 후 연구자들은 관찰한 학생들의 반응을 전사하는 과정에서도 충분한 토론을 통해 자료를 정리하였다.

Ⅳ. 연구 결과 및 논의

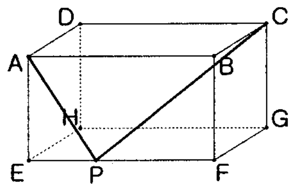
1. 관찰 결과

다음은 C교사와 연구자가 1조 학생들(학생 1, 학생 2, 학생 3)과 2조 학생들(학생 4, 학생 5, 학생 6)의 문제 해결 과정을 각각 관찰하면서 작성한 필기노트와 녹취 내용을 전사한 것이다.

1) 1조 학생들의 문제 해결 과정

1조 학생들에게 제시된 표적 문제는 다음과 같다.

다음 직육면체 $ABCD-EFGH$에서 점 P는 $\overline{EF}$위의 점이다. 이 때 점 A에서 P를 거쳐 점 C에 도달하는 경로가 최소가 되도록 하는 점 P의 위치를 구하여라.



<그림 1> 1조의 표적 문제

표적 문제가 제시되자 학생들은 문제를 같이 읽으면서 문제를 이해하였다. 학생들은 문제를 완전히 이해하였지만 그 해결책은 전혀 제시하지 못하였다. 한 동안 시간이 지난 후 다음과 같은 의견들이 제시되었다.

학생 1 : 점 P가 $\overline{EF}$의 중점일 때, 최소가 되지 않을까?

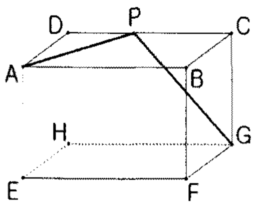
학생 2 : 점 P가 E 또는 F와 가까워질수록 점점 길어진다.

먼저 학생 1이 제시한 의견에 대해 일부 학생(학생 1, 학생 2)은 동의하였는데, 그 이유는 점 P가 E 또는 F와 가까워질수록 점점 길어진다고 생각하여, 결국 중점

일 때 최단 경로가 된다고 생각했기 때문이다. 이 의견에 대해 학생 3은 점 P가 E 또는 F와 가까워질수록 점점 길어진다고 해서 점 P가 $\overline{EF}$의 중점이라는 보장이 없다면서 이의를 제기하였다. 이러한 이의 제기에 대해 어떤 학생도 적절한 답을 생각해내지 못하고 결국 학생 1의 의견은 받아들여지지 않았다.

학생 1의 의견이 최종 답안으로 받아들여지지 않은 이 후, 학생들은 표적 문제에 대한 답을 탐색하였지만 별다른 의견을 제시하지 못하였다. 이 후 학생 2가 정육면체일 경우는 점 P가 $\overline{EF}$의 중점이 될 것이라는 의견을 제시하였는데, 이 (잘못된) 의견에 대해 학생들은 이런 저런 그림을 그려보다가 모두 동의하였다.

그 후 학생들은 정육면체가 아닌 그 외의 경우를 생각해 보기로 하였으나 별다른 결론을 얻지 못하고 한 참 고민하였다. 한 동안 고민하였지만 별다른 의견을 제시하지 못하자 관찰자인 C교사는 "이 표적 문제와 관련된 문제를 알고 있는가?"라고 발문하였다. 그러자 학생 1은 다음과 같은 <그림 2>를 그리면서 표적 문제와 유사한 문제를 생각해 내었다.

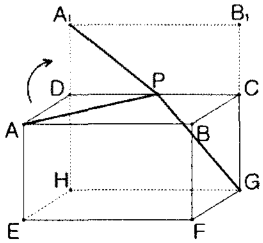


직육면체 $ABCD-EFGH$에서 점 P는 $\overline{DC}$ 위의 점이다. 이 때 점 A에서 P를 거쳐 점 G에 도달하는 최단경로가 되도록 하는 점 P의 위치는?

<그림 2> 표적 문제와 관련된 근원 문제[3)]

관찰자인 C교사는 학생들에게 이 문제를 어떻게 해결할 수 있는지 물어보았고, 학생 1은 다음과 같이 설명하였다.

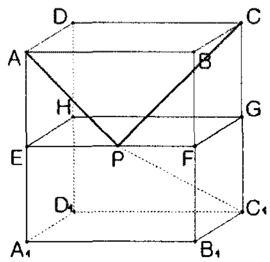
> 학생 1 : 면 $ABCD$를 면 $DCGH$와 같은 평면에 있도록 펼치면 다음과 같은 <그림 3>이 그려지는데, 이 그림에서 $\overline{AP}=\overline{A_1P}$이므로 $\overline{AP}+\overline{PG}=\overline{A_1P}+\overline{PG}$이 됩니다. 따라서 $\overline{AP}+\overline{PG}$가 최소가 되는 것은 $\overline{A_1P}+\overline{PG}$가 최소가 될 때이므로 점 A_1, P, G가 일직선 위에 있을 때입니다. 따라서 점 P는 $\overline{A_1G}$와 $\overline{DC}$의 교점일 때, 점 A에서 P를 거쳐 점 G에 도달하는 경로가 최소가 됩니다.



<그림 3> 근원 문제의 해결에 도달하는 아이디어

학생 1 이외의 나머지 학생들도 표적 문제와 관련된 근원 문제를 잘 알고 있고, 또 이 근원 문제를 해결할 수 있는 아이디어를 잘 알고 있었다. 관찰자인 C교사는 이 후 다시 학생들이 표적 문제를 해결해보도록 하였다.

학생들은 근원 문제를 생각해 낸 이 후, 좀 더 적극적으로 표적 문제 해결에 임하는 모습을 보였다. 그리고 학생 1이 다음과 같은 <그림 4>를 그렸다.



<그림 4> 표적 문제 해결을 위한 아이디어

학생 1이 그린 <그림 4>를 통해 학생들은 적극적으로 문제 해결을 위한 탐색을 시도하였다. $\overline{PC}=\overline{PC_1}$이므로 $\overline{AP}+\overline{PC}=\overline{AP}+\overline{PC_1}$이지만 근원 문제의 상황과는 다르게 $\overline{AP}+\overline{PC_1}$가 최소가 되도록 점 A, P, C_1가 일직선 위에 있기 위해서는 점 P가 $\overline{EF}$를 이탈하는 상황이 벌어져 표적 문제의 해결에 어려움을 겪었다. 이

3) <그림 2>, <그림 3>, <그림 4>는 학생 1이 필드 노트에 기록한 내용을 연구자가 GSP를 이용하여 나타낸 것임.

후 다양한 접근을 시도하던 학생들은 좀처럼 문제 해결에 이르지 못하자 다음과 같은 어려움을 토로하였다.

> 학생 3 : 표적 문제가 근원 문제[4]처럼 모든 선분이 직육면체의 표면에 있으면 해결이 쉬울 것인데, $\overline{PC}$가 직육면체의 표면에 있지 않고 공간 상에 위치하고 있어 문제 해결이 어려워요.

학생 3이 말한 것과 같은 어려움을 모든 학생이 토로하였다. 이 후 계속해서 다양한 접근을 모색하던 학생들은 별다른 소득 없이 표적 문제의 최종 답안을 제출하였다(문제가 제시되고 나서 30분 경과 후)

(1) 정육면체인 경우, 점 P는 $\overline{EF}$의 중점일 때 최단 경로가 된다.
(2) 그 외의 경우, 점 P는 $\overline{EF}$의 중점 근처의 어떤 점일 때 최단 경로가 된다.

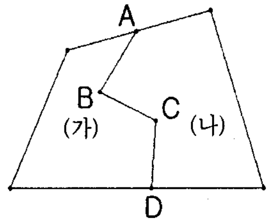
이상의 1조 학생들의 풀이 과정을 살펴보면 학생들은 일단 먼저 몇 가지의 답을 추측하였지만 추측에 대한 정당화를 해내지 못하여 자신들의 추측을 확신하지 못하였다. 문제 해결에 대해 별다른 소득이 없자 관찰자인 C교사가 표적 문제와 관련된 근원 문제를 찾을 것을 권고하였고, 학생들은 표적 문제와 관련된 근원 문제를 빨리 찾아내었다. 하지만 근원 문제의 해결 아이디어를 표적 문제에 적용하는 부분에서 어려움을 겪고 결국 확신할 수 없는 답안을 최종적으로 제출하였다. 다음은 1조 학생들을 관찰한 C교사의 논평이다.

> "학생들은 표적 문제에 대한 근원 문제를 쉽게 발견하였고 근원 문제의 해결 아이디어를 잘 인식하고 있었지만, 시각적 요소에만 집착하여 표적 문제의 $\overline{PC}$를 포함한 평면을 인식하지 못하여 결국 근원 문제의 해결 아이디어를 표적 문제에 적용하지 못한 것이 아쉽다."

2) 2조 학생들의 문제 해결 과정

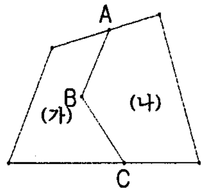
2조 학생들에게 제시된 표적 문제는 다음과 같다.

다음 그림과 같이 꺾인 선 $ABCD$를 경계로 하는 (가), (나) 두 논이 있다. 논의 넓이를 변화시키지 않고, 점 A를 지나는 선분으로 새로운 경계선을 작도하시오.



<그림 5> 2조의 표적 문제

2조 학생들 역시 처음 표적 문제가 제시되자 각자 문제의 의미를 파악하려고 하였다. 그 중 학생 4가 이와 유사한 문제를 2학년 때 배워 알고 있다고 하였다. 연구자는 학생 4가 생각하는 유사 문제를 말해보라고 하였고, 학생 4는 다음과 같은 <그림 6>을 그려내면서 유사한 문제를 말하였다.[5]



다음 그림과 같이 꺾인 선 ABC를 경계로 하는 (가), (나) 두 논이 있다. 논의 넓이를 변화시키지 않고, 점 A를 지나는 선분으로 새로운 경계선을 작도하시오.

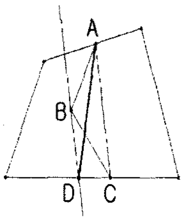
<그림 6> 표적 문제와 관련된 근원 문제[6]

연구자는 학생들에게 근원 문제를 어떻게 해결하는지 아는가를 물어보았다. 하지만 학생 4를 비롯한 2조의 학생들은 근원 문제를 쉽게 떠올린 것에 비해 이 문제의 해결 방법을 잘 생각하지 못하였다. 이에 연구자는 본 연구의 목적에 부합하다고 판단하고 근원 문제의 해결 방법을 간략히 설명해 주었다.

4) 여기서 학생이 말한 표적 문제와 근원 문제는 학생이 사용한 용어 '문제'를 본 연구의 용어로 고쳐 말한 것임.

5) 본 연구에서는 1조에서 논의된 표적 문제와 근원 문제와 2조에서 논의된 표적 문제와 근원 문제가 혼돈의 여지가 없다고 판단하여 같은 용어를 계속하여 사용하기로 함.

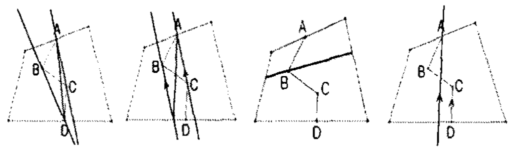
6) <그림 6>과 <그림 8>은 학생들이 문제 해결을 위해 필드노트에 기록한 것을 연구자가 GSP를 이용하여 정리하여 나타낸 것임.



① 점 A와 점 C를 연결한다.
② 점 B를 지나 $\overline{AC}$와 평행한 선을 그린다.
③ ②에서 작도한 평행선이 점 A가 있는 변의 대변과의 교점을 D라 하고 $\overline{AD}$를 그린다.

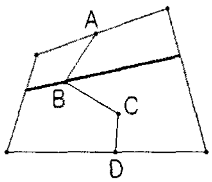
<그림 7> 근원 문제에 대해 연구자가 보여준 해결 방법

연구자가 제시한 해결 방법은 이미 학습한 내용이라 비교적 쉽게 이해하는 편이었지만 그럼에도 불구하고 잘 이해하지 못한 부분에 대해 자세한 설명을 더하여 학생들의 이해를 도왔다. 이 후 다시 표적 문제를 해결해 보도록 하였다. 학생들은 연구자의 설명이 있은 이 후 매우 적극적으로 문제 해결에 임하는 모습을 보여 주었다. 다음 <그림 8>과 같은 다양한 보조선을 긋는 활동[7]을 수행하여 문제 해결의 실마리를 찾기 위해 노력하였다.



<그림 8> 학생들이 그은 다양한 보조선

특히 이 보조선 중 세 번째 보조선은 문제 해결의 실마리가 되는 보조선이다.



<그림 9> 문제 해결의 실마리

그러나 연구자의 기대와는 달리 학생들은 별다른 소득을 얻지 못했다. 오히려 첫 번째 보조선에 집착하는 모습을 보이더니 학생 5가 다음과 같이 말하였다.

7) 실제로 학생들의 필드 노트에는 이 보다 다양한 보조선이 제시되었지만, 같은 형태의 보조선은 한 가지 경우로 취급하여 제시하였음.

학생 5 : $\overleftrightarrow{AC}$와 $\overleftrightarrow{BD}$가 평행이면 될 것 같은데 평행이 아니라서 잘 안 되네요.

학생들은 $\overleftrightarrow{AC}$와 $\overleftrightarrow{BD}$이 평행이 아니라는 점에 주목하여 이번에는 두 번째 보조선에 집중하는 모습을 보였다. 하지만 두 번째 보조선이 정답이라고 확신하지 못하였고 또 정답이라고 생각하지도 않았다. 학생들은 자신들이 그은 보조선에서 별다른 소득을 얻지 못하자 계속해서 다양한 보조선을 긋는 활동에 치중하여 문제를 해결하려고 하였다. 학생들의 이러한 모습에 대해 연구자는 다음과 같은 권고를 하였다.

연구자 : 표적 문제의 그림을 두 부분으로 나누어 생각해 보렴.

학생들은 연구자의 권고에 따라 표적 문제를 다시 살펴보았지만 여전히 문제 해결에 도달하지 못하고 30분이 지나자 결국 문제를 해결하지 못하겠다고 하였다.

학생 4 : 표적 문제는 근원 문제와는 조금 다른 상황인 것 같아 해결하기 어렵네요.

2. 논의

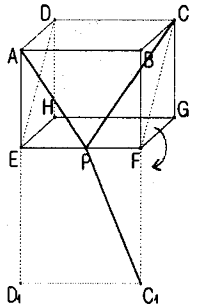
1) 1조의 문제 해결 과정 논의

1조의 문제 해결 과정을 살펴보면 표적 문제와 근원 문제가 유사하다는 생각은 하였지만 문제를 해결하는 과정에서 겪은 어려움으로 인하여 표적 문제가 근원 문제의 아이디어로는 해결이 불가능하다고 여겼음을 알 수 있다. 특히 1조의 학생들이 <그림 4>를 그려 봄으로써 시도한 해결 전략이 어려움에 봉착하면서 근원 문제의 아이디어로는 표적 문제의 해결이 불가능하다고 여긴 점이 더욱 그러하다. 표적 문제의 해결이 근원 문제의 아이디어로는 해결이 불가능하고 근원 문제의 아이디어를 활용하여 새로운 아이디어를 도출해야 표적 문제의 해결에 이를 수 있다고 생각하였다. 따라서 두 조의 학생들은 표적 문제와 근원 문제를 처음에는 유사하게 보았지만, 문제를 해결해 가면서 표적 문제와 근원 문제를 점점 더 유사하다고 보지 않았음을 알 수 있다.

1조의 학생들이 토로한 표적 문제 해결의 어려움을 살펴보자. 1조의 학생들은 $\overline{PC}$가 직육면체의 표면에 있

지 않고 공간 상에 위치하고 있어 문제 해결이 어렵다고 하였다. 이것을 보면 1조의 학생들은 근원 문제의 해결 아이디어를 어느 정도 정확하게 인식하고 있음을 알 수 있다. 근원 문제의 해결 아이디어는 다른 평면 위에 놓여 있는 두 선분을 하나의 평면 위에 놓아 두 선분의 길이를 살피는 것이다. 1조의 학생들은 이와 같은 근원 문제의 해결 아이디어는 알고 있었지만, 표적 문제에서 $\overline{PC}$가 직육면체의 표면에 있지 않은 점에 주목하여 근원 문제의 해결 아이디어가 표적 문제에서는 적용하기 힘들다고 본 것이다. 모든 선분은 그 선분을 포함하는 평면이 반드시 존재하는데, 이러한 사실을 1조의 학생들은 인식하지 못한 것이다. 이러한 인식은 표적 문제는 근원 문제의 해결 아이디어로는 문제 해결이 어렵고, 새로운 아이디어로 접근해야 하는 문제라고 여기게 만든 것이다. 이와 같은 관점으로 인해 1조의 한 학생은 근원 문제의 해결 아이디어와는 거리가 있는 <그림 4>와 같은 대칭적 요소를 접목한 아이디어를 생각해낸 것이다.

이제 1조에 제시된 표적 문제의 해결 과정을 살펴보자. 1조에 제시된 문제의 해결 과정은 <그림 10>과 같다.



$\overline{PC}$는 면 $DEFG$ 위에 있는 선분이므로 면 $DEFG$를 면 $AEFG$와 같은 평면 위에 있도록 펼치면 옆의 그림과 같은 면 ED_1C_1F를 얻을 수 있다. 한편 $\overline{PC}=\overline{PC_1}$이므로 $\overline{AP}+\overline{PC}=\overline{AP}+\overline{PC_1}$이다. 여기서 $\overline{AP}+\overline{PC_1}$이 최소가 되려면 점 A, P, C_1이 일직선 위에 있어야 한다. 따라서 $\overline{AP}+\overline{PC_1}$이 최소가 되는 것은 점 P가 $\overline{AC_1}$과 $\overline{EF}$의 교점이 될 때이다.

<그림 10> 1조에 제시된 문제의 해결 과정

1조에 제시된 문제의 해결 과정을 보면 표적 문제와 근원 문제는 같은 아이디어를 가진 문제임을 알 수 있다. 두 문제 모두 다른 평면 위에 놓인 두 선분을 같은 평면 위에 놓아 이때의 최단 경로를 살피는 문제 해결 전략을 취하고 있다. 특히 학생들은 $\overline{PC}$가 근원 문제와는 다르게 직육면체의 표면에 위치해 있지 않은 점에 주목하여 근원 문제와 표적 문제의 구조적 유사성 인식에 실패하여 근원 문제의 해결 전략을 적용하지 못한 것이다. 학생들은 표적 문제와 근원 문제가 어렴풋이 유사하다고만 생각만 하였지, 이 두 문제가 구조적으로 유사하다는 것을 인식하지 못하여 문제 해결에 실패한 것이다. 즉, 근원 문제와 표적 문제의 표면적 유사성은 인식하였지만, 두 문제에서 대응하는 주요 구성 요소들 사이의 구조적 유사성은 인식하지 못하였기 때문에 문제를 해결할 수 없었던 것이다. 특히 근원 문제의 표면과 대응하는 $\overline{PC}$를 포함하는 평면의 인식에 실패하여 구조적 유사성의 통찰이 이루어지지 않은 것이다.

두 문제의 표면적 유사성과 구조적 유사성은 다음과 같다.

- 표면적 유사성 - 두 선분, 직육면체, 최단 경로, 점 P의 위치 등
- 구조적 유사성 - 두 선분, 두 선분이 놓인 평면, 다른 평면 위에 놓여 있는 두 선분의 최단 경로, 두 선분의 길이가 최소가 되도록 하는 점 P의 위치 등

표면적 유사성은 근원 문제와 표적 문제에 서술된 구성 요소들 사이의 속성 그 자체의 정보를 바탕으로 한 유사성으로서, 1조에 제시된 표적 문제와 근원 문제 사이에서 위와 같은 두 선분, 직육면체, 최단 경로 등과 같은 정보만을 인식하는 것인데 이것만으로 표적 문제는 해결되지 않는다. 한편 근원 문제와 표적 문제가 구성 요소에 대한 구조의 측면에서 해법 원리가 공유되도록 하는 구조적 유사성 즉, 두 선분과 두 선분이 놓인 평면 (특히, 여기서 표적 문제의 $\overline{PC}$를 포함하는 평면) 등의 인식이 수반되어야 표적 문제의 상황에 근원 문제의 해법을 적용하여 표적 문제를 해결할 수 있는 것이다. 1조의 문제 해결 실패의 과정을 도식화하면 다음 <그림 11>과 같다.

$\overline{PC}$는 면 $DEFG$ 위의 선분이라는 사실 인식 실패 → 근원 문제와 표적 문제의 구조적 유사성 인식 실패 → 근원 문제의 해결 아이디어와는 다른 아이디어 도출 시도 → 표적 문제 해결 실패

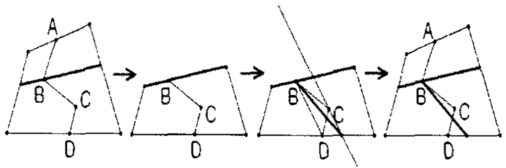
<그림 11> 1조의 문제 해결 실패의 과정

2) 2조의 문제 해결 과정 논의

2조의 문제의 해결 과정을 살펴보면 근원 문제를 쉽게 떠올린 것에 비해 이 문제의 해결 방법을 잘 생각하지 못하였으나, 문제 해결의 실마리가 되는 그림(<그림 9>)을 그렸다. 흥미로운 점은 표적 문제와 관련된 근원 문제를 잘 알고 있고 문제 해결의 실마리가 되는 그림을 그렸음에도 불구하고 2조 학생들은 왜 문제 해결에 성공하지 못한 것일까?

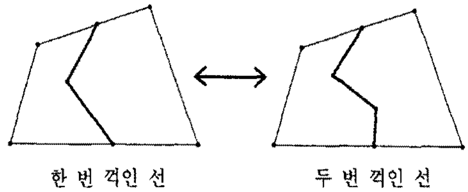
2조의 학생들은 <그림 8>의 첫 번째 보조선과 두 번째 보조선에 집착하는 모습을 보여주었는데, 이 같은 모습은 근원 문제의 해결 아이디어를 정확하게 인식하지 못하고 이러한 아이디어와 표면적으로 유사한 방법으로 표적 문제를 해결하려는 과정에서 비롯된 것이다. 결국 연구자가 표적 문제의 그림을 두 부분으로 나누어 생각해 보라고 권고하였음에도 불구하고, 두 문제의 표면적 유사성만 인식하였을 뿐 구조적 유사성의 인식에는 미치지 못하였다.

2조에 제시된 문제의 그림을 다음 <그림 12>와 같이 나누어 밑 부분만을 따로 떼어내어 보면 이것은 근원 문제와 완전히 일치하는 문제의 구조를 가지게 된다. 따라서 이 부분은 근원 문제의 해결 아이디어를 이용하여 등적 변형이 가능하고, 이러한 변형이 이루어진 후 이 부분을 다시 전체에 포함시켜 인식하면, 이것 역시 근원 문제와 완전히 일치하는 문제의 구조를 가지게 된다. 즉, 2조의 문제는 부분으로 따로 떼어 인식하면 두 번에 걸쳐 근원 문제와 구조적으로 일치하는 문제가 나타나게 되는 것이다.



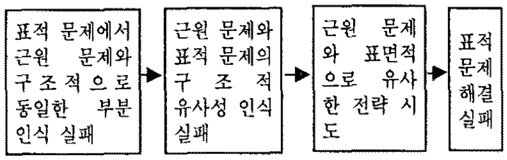
<그림 12> 부분으로 분리하여 인식할 경우 문제의 모습

부분으로 분리하여 인식하면 근원 문제와 구조적으로 동일한 문제가 되는데, 학생들은 이러한 부분으로서의 모습을 인식하지 못하고 전체적 모양에서 근원 문제와 표적 문제에 대응하는 주요 구성 요소들을 바라본 결과 두 문제의 표면적 유사성은 인식하였지만 대응하는 주요 구성 요소들 사이의 구조적 유사성 인식에는 실패한 것이다. 특히 학생들은 다음 <그림 13>과 같은 인식을 하여 구조적 유사성 인식에 실패한 것이다.



<그림 13> 학생들이 인식한 대응하는 주요 구성 요소

이러한 근원 문제와 표적 문제에 대한 대응하는 주요 구성 요소에 대한 잘못된 인식으로 인하여 학생들은 문제 해결의 실마리(<그림 9>)가 되는 보조선을 그렸음에도 불구하고 표적 문제에서 근원 문제와 구조적으로 동형인 부분을 인식하지 못하고 자신들이 그린 보조선을 단순한 보조선이라고 생각하고 만 것이다. 이처럼 구조적 유사성 인식에 실패하여 근원 문제의 해결 아이디어와 표면적으로 유사한 모습으로 표적 문제를 해결하려고 한 것이다. 2조의 문제 해결 실패의 과정을 도식화하면 다음 <그림 14>와 같다.



<그림 14> 2조의 문제 해결 실패의 과정

V. 결론 및 제언

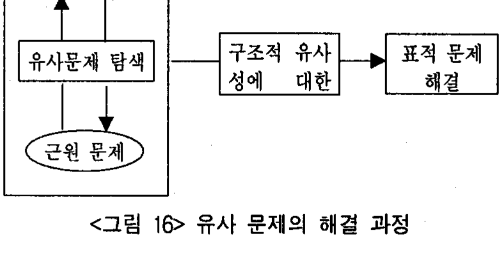
Clfareill(1993)와 Chinnappan(1998)는 우수한 문제해결자는 이전에 문제를 해결한 경험을 근거로 유사한 부분을 생각해서 문제 해결에 성공한다고 주장하였으며, 박현정 · 이종희(2006)는 지금 해결하고자 하는 문제의 해법을 구하는데 있어서 이전에 경험한 문제가 근원적이며 핵심적인 역할을 할 수 있다면, 문제해결자가 기억하는 문제와 현 문제가 어떠한 점에서 유사하다고 보는가는 문제 해결 과정에서 매우 중요한 영향을 미칠 수 있

다고 하였다.

본 연구에서는 유사성에 주목하여 학생들의 문제 해결 과정의 관찰을 통해 수학 문제 해결 과정에서 표적 문제에 대한 동형인 적절한 근원 문제 추출 이 후의 과정을 탐구하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

주어진 표적 문제와 관련된 동형인 적절한 근원 문제를 생각해 내었고, 또 근원 문제의 해결 아이디어를 잘 알고 있음에도 불구하고 주어진 표적 문제와 근원 문제 사이의 표면적 유사성만 인식하고 각 문제에 대응하는 주요 구성 요소들 사이의 구조적 유사성에 대한 인식이 부족할 경우 표적 문제의 해결을 성공하지 못하는 경우를 살펴보았다. 결국 학생들은 표적 문제의 해결을 위해 이 문제와 관련된 이전에 풀어 본 근원 문제를 생각함에 있어 근원 문제와 표적 문제의 표면적 유사성의 인식으로 문제의 분석 행위가 끝나서는 안 되고 각 문제의 구조적 유사성에 대한 전반적 통찰이 이루어져야 표적 문제의 해결에 도달할 수 있는 것이다. 따라서 표적 문제에 대한 근원 문제를 떠올리는데 성공하였다면 근원 문제와 주어진 표적 문제와의 구조적 유사성에 대한 면밀한 탐색 활동이 필요하며, 이를 통해 근원 문제의 해결 전략을 표적 문제에 적용할 수 있는 가능성이 보이게 되는 것이다.

이상의 논의를 살펴보면 표적 문제가 주어지면 이 문제와 관련된 이전에 풀어본 문제를 생각하는데 이 과정에서는 주로 표면적 유사성 측면에서 문제를 선택하게 된다. 하지만 근원 문제가 추출된 이 후 표적 문제 해결에 도달하기 위해서는 표면적 유사성 인식만으로는 안되며 구조적 유사성에 대한 통찰이 이루어져야 한다. 유사 문제를 통한 표적 문제의 해결 과정을 도식화하면 <그림 16>와 같다.



<그림 16> 유사 문제의 해결 과정

본 연구에서는 적절한 근원 문제의 추출 이 후의 과정에 대해서만 살펴보고, 표적 문제 인식 이 후 유사 문제 탐색을 통해 적절한 근원 문제를 찾아내는 과정에 대해서는 고찰해보지 못하였으며, 실제 학습지도에서도 표적 문제에 대한 적절한 근원 문제의 회상뿐만 아니라 표면적 유사성을 넘어 구조적 유사성을 탐색할 수 있는 적절한 방법의 지도가 이루어 져야 한다. 한편, 문제 해결 과정에서 이전에 경험한 문제와의 유사성을 인식할 수 있는 것은 매우 중요하며, 그들이 어떠한 점에서 구조적으로 유사하다고 보는가에 대한 분석도 필요하다. 이러한 과정과 방법에 대한 연구는 후속 연구로 남긴다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2007). 초등학교 교육과정 해설(IV): 수학, 과학, 실과. 서울: 교육과학기술부.

박현정 · 이종희 (2006). 중학생들이 수학 문장제 해결 과정에서 구성하는 유사성 분석. 수학교육학연구, 16(2), 115-138.

이승우 · 우정호 (2002). 학교수학에서의 유추와 은유. 수학교육학연구, 12(4), 523-542.

이종희 · 김선희 (2002). 인수분해 문제 해결과 유추. 학교수학, 4(4), 581-599.

이종희 · 이진향 · 김부미 (2003). 중학생들의 유추에 의한 문제 해결 과정 : 사상의 명료화를 중심으로. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 17, 115-126.

정찬식 · 노은환 (2009). 수학영재아의 문제해결 과정에 따른 사례 연구-수학적 사고능력을 중심으로-. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 48(4), 455-467.

Bassok, M. (1997). Two types of reliance on correlations between content and structure in reasoning about word problems. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (pp.221-246). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Chinnappan, M. (1998). Schemas and mental model in geometry problem solving, *Educational Studies in*

Mathematics, **36(3)**, 201-217.

Clfareill, V. (1993). Representation processes in mathematical problem solving. Paper presented at Annual Meeting of the American Educational Research Association Atlanta, Georgia. ED365522.

Dooren, W. V., Verschaffel, L., & Onghena, P. (2002). The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra word problems, *Journal for Research in Mathematics Education*, **33(5)**, 319-351.

English, L. D., & Halford, G. S. (2003). 수학교육론. 고상숙 · 고호경 · 박만구 · 이중권 · 정인철 · 황우형 역, 서울: 경문사. (원저는 1995년 출판)

Gentner, D. (1983). Structure-mapping: A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, **7(2)**, 155-170.

Gentner, D. (1989). *The mechanisms of analogical learning*. In S. Vonsniadou & A. Ortony (Eds.), *Similarity and analogical reasoning* (pp.199-241). New York: Cambridge University Press.

Lawson, M. J., & Chinnappan, M. (2000). Knowledge connectedness in geometry problem solving, *Journal for Research in Mathematics Education*, **31(1)**, 26-43.

Medin, D. L., & Ortony, A. (1989). Psychological essentialism. In S. Vosniadou & A. Ortony(Eds.), *Similarity and analogical reasoning*(pp179-195). New York: Cambridge University Press.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Auther.

Polya, G. (1997). 어떻게 문제를 풀 것인가? 우정호 역, 서울 : 천재교육 (원저는 1986년 출판)

Reed, S. K. (1987). A structure-mapping model for word problem, *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, **13(1)**, 124-139.

Reed, S. K. (1993). A schema-based theory of transfer. In D. K. Detterman & R. J. Sternberg (Eds.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition, and instruction* (pp.39-67). Norwood, NJ: Ablex.

Silver, E. A. (1981). Recall of Mathematical verbal problem, *Journal for Research in Mathematics Education*, **12(1)**, 54-64.

Smith, L. B. (1989). A model of perceptual classification in children and adults. *Psychological Review*, **96(1)**, 125-144.

Insight into an Structural Similarity in Stage of Similar Mathematical Problem Solving Process

Jun, Young Bae
Department of Mathematics Education, Gyeongsang National University, Jinju 660-701, Korea
E-mail : skywine@gmail.com

Roh, Eun Hwan[8)]
Department of Mathematics Education, Chinju National University of Education, Jinju 660-756, Korea
E-mail : idealmath@gmail.com; ehroh@cue.ac.kr

Kang, Jeong Gi
Annam Middle School, ChangWon 641-805, Korea
E-mail : jeonggikang@gmail.com

It is the aim of this paper to study the target problem solving process in reference to the base problem. We observed closely how students solve the target problem in reference to the base problem. The students couldn't solve the target problem, although they succeed to find the base problem. This comes from failing to discover the structural similarity between the target problem and the base problem. Especially it is important to cognize the proper corresponding of primary components between the base problem and target problem. And there is sometimes a part component of the target problem equivalent to the base problem and the target problem can't be solved without the insight into this fact.

Consequently, finding the base problem fail to reach solving the target problem without the insight into their structural similarity. We have to make efforts to have an insight into the structural similarity between the target problem and the base problem to solve the target problem.

* ZDM Classification : D53, G23
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* Key Words : mathematical problem solving process, target problem, base problem, insight into an structural similarity.

8) Corresponding author