복합재료 판의 등가강성 계산

Estimation of Equivalent Stiffness of Laminated Composite Plates

김 준 식*

* 금오공과대학교 기계공학부 조교수

1. 머리말

기계, 항공, 토목 및 건축공학 등의 분야에서 판은 보와 더불어 가장 기본적인 부재중의 하나이다. 예를 들면, 토목공학 분야의 다리 및 건축공학에서의 건물 외벽 및 지붕 등이 판 구조물 형태를 취하고 있다. 기계 및 항공분야에서는 기본 부재의 대부분이 판의 형상으로 되어있다고 해도 과언이 아니다. 한편 보 구조물 등도 판으로 해석이 가능하다. 특히 기계 및 항공분야에서 많이 쓰이는 박판 보는 판으로 보다 정밀한 해석이 가능하다. 기하학적 관점에서 보면 원래의 모든 구조물은 3차원 구조물의 형태이고, 보는 2차원이 줄어든 1차원 구조물 그리고 판은 1차원이 줄어든 2차원 구조물이다. 따라서 기하학적인 관점에서만 보면 일반적인 보 이론이 가장 힘들다고 볼 수 있다. 하지만 다기능 복합재료의 출현은 판의 등가강성 및 연성의 거동을 예측하는데 큰 어려움을 주고 있다. 따라서 판의 등가강성의 계산은 매우 중요한 문제가 된다. 특히 횡방향 전단 강성의 예측 이러한 고도화된 복합재료의 거동을 정확하게 예측하기 위해서는 필수불가결한 요소이다.

앞서 언급한 것처럼 판은 3차원 구조물에서 1차원이 줄어든 2차원 구조물이다. 어떻게 1차원이 줄어들 수 있는지 좀 더 살펴보고자 한다. 3차원 구조물은 관찰자의 시점에 따라 보는 때로 솔리드(solid) 요소로 생각되기도 하며 판(plate)요소로 생각되어지기도 한다. 판 구조물은 3차원적인

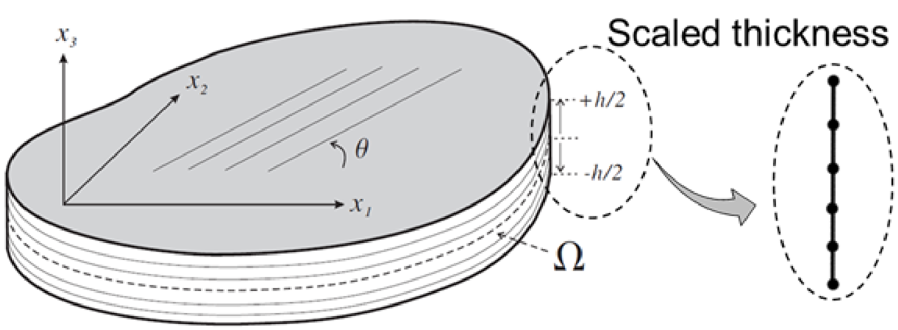

그림 1 3차원 판의 두께방향의 특성길이

관점에서 두께가 얇은(thin) 구조물이라 불리기도 한다. 그 이유는 두께의 수치가 평면의 차원에 비해 상대적으로 매우 작기 때문이다(그림 1). 이것은 판의 기하학적 정의라 할 수 있다. 한편 수학적으로는 구조물의 면내 특성길이(characteristic length) 또는 파장(wave length)이 판 두께의 특성길이보다 매우 큰 구조물을 얇다고(thin) 할 수 있다. 이러한 정의는 판 구조물의 변수들이 평면내의 변수들만으로 표시되는 수학적 근거가 된다.

본 기사에서는 이러한 판 구조물들의 해석을 위한 판 이론의 간단한 역사적 배경과 최근에 개발된 판 구조물의 단면 워핑함수의 계산방법, 유한요소법과 MATLAB에 기반을 둔 판 등가강성 계산 프로그램을 소개하고자 한다.

2. 역사적 배경과 발달과정

판 구조물의 해석은 매우 오래전부터 시작되어 왔다. 현 판 이론의 기초가 되는 Kirchhoff-Love 판 이론(또는 고전 판 이론)은 Euler-Bernoulli 보 이론의 확장판이라고 할 수 있다.[1),2)] 초기의 보 이론은 현대의 보 이론과는 다르게 2차원 평면 운동을 기술하기 때문에 머리말에서 설명한 것과는 다르게 판보다 더 간단한 형태의 이론으로 인식되었다. 현대 보 이론의 기초는 잘 알려진 바와 같이 오일러(Leonard Euler, 1707~1783)와 베르누이(Jacob Bernoulli, 1654~1705)에 의해서 확립되어 졌으며, 판 이론의 이 고전 보 이론의 기초위에 확립되었다. 현대 고전 판 이론은 독일 출신 학자인 커크호프(Gustave Kirchhoff, 1824~1887)가 1850년에 확립한 2가지의 중요한 가정들에 기초하고 있다(그림 2). 즉, 1) 변형 전 판의 중립면에 수직인 두께 방향의 선은 변형 후에도 중립면에 수직이며 직선이고, 2) 판의 두께 방향의 변형은 횡방향의 하중이 작용하는 굽힘에 의해 일어나지 않는다. 이러한 가정을 통해 커크호프는 오늘날 잘 알려진 판의 굽힘 방정식을 유도하였다.[1)]

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=q \tag{1}$$

커크호프와 더불어 고전 판 이론을 확립하고, 쉘 이론으로 확장시킨 사람은 영국의 수학자 러브(Augustus Love, 1863~1940)이다. 러브는 고전 판 이론의 토대위에 진동 및 탄성파 분야로 확장하여 일반화 시켰다(1888). 이러한 이유로 인해 고전판 이론이 더욱 잘 알려지게 되었고, 오늘날

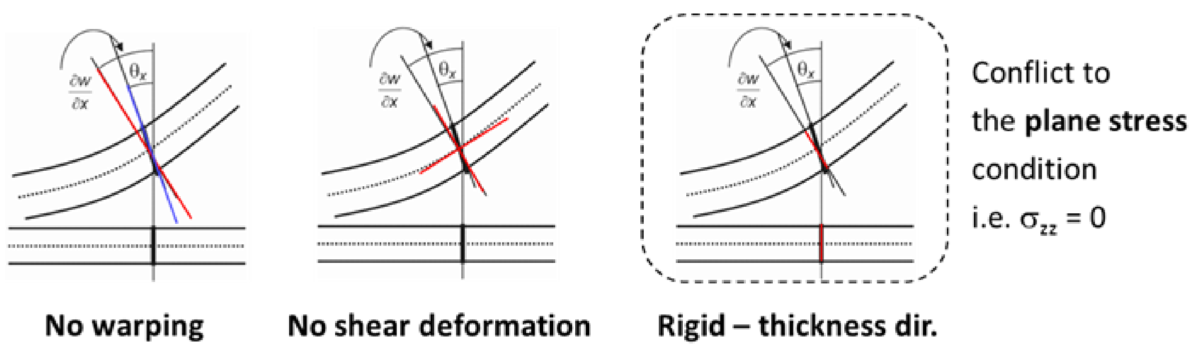

그림 2 판 모델에 대한 커크호프의 가정들

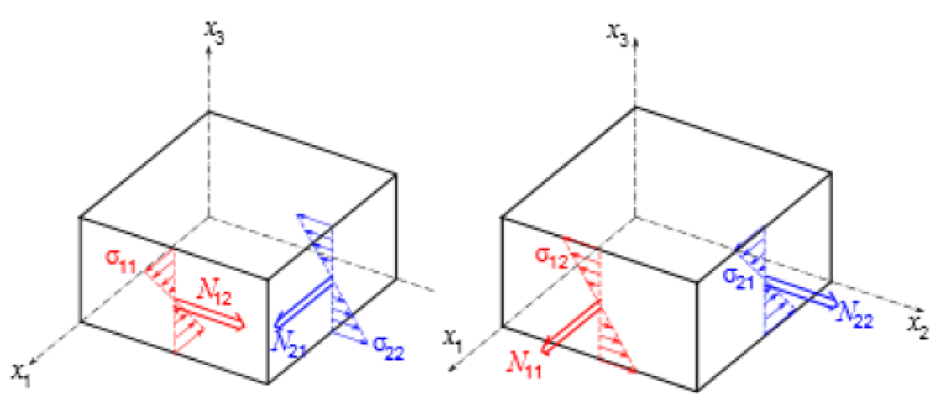

그림 3 Kirchhoff-Love 판 모델에서의 응력상태

커크호프와 더불어 고전판 이론에서 함께 언급되어지고 있다. 즉, 고전 판 이론은 Kirchhoff plate theory 또는 Kirchhoff-Love plate theory라고 불리는 이유이다.

초기 커크호프가 가정한 2가지의 가정들은 두께방향으로의 평면응력(plane stress)에 해당한다고 볼 수 있다. 즉 횡방향 응력들은 0이고 면내응력만 존재한다(그림 3). 평면응력 가정이 3차원 변위장을 가정한 판의 해석결과보다 더 정확하기 때문에 Kirchhoff paradox라고도 불리며 몇몇의 학자에 의해 연구가 되기도 하였다.

20세기 초반에 이르러서는 굽힘 변형 이외에 판의 두께방향으로의 전단변형을 고려하기 시작하였다. 보 구조물에 대해서는 랜카인(W.J.M. Rankine, 1820~1872)이 처음으로 전단변형을 고려한 반면 판에 대해서는 비교적 늦게 1945년에 라이즈너(Eric Reissner, 1913~1996)에 의해 처음으로 수학적 모델이 제안되었다. 비슷한 결과를 1951년에 민들린(Raymond Mindlin, 1906~1987)에 의해서도 확립되었는데, 오늘날 민들린(Mindlin) 판 이론이라고 주로 불리는 이유는 1951년에 발표한 민들린의 논문에 의해 전단변형이론이 유명해 졌기 때문이다. 때로는 이 두 사람들의 기여를 인정하여 Reissner-Mindlin(또는 줄여서 R-M)이라고 불린다. 이후 복합재료의 출현과 더불어 이 R-M이론을 확장한 고차전단변형이론의 황금기가 시작되게 된다. 수많은 고차이론들의 출현에도 불구하고, 현재 상용 유한요소 프로그램에서 널리 사용되어지는 판 요소는 모두 이 R-M이론에 기초하고 있다. 따라서 보 이론의 경우와 마찬가지로 복합재료 판의 경우처럼 전단변형(또는 전단응력, 그림 4)이 큰 문제를 적절하게 고려하기 위하여 전단수정계수의 필요성은 더욱더 중요하게 되었다.[3),4)]

판 모델은 위에서 언급한 것처럼, 고전 판 이론인 K-L 모델(또는 복합재료에 대하여 CLPT)이 개발 된 이후 전단변형을 고려한 R-M 모델(또는 일차전단변형이론, FSDT; First-order shear deformation theory)이 개발되었고, 복합재료의 출현과 더불어 대표적으로 삼차전단변형이론(TSDT; Third-order shear deformation theory, 또는 HSDT; Higher-order shear deformation theory)을 중심으로 발전하였다.[3),4)] 현재는 더욱 정교한 형태의 판 모델들이 개발되어져 있다. 이러한 판 이론들의 변천사는 주로 횡방향 전단변형의 정도를 얼마나 정확하고 효율적으로 고려하는지에 따라 이루어졌다(그림 5). 판 모델의 변천사에서도 알 수 있듯이 판의 전단변형을 얼마나 효율적으로 고려하는지가 판 이론의 정확도를 좌우한다고 해도 과언이 아니다. 초기에는 횡방향 전단 워핑함수들은 단순한 두께방향 좌표의 다항식 전개가 주를 이루었다. 하지만 복합재료의 경우 신뢰할 만한 정확도를 얻기 위해서는 매우 많은 변수들을 포함하는 단점이 있다. 이후에는 공학적 직관에 의한 가정들이 주를 이루었고, 자유도의 측면에서는 성공적이었다. 이러한 모델들의 대표적인 단점으로는 복합재료 판의 적층배열에 따른 정확도에 일관성이 없어 신뢰하기가 힘들다는 점이다. 특히 직교적층배열에 있어 많은 고차 판 모델들이 전단강성을 비교적 정확하게 예측하지만 전단변형이 큰 경우나 특이한 연성으로 나타나는 경우는 정확성이 크게 떨어진다. 이러한 단점은 수학적으로 정확한 점근해석기법(asymptotic analysis)에 의해서 어느 정도 극복되어 질 수 있다.[5)] 이어지는 장에서는 최근 개발된 전산점근해석에 기반을 둔 복합재료 판의 등가강성 및 전단 워핑(warping) 함수의 계산법을 소개하고자 한다.

3. 판의 등가강성 및 워핑함수 계산 프로그램

이 장에서는 일반적인 적층배열을 가지는 복합재료 판의 두께방향 워핑함수 및 판 등가강성을 계산하는 방법을 소개하고, Matlab에 기반을 둔 프로그램을 간략하게 설명한

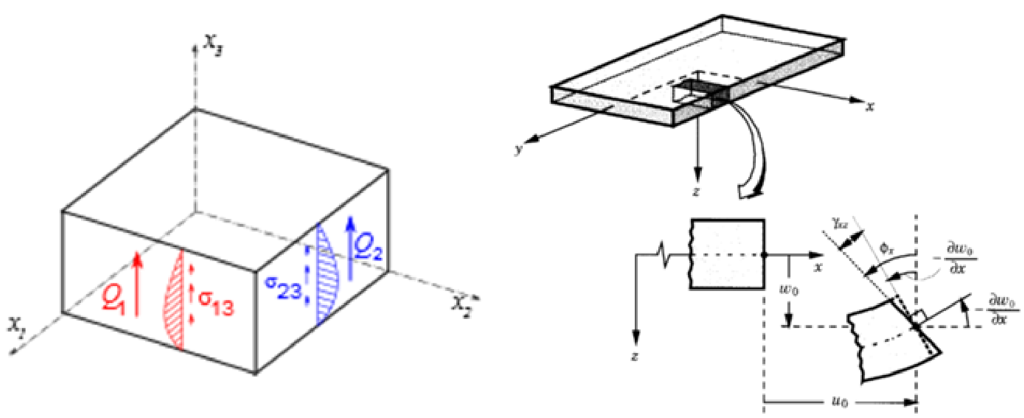

그림 4 R-M 판 모델에서의 횡방향 전단응력[4)]

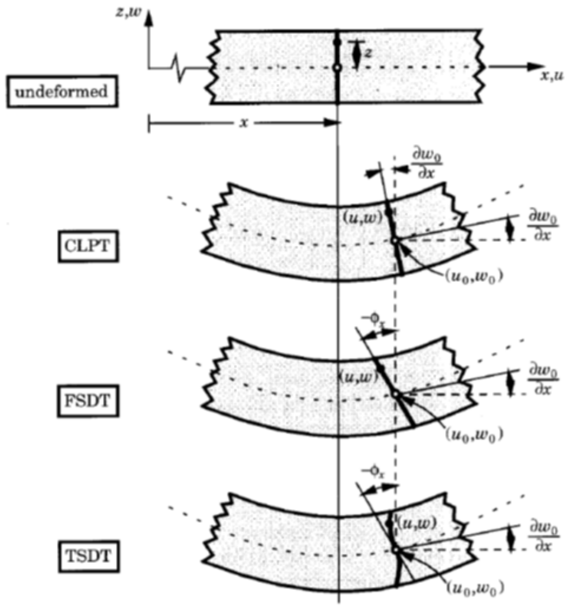

그림 5 판 이론의 간략 변천사: 고전 판 이론(CLPT)에서 고차 판 이론(TSDT)[4)]

다. 이 Matlab 프로그램은 3차원 탄성모델로부터 판의 두께방향 워핑함수를 체계적인 방법(즉, 점근해석기법)으로 계산한다. 점근해석기법은 상당한 수학적 설명이 필요함으로 본 기술기사에서는 점근해석기법을 대신하여 섭동법으로 그 설명을 대체하고자 한다.

3차원 판 구조물로부터 핑함수와 2차원 판 이론을 가상일의 원리로부터 유도할 수 있다. 가상일의 원리는 다음과 같이 주어진다.

$$\delta W = \int_V \sigma(u)\delta\epsilon(u)dV - \int_S p\delta u dS = 0 \tag{2}$$

여기서 응력과 변형률 텐서는 각각 변위의 함수이고, p는 외력을 나타낸다. 먼저 변위장을 기본 변위장과 섭동항으로 다음과 같이 분리한다.

$$u = u^{KL} + u^{PB} \tag{3}$$

여기서 첫 번째 항은 기본 변위로써 보통 Kirchhoff-Love 판 이론의 변위장에 해당한다. 두 번째 항은 섭동항으로 계산되어져야 하는 변위장이고, 워핑함수를 내포하고 있다.

식 (3)을 식 (2)에 대입하면 1차원 두께방향 방정식과 2차원 판 방정식에 관한 가상일을 얻을 수 있다.

$$\int_V \sigma(u^{KL}+u^{PB})\delta\epsilon(u^{PB})dV - \int_S p\delta u^{PB} dS = 0 \tag{4a}$$

$$\int_V \sigma(u^{KL}+u^{PB})\delta\varepsilon(u^{KL})dV - \int_S p\delta u^{KL} dS = 0 \tag{4b}$$

식 (4a)로부터 판의 두께방향의 워핑함수를 계산할 수 있다. 먼저 섭동항의 변위를 1차원 유한요소법으로 이산화를 하고, 두께방향 강체모드를 제거하면 워핑함수를 계산할 수 있다. 강체모드의 제거는 라그랑지 승수법(Lagrange multiplier)을 도입하여 3개 자유도에 구속을 가함으로써 수행할 수 있다. 최종적으로 섭동변위 u^{PB}는 기본변위 u^{KL}의 항으로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$u^{PB} = \Gamma\epsilon^{KL}(u^{KL}) \tag{5}$$

식 (5)을 식 (4b)에 대입하고 정리하면 워핑함수를 고려한 등가강성을 가지는 2차원 판 방정식을 얻을 수 있다. 정리하면 두께방향 워핑함수는 식 (4a)에서 계산하고, 등가강성은 식 (4b)에서 계산되어진다. 식 (4a)에서는 1차원 유한요소법의 차용이 필요하고(일반적인 적층배열에 대해서), 등가강성의 계산은 이미 계산되어진 워핑함수를 이용하여 쉽게 수행할 수 있다(그림 6). 두께방향에 대한 1차원 유한요소 해석만을 수행함으로 계산시간과 요구되어지는 메모리는 매우 적어 수치적으로 효율적이다. 따라서 많은 반복계산을 수행하는 최적설계 등에도 무리없이 그대로 적용할 수 있다.

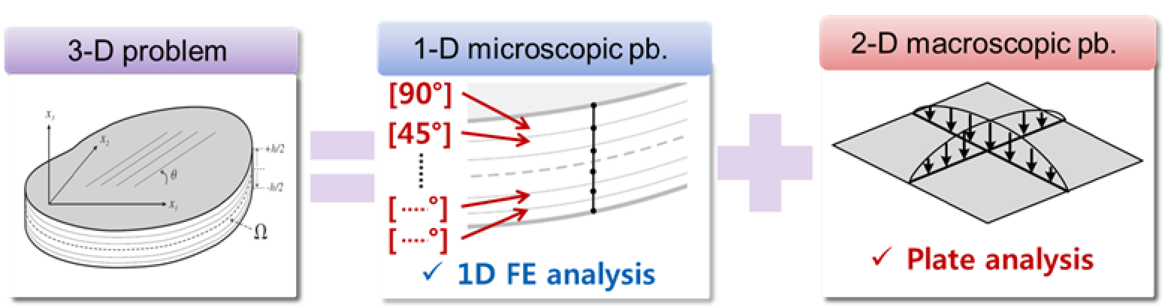

그림 6 3차원 구조물의 1차원 두께방향 워핑함수 및 2차원 판 구조물로의 분리

K-L변위를 기본 변위로 했을 때 판의 두께방향으로의 워핑함수는 3개의 축력과 3개의 굽힘 모멘트로 표현되어진다. 이는 고전적 판 이론이 6개의 변형률(three in-plane strains and three curvatures)로 표시되기 때문이다. 고전 판 이론에서 2차원 판의 구성방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{Bmatrix}N\\M\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\B^T & D\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon\\\kappa\end{Bmatrix},\quad \epsilon^{KL}=\varepsilon+z\kappa \tag{6}$$

간단한 수치예제로서 등방성 판을 고려하였다. 등방성 재료의 상수들은 E=10GPa, ν=0.3이고, 판의 두께는 1이다. 판 두께방향으로는 1차원 3절점 유한요소 40개를 이용하여 이산화 하였다(그림 7). 두께방향으로의 유한요소 개수는 등가강성에 민감하지 않다. 약 10개 미만의 요소로 충분하지만 선명하고 깔끔한 워핑함수를 보여주기 위하여 40개의 요소를 사용하였다. 본 기사에서 다루는 Matlab 프로그램은 일반적인 유한요소의 입력 데이터 구조를 가지고 있다. 노드 데이터는 노드 번호와 1차원 좌표를 요소 데이터는 요소 번호, 요소 연결정보, 재료카드 그리고 복합재료를 위한 화이버(fiber) 각도에 관한 정보를 입력 받는다. 본 Matlab 프로그램의 출력물로는 등가강성 및 워핑함수가 있다. 먼저 등가강성은 Matlab화면에 그림 8과 같이 출력되어 진다. 식 (6)에서 주어진 판의 등가강성 행렬을 주어진 입력수치에 대하여 계산하여 보여준다. 그림 9에는 두께방향 워핑함수들을 도시하였다. 그림 9(a)는 최초로 계산되어지는 6개의 워핑함수들을 보여주고 있다. 이 함수들은 3차원 포아송 효과를 잘 보여주고 있다. 반면에 그림 9(b)에는 3차 워핑함수들을 보여주고 있으며, 이 함수들은 판 두께방향으로의 전단변형을 포함하고 있음을 알 수 있다. 또한 3개의 축력에 대응하는 함수들은 면내 고차 워핑을 잘 보여주고 있다.

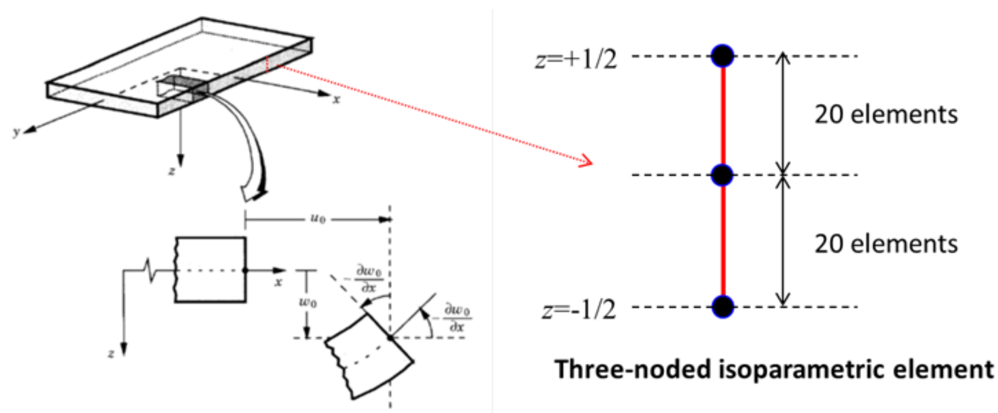

그림 7 등방성 판에 대한 1차원 3절점 유한요소를 이용한 이산화

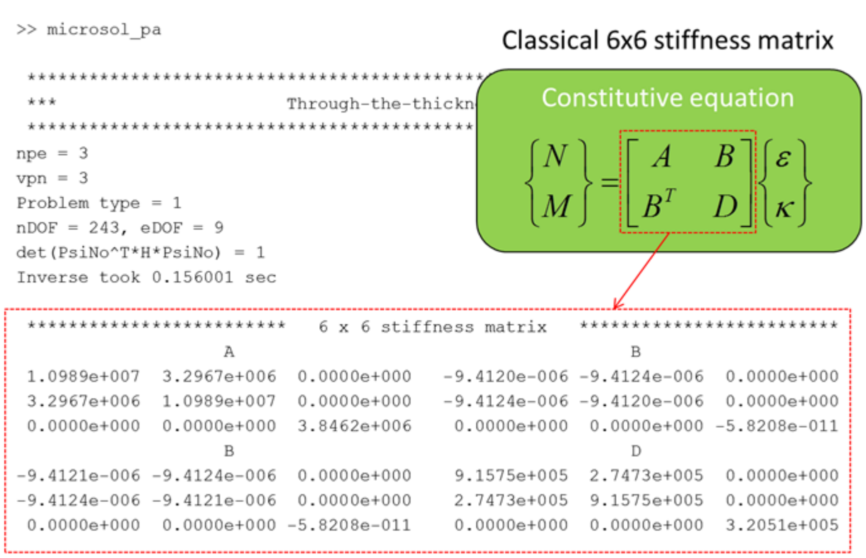

그림 8 등가강성의 계산 예제 (Matlab화면 출력결과)

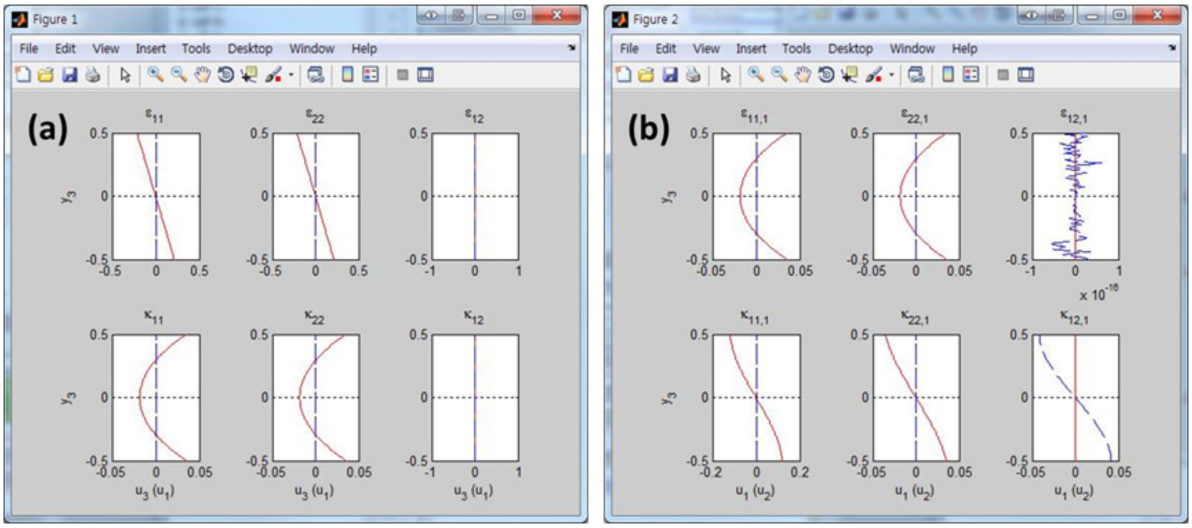

그림 9 등방성판의 두께방향 워핑함수들: (a) 2차 워핑함수, (b) 3차 워핑함수

4. 맺음말

본 기사에서는 판 이론의 발달과정을 간략하게 소개하고, 판 구조물의 두께방향 워핑함수 및 등가강성 계산법을 섭동법에 기초하여 소개하였다. 일반 이방성 판에 대한 워핑함수(고차 워핑 포함) 및 등가강성 계산 프로그램은 본 기사에서 소개한 프로그램이 유일하다. 이 프로그램의 장점은 Matlab기반이기 때문에 소스코드의 이해가 쉽고, 많은 응용분야에 쉽게 적용할 수 있다는 장점이 있다.

본 기사에서 지면상의 제약으로 소개하지 못한 복잡한 적층배열의 결과를 보면 공학적 직관에 의해서는 가정이 힘든 워핑함수들도 제시된 프로그램을 통해 성공적으로 계산할 수 있었다. 본 기사에서 소개한 Matlab 프로그램을 이용하면 복합재료의 임의의 적층배열을 가지는 판과 더불어 일반적인 이방성(general anisotropic) 판에 대한 두께방향 워핑함수 계산이 가능하다. 입력 데이터 또한 일반 유한요소법의 그것과 유사하기 때문에 수치 실험용 프로그램으로 유용할 것으로 판단된다. 프로그램이 필요한 독자들은 저자에게 전자메일(junsik.kim@kumoh.ac.kr)로 연락하면 무료로 배포 받을 수 있다.

참 고 문 헌

1. Timoshenko, S. P., 1953, *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill, New York.
2. Pearson, K., 1893, *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*, Cambridge University Press.
3. Jones, R.M., 1999, *Mechanics of Composite Materials*, 2nd Ed., Taylor & Francis.
4. Reddy, J.N., 1997, *Mechanics of Laminated Composite Plates*, CRC Press, Boca Raton.
5. Kim, J.-S. 2009, "An asymptotic analysis of anisotropic heterogeneous plates with consideration of end effects," *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 4, No. 9, pp. 1535~1553.

[담당 : **김준식**, 편집위원]