대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 21 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 21, No. 1, 67-86. Feb 2011

초등학교 1학년 학생들의 수학적 패턴 인식과 사고 과정 분석

최 병 훈* · 방 정 숙**

본 논문의 목적은 초등학교 1학년 학생들의 수학적 패턴 인식과 사고 과정을 살펴보는 것이다. 이를 위해 반복, 증가, 변형 패턴을 각각 그림과 숫자형태로 구별하여 116명 학생들의 패턴 인식 경향을 분석하였고, 4명의 학생들과 면담을 통해 패턴 인식과 관련된 사고 과정을 분석하였다. 패턴 인식에 관한 연구결과 학생들은 반복, 증가, 변형패턴 순으로 인식이 높았다. 또한 반복과 증가패턴에서는 그림과 숫자 형태간에 유의미한 차이가 없었으나, 변형패턴에서는 그림 형태에서 더 높은 점수를 얻었다. 패턴에 따른 사고과정을 분석한 결과 학생들은 패턴을 하나의 묶음으로 생각하는 경향이 있었고, 세기 전략을 통해 문제를 해결하고자 하였다. 이와 같은 연구 결과를 통해 본 논문은 1학년 학생들이 패턴을 어떻게 인식하고 사고하는지에 대한 경험적 근거를 제공한다.

Ⅰ. 서론

우리는 주변에서 수많은 패턴과 함께 살아가고 있다. 패턴이란 일정한 규칙으로 수, 도형, 무늬, 소리, 동작 등을 늘어놓은 배열을 뜻하는 것으로 주변의 사물이나 사건에는 일정한 규칙을 가지고 반복되는 것이 많으며 여러 가지 흥미 있는 패턴을 발견할 수 있다(이경우, 1985).

패턴에 대한 인식, 비교, 분석은 학생들의 지적 발달에 중요한 요소이다. 구체적으로 학생들이 구체적인 대상과 그림을 활용하여 수학적 상황을 표현하면서 기호와 친숙해지는 데 도움을 주며 이는 대수 학습에서 상징적 표현의 바탕이 되기도 한다(NCTM, 2000). 또한 패턴을 인식하는 능력은 수학의 핵심적인 기술로서 패턴을 통하여 수학적인 관계 및 규칙성에 집중함으로써 문제 해결력을 기르고 추론 능력을 기를 수 있다. 그리고 수학에서는 대상 자체보다는 주로 대상간의 관계에 대해 논의하며, 그 관계를 해석하는 것이 수학적 개념을 형성하는 기본이 된다(김성준, 2002). 이런 측면에서 학생들이 패턴을 인식하고 표현하며 확장하는 활동이 중요하다.

학교교육 이전에 학생들은 자연스럽게 노래, 챈트 등 반복적이고 변화하는 패턴을 경험하면서 초보적인 패턴에 관련한 아이디어를 얻는다. Warren과 Cooper(2008)의 연구에서 5살 아동은 반복패턴과 증가패턴을 동시에 탐구할 수 있었을 뿐만 아니라 반복패턴을 반복된 부분들로 구분하고 이렇게 구분된 부분들을 증가시킬 수 있다는 것을 밝혔다(패턴 유형에 대한 설명은 II장 참조). 초등학교 이전의 유아들에게 적용하는 패턴의 대부분은 반복적 연속성을 가지는 패턴만을 다루고 있으며 구체물이나 청각, 또는 동작활동으로 제시되는 패턴에 대한 인식 능력연구가 대부분이다(이윤정, 2006; 최혜진, 이혜은, 유수경, 2007).

* 한국교원대학교 대학원, aquinas99@edunavi.kr
** 한국교원대학교, jeongsuk@knue.ac.kr

한편, 학생들은 학교교육을 받으면서 패턴에 대한 교육을 받게 되고 이에 따라 패턴 인식이 점차 확장되어 나가게 된다. 최혜진 외(2007)는 만5세의 아동과 초등학교 1학년 학생들의 사물, 도형, 숫자에 따른 패턴 인식능력을 비교하였는데, 그 결과 초등학교 1학년 학생들의 인식 능력이 더 높게 나타났으며, 패턴의 인식능력발달은 반복유형, 관계유형, 변형유형 순으로 나타났다. 이러한 연구결과는 학교교육을 시작하는 초등학교 1학년 학생들의 전반적인 패턴 인식의 유형을 알 수 있다는 점에서 의미가 있으나 통계적 자료에 의한 분석에 그쳐 구체적으로 학생들이 패턴인식에서 어떤 점을 어려워했고 어떤 방법으로 인식했는지에 대한 정보가 부족하다. 이외에 초등학생을 대상으로 한 대부분의 패턴과 관련한 연구는 고학년을 대상으로 하였다(예, 김남균, 김은숙, 2009; 김상미, 1997; 원지영, 2006).

제7차 및 2007 개정 교육과정에서 초등학교 1학년부터 '규칙찾기'와 관련하여 진술되어 있음에도 불구하고(교육부, 1999; 교육과학기술부, 2008) 초등학교 1학년을 대상으로 한 연구는 많이 부족하다. 이는 초등학교 입문기의 학생들이 교육과정을 통해 패턴을 학습하였을 때 어떻게 인식하는지 그리고 어떻게 사고하는지에 대한 연구의 필요성을 부각시키며 이러한 연구를 통해 패턴을 어떠한 방법으로 지도해야 할지에 대한 시사점을 제공할 수 있을 것으로 기대된다. 따라서 본 연구에서는 초등학교 1학년 학생들이 여러 가지 패턴 유형에 따라 어떻게 패턴을 인식하는지를 알아보고, 패턴을 확장하였을 때 어떤 방법으로 문제에 접근하는가를 살펴보고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 패턴의 유형

패턴의 유형은 그 분류기준을 어디에 두느냐에 따라 다양한 방법으로 분류할 수 있다. 많이 연구되는 것은 속성에 따라 또는 생성방식에 따라 분류하는 방식이다. 예를 들어, 패턴을 속성에 따라 분류하면 기하적 속성(도형의 모양이나 대칭을 바탕으로 하는 패턴), 관계적 속성(순서나 함수를 바탕으로 하는 패턴), 물리적 속성(색, 길이, 수 등을 바탕으로 하는 패턴), 정서적 속성(좋아하는 것, 행복 등과 같이 정서적인 측면을 고려하는 패턴) 등으로 구분할 수 있다(Reys, Lindquist, Lambdin, & smith, 2009).

한편, 패턴을 생성방식에 따라 분류하면, 반복패턴(기본 단위나 기본 규칙의 변화 없이 그대로 유지되면서 반복되는 패턴), 증가 또는 변형패턴(기본 단위나 기본 규칙이 증가 또는 변형되면서 만들어지는 패턴), 관계패턴(두 개의 쌍 사이에 어떤 연결이 이루어지면서 만들어지는 패턴) 등으로 구분할 수 있다(최혜진 외, 2007; Reys et al., 2009; Warren & Copper, 2008). 이외에 대칭패턴(기본 단위가 대칭되면서 만들어지는 패턴), 회전패턴(기본 단위가 회전되어 만들어지는 패턴), 카오스 현상에 의한 패턴(프랙탈과 같이 자연에서 볼 수 있는 비정규적인 패턴) 등으로 구분하기도 한다(김상미, 1997).

본 연구에서는 패턴의 분류를 수 개념이 포함된 내용을 기본적으로 하여 표현 형태에 따라 숫자와 모양으로 나누었는데, 여기서 숫자가 아닌 도형, 그림, 무늬 등으로 표현된 것은 모두 모양으로 간주하였다. 또한 생성방식에 따라 반복패턴, 증가패턴, 변형패턴으로 구별하여 알아보고자 하였다.

2. 패턴의 일반화

패턴과 관련하여 핵심적인 수학 활동 중의 하나는 일반화에 대한 탐구이다. 일반화는 학생들이 기호로 표시하고 선행지식과의 연결을 도모할 수 있는 중요한 부분이며, 이러한 일반화를 위한 전형적인 패턴 활동이 학생들로 하여금 다양한 규칙을 찾아낼 수 있게 만든다(Lannin, 2005). 학생들은 패턴 탐구과정에서 패턴을 서술하는 일반적인 규칙을 찾게 된다. 이 과정에서 학생들은 기호로 일반화를 기록하기보다 먼저 일상 언어로 규칙을 설명한다. 그러나 패턴 형태가 복잡해지거나 일반화가 필요하게 되면서 학생들은 구어적 형태의 반복 접근 대신 규칙을 형식적으로 표현하는 방법을 필요로 한다(강현영, 2007). 이러한 패턴의 일반화는 사고의 과정을 표현하는 것이며 이를 통해 패턴을 좀 더 간단히 나타내고자 하는 학생들의 전략이 되는 것이다. 특히 학생들에게 가장 쉽게 받아들여지는 시각적인 패턴은 수의 열이나 표보다 더 생생하고 단순하며, 실제적이고 창조적이며 또한 상징기호보다는 더 기초적이라고 생각한다(Orton, Orton, & Roper, 1999). <표Ⅱ-1>은 패턴의 일반화 단계를 4단계로 나누어 살펴본 것이다(Friedlander & Tabach, 2001; 김성준, 2003, 재인용). 구체적으로 패턴에 대해 일반화를 시작하는 단계, 일반화를 형성하는 단계, 패턴을 명확하게 하는 단계, 그리고 이러한 일반화에 대한 정당화 단계로 구분된다. 또한 각 단계에서 또는 단계와 단계 사이에서 여러 가지 어려움이 발생할 수 있는데, 그 어려움을 Lee(1996)는 인지 수준, 언어화 수준, 기호화 수준으로 구분하였다(김성준, 2003, 재인용). 구체적으로 살펴보면, 먼저 주어진 패턴에서 그 패턴이 의도하고 있는 내용을 파악하느냐 못하느냐 하는 것은 인지 수준에서 일어나는 어려움으로, 이는 1단계에서 2단계로 넘어가는 과정에서 일어난다. 그리고 패턴을 일반화하기 위해서는 그 패턴을 언어 형태로 명확히 인식하고 표현하는 것이 필요한데, 이는 언어화 수준에서 학생들이 경험하는 어려움에 해당한다. 이것은 대개 2단계에서 3단계로 넘어가는 과정에서 그리고 3단계의 전반부에서 나타난다. 마지막으로 이렇게 언어화된 패턴을 기호 등을 이용한 대수적 표현으로 패턴을 일반화해서 나타내는 과정이 필요한데, 이것은 학생들이 기호화의 수준에서 경험하는 어려움으로 3단계 후반부에서 그리고 4단계에서 나타난다. 본 연구는 초등학교 1학년 학생들이 패턴을 시작하는 단계에서 주어진 패턴을 잘 파악하고 있는지 그리고 패턴을 확장할 때 어떤 사고를 하는가를 살펴보는 것이므로 <표Ⅱ-1>의 1단계와 2단계, 그리고 그 단계 이행에서 어떤 어려움을 겪는지에 주목한다.

<표Ⅱ-1 > 패턴의 일반화 단계

단계		내용	다음 단계이행에서의 어려움
1	시작하는 단계	학생들에게 특별한 예를 제시하거나 학생들 스스로 이러한 예들을 만든다.	주어진 패턴에서 그 패턴이 의도하고 있는 내용을 파악하는 것(인지 수준의 어려움)
2	일반화를 형성하는 단계	주어진 것 외에 또 다른 예를 생각하고 해결한다. 그리고 이를 통해 일반화를 생각하게 된다.	언어 형태로 명확히 인식하고 표현하는 것(언어화 수준의 어려움)
3	일반화를 명확하게 하는 단계	관찰된 패턴을 언어 또는 기호로 기술한다.	언어화된 패턴을 기호 등을 이용하여 대수적으로 표현하는 것(기호화 수준의 어려움)
4	정당화의 단계	일반화된 식에 구체적인 패턴을 적용하고 확인한다.	

3. 초등학교 1, 2학년에서 다루는 패턴

우선 2007년 개정 교육과정에서 패턴과 관련된 영역은 규칙성과 문제해결 영역이다. 이 중에서 본 연구와 직접적으로 관련된 초등학교 1, 2학년의 내용을 살펴보면 <표 II-2>와 같다.

주로 무늬, 수, 물체 등에서의 다양한 규칙 찾기, 규칙을 정하여 배열하기, 다양한 변화 규칙을 찾고 설명하기 등이 이루어진다. 1학년에서는 "일정한 규칙을 가지고 반복되는 동물 울음소리를 그림이나 기호로 나타내보게 한다"(교육과학기술부, 2008:71)라고 제시되어 있고, 2학년에서는 "발전해가는 규칙에서도 그 규칙을 찾아 말로 나타내게 해 볼 수 있다"(교육과학기술부, 2008:81)라고 설명되어 있다. 즉, 반복패턴의 형태는 1학년에서, 증가패턴의 형태는 2학년에서 학습하도록 하고 있다. 그러나 본 연구는 선행연구를 바탕으로 반복패턴 뿐만 아니라 증가패턴과 반복·증가패턴을 응용한 변형패턴에서도 1학년 학생들이 어떻게 인식하고 확장하는지 알고자 하였다.

<표 II-2> 교육과정에서 패턴과 관련한 1, 2학년 내용

학년	내 용
1	• 여러 가지 물체 무늬, 수의 배열에서 규칙을 찾고, 그 규칙에 따라 배열하기 • 자신이 정한 규칙에 따라 물체, 무늬, 수 등을 배열하기 • 100까지의 수 배열표에서 수의 규칙을 찾고 말하기
2	• 물체나 무늬의 다양한 변화 규칙을 찾아 설명하기 • 수 배열이나 수 배열표에서 규칙을 찾고, 그 규칙에 따라 수를 배열하기 • 곱셈표에서 여러 가지 규칙을 찾고 설명하기

다음으로, 초등학교 1, 2학년 교과서에서 패턴과 관련하여 내용을 살펴보면 다음과 같다. 1학년 1학기의 경우 '3. 여러 가지 모양' 단원에서 '규칙을 찾을 수 있어요.'라는 차시주제로 패턴활동이 제시되는데, 구체적으로 신체 활동을 통해서 규칙 알아보기(교사의 시범을 학생들이 따라 하기), 일곱 난쟁이들이 만든 울타리 모양을 보고 규칙을 발견하기, 세로로 놓인 규칙을 찾아 □안에 놓아야 할 모양 찾아보기, 규칙에 따라 □안에 놓아야 할 모양 찾아보기 등의 활동이 이루어진다([그림 II-1] 참조; 교육과학기술부, 2010a: 42-45). 모든 활동이 ababab, abbabb, aabaab, abcabc 등의 반복패턴에 의한 활동이다.

3. 여러 가지 모양

[그림 II-1] 1학년 1학기 수학 교과서의 반복패턴

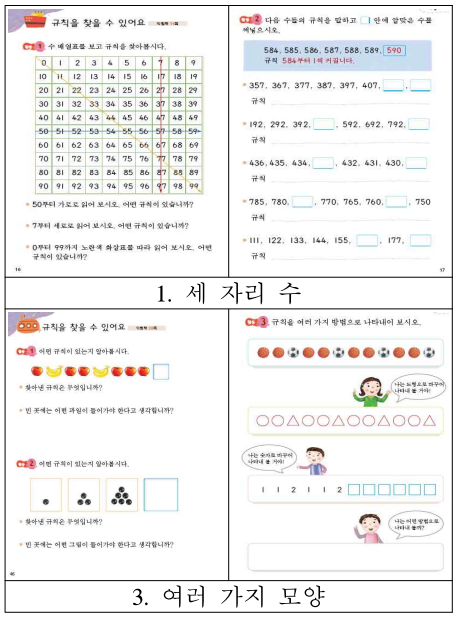
1학년 2학기의 경우 '1. 100까지의 수', '2. 여러 가지 모양', '4.덧셈과 뺄셈(1)'에서 패턴과 관련한 활동을 찾을 수 있다([그림 II-2] 참조; 교육과학기술부, 2010b: 14-15, 30-31, 70). 1단원에서는 수 배열표를 이용하여 수들 사이에서의 규칙 찾기와 규칙을 정하여 숫자카드를 늘어놓는 활동을 통해 일정한 수가 증가되는 증가패턴과 관련한 활동을 한다. 2단원에서는 모양이

나 물건을 이용한 abab, aabbaabb, aabaab 형태의 반복패턴과 규칙에 따라 빈칸에 색칠하기와 규칙을 찾아 빈칸에 알맞은 모양 그려 넣기 등의 규칙을 보고 똑같은 규칙을 찾아보는 활동을 한다. 그리고 4단원의 탐구활동에서 안내되는 규칙 찾기는 간단한 세 수의 덧셈과 뺄셈을 통해 삼각형 모양의 수 탑에서 규칙을 찾아보는 활동을 하도록 하여 연산과 관련한 규칙성 탐구활동을 하도록 하고 있다.

[그림Ⅱ-2] 1학년 2학기 수학 교과서의 반복 및 증가패턴

2학년 1학기의 경우, '1. 세 자리 수', '3. 여러 가지 모양'에서 패턴과 관련한 활동을 찾을 수 있다([그림Ⅱ-3] 참조; 교육과학기술부, 2010c: 16-17, 46-47).

1단원의 수 배열표를 보고 규칙을 찾기 위한 질문의 내용[2]이 1학년 2학기의 수 배열표에서 나오는 질문과 유사하여 학년간의 차이를 크게 나타내지 않고 있다. 그러나 나열된 수의 규칙을 찾는 활동은 세 자리의 수를 이용한 규칙 찾기 활동이기 때문에 1학년보다 수의 범위가 확장된 상태에서 규칙 찾기 활동을 다룬다는 것을 알 수 있다. 3단원에서는 그림이나 기호, 수를 이용하여 규칙을 찾도록 하고 있는데, abaabaaab등의 증가패턴과 바둑돌을 이용한 삼각수형태의 증가패턴을 제시하고 있다. 그리고 aabaab 형태의 반복패턴을 그림, 기호, 숫자 등의 다양한 방법으로 나타내어보는 활동을 제시하고 있다.

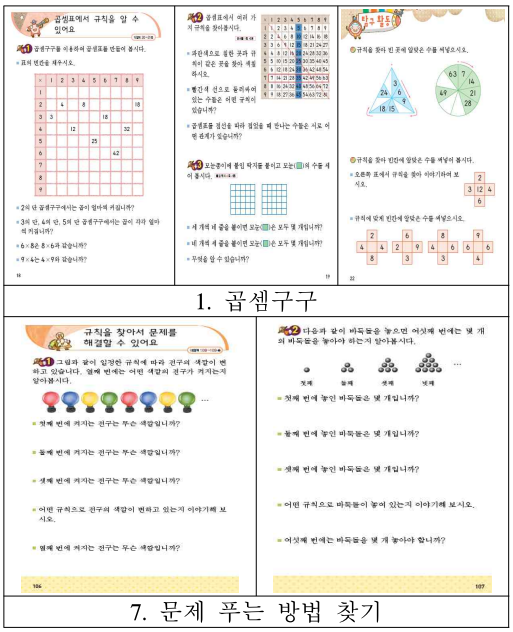


[그림Ⅱ-3] 2학년 1학기 수학교과서의 반복 및 증가패턴

2학년 2학기의 경우 '1. 곱셈구구', '7. 문제 푸는 방법 찾기'에서 패턴과 관련한 활동이 이루어지고 있다([그림Ⅱ-4] 참조; 교육과학기술부, 2010d: 18-19, 33, 106-107). 1단원에서는 곱

2) 예를 들어, 1학년 2학기 수 배열표와 관련한 내용에서 '빨간색(61~70까지의 가로줄) 선으로 둘러싸인 수들에는 어떤 규칙이 있습니까?', '파란색(7~97까지 세로줄) 선으로 둘러싸인 수들에는 어떤 규칙이 있습니까?'의 질문과 2학년 1학기 수 배열표에서 '50부터 가로로 읽어보시오, 어떤 규칙이 있습니까?' '7부터 세로로 읽어보시오. 어떤 규칙이 있습니까?'

셈표의 가로줄과 세로줄에서의 규칙, 대각선을 중심으로 접었을 때 만나는 수들의 관계 등을 찾아보는 활동을 한다. 그리고 7단원에서는 규칙을 찾아 문제를 해결하는 활동으로 색전구를 이용한 abcdabcd의 반복패턴에서 몇 째 번의 전구는 어떤 색인지를 물어보고, 2학년 1학기의 2단원에서 다루었던 바둑돌을 이용한 삼각수 형태의 패턴을 몇 째 번의 바둑돌은 몇 개가 놓이는지를 물어보고 있다.



[그림Ⅱ-4] 2학년 2학기 수학교과서의 반복 및 증가패턴

지금까지 살펴본 1, 2학년의 수학교과서에서 나타난 패턴활동을 정리하면 1학년 1학기에는 기본적인 반복패턴이 모양을 통해 제시되었고, 1학년 2학기부터는 수 배열과 모양을 이용한 패턴활동이 같이 이루어지고 있음을 알 수 있다. 또한 수 배열표는 1학년과 2학년 교과서에 모두 등장하고 있어 패턴활동에서 수 배열표의 활동이 기본 패턴을 학습하는 저학년 학생들에게 의미가 있다는 것을 시사한다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구대상

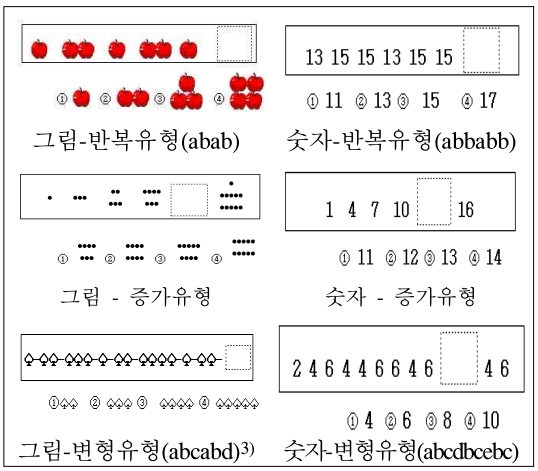
본 검사의 대상은 대구광역시 중구에 소재한 ㄱ초등학교 1학년 129명을 대상으로 하였으나 결석 또는 검사지의 응답이 완전하지 않은 학생 13명을 제외한 116명을 연구대상으로 하였다. 이 초등학교는 일반 다른 초등학교와는 달리 학생들의 거주지가 한 지역에 집중해 있지 않고 대구 지역의 전체 지역에 분포하고 있다는 특징이 있다. 전반적인 패턴 인식을 조사하는 A형 검사지는 116명을 연구대상으로 하였고, 패턴을 좀 더 확장하였을 때 패턴의 속성에 대해 어떻게 사고하는지를 면밀히 알아보기 위한 B형 검사지는 4명을 연구대상으로 하였다. 이 4명의 연구대상은 A형 검사지를 모두 맞힌 학생 3명과 1개 틀린 학생 1명으로 자신의 생각을 비교적 잘 표현하는 학생들로 구성하였다. 이는 B형 검사지의 목적을 고려해 볼 때, 학생들이 주어진 패턴을 잘 인식하는 것이 기초가 되어 있어야 그와 같은 패턴을 확장할 때 어떻게 사고하는지 알아볼 수 있을 것이라고 예상되었기 때문이다.

2. 연구도구

본 연구에서 사용한 검사도구는 두 가지이다. A형 검사지는 초등학교 1학년에서 다루는 패턴의 내용과 앞서 기술된 패턴의 유형에 관한 선행연구를 참고로 제작하였다. 구체적으로 패턴의 표현 형태는 그림과 숫자로 구분하였고, 그에 따라 반복, 증가, 변형 패턴으로 나누었는데, 각 패턴별로 10문항씩 모두 30문항으로 구성하였다(<표Ⅲ-1> 참조). 검사지에 사용한 유형별 패턴 문항의 예는 [그림Ⅲ-1]과 같다.

<표Ⅲ-1> 패턴사고검사의 유형별 문항 수

검사 유형	표현 형태	패턴유형	문항 수	
A형	그림	반복(aabbcc, ababab, abcabc, abbabb, abcd-abcd)	5	15
		증가	5	
		변형	5	
	숫자	반복(aabbcc, ababab, abcabc, abbabb, abcd-abcd)	5	15
		증가	5	
		변형	5	
B형		반복(abcabc, aabbcc)	2	6
		증가	2	
		변형	2	



[그림Ⅲ-1] 패턴 유형별 문항의 예(A형)

A형 검사지가 학생들의 전반적인 패턴 인식에 대해 알아보기 위한 것인 반면에, B형 검사지는 패턴을 좀 더 확장하였을 때 패턴의 속성에 대해 학생들이 어떻게 사고하는지를 알아보기 위해 개발되었다. B형 검사지에서는 반복, 증가, 변형 패턴 유형별로 각 2문항씩 전체 6문항을 제작하였는데(<표Ⅲ-1> 참조), 이 중에서 그림형태 5문항, 숫자형태 1문항으로 구성하였다. 그림형태를 많이 제작한 이유는 선행연구에서 학생들이 숫자의 형태보다 그림이나 도형의 형태로 제시된 패턴을 더 쉽게 인식하는 것으로 드러났기 때문이다. 그리고 숫자형태는 변형패턴에서 활용하였는데, 이는 학생들이 변형패턴을 가장 어려워한다는 선행연구 결과를 참조로 abacad의 형태로 각각 그림과 숫자형태로 제작하여 학생들이 어떤 측면에서 어려움을 겪는지 분석하려 했기 때문이다. 한편, B형 검사지의 각 문항은 4개의 하위 문항을 포함하고 있는데, 문항의 내용은 (1) 규칙에 알맞은 모양 찾기, (2) 어떤 규칙이 있는지 찾기, (3) 10번째, 혹은 15번째 위치에 있는 모양 찾기, (4) 20번째에 위치하는 모양이 네모모양은 몇 개인가? 왜 그렇게 생각하는지 적어보기(증가, 변형패턴) 등으로 구성하였다.

3. 연구절차

개발된 검사도구의 타당성 검토를 위해 패턴 유형 분류 및 문항 적절성에 대해 초등수학교육을 전공한 교사 3인과 전문가 1인에게 검토를 받아 제작하였으며 본 검사를 실시하기 전 초등학교 1학년 학생 4명을 대상으로 예비검사를 실시하여 각 패턴 문항에 대해 학생들이 규칙을 어떻게 생각하는지에 대한 질문을 정리하여 B형 검사지로 제작하고 다양한 형태로 해석될 수 있는 문항은 수정하였다.

본 검사의 시기는 2009년 10월경으로 학생들은 여러 가지 모양을 통한 규칙 찾기, 수 배열표에서 규칙 찾기 등을 학습한 이후이다. 본

3) 의도한 유형은 abcabdabe의 형태로 3번째 항마다 변형되는 것이지만, 검사지에 제시된 패턴이 한정되어 있기에 예를 들어 abcabd가 하나의 주기로써 반복되는 형태로 해석될 소지가 있다. 그러나 실제 학생들의 반응이나 면담결과를 보면 이와 같은 반복주기를 인식하기보다는 일정한 패턴을 찾지 못하여 그냥 처음에 나온 abc에 초점을 두어 c를 답으로 하는 경향이 있었다.

검사는 연구자의 의도를 잘 설명하여 담임교사가 직접 실시하였으며, 검사 시간은 40분으로 하였다. A형 검사지는 학생들의 응답이 맞으면 1점, 틀리면 0점으로 채점하여 SPSS 12.0K 통계프로그램을 사용하여 대응표본 T-검정으로 분석하였다. 또한 각 문항에 대한 응답률을 표시하여 학생들이 많은 오답을 낸 문항에 대해 분석하였다. A형 검사지의 문항 신뢰도는 Cronbach α=.772 로 수용할만한 것으로 나타났다. B형 검사지는 연구대상으로 선정된 4명의 학생들에게 검사지를 해결하게 한 후 검사지에 잘 나타나지 않은 부분에 대해서 개별 면담을 하는 형태로 실시하였다.

Ⅳ. 결과 분석

1. 패턴유형별 표현 형태에 따른 패턴 인식 능력

가. 반복패턴

반복패턴과 관련한 문항에서 문항별 정답률을 살펴보면 <표Ⅳ-1>과 같다. 모든 문항에서 94%이상의 높은 정답률을 보였으며, 그림형태와 숫자형태에 따른 t-검정 결과는 <표Ⅳ-2>와 같다. 이 결과 초등학교 1학년 학생들은 aabbcc, abab, abcabc, abbabb, abcdabcd형으로 제시된 반복패턴이 그림이냐 숫자이냐에 관계없이 높은 정답률을 보였으며, 각 유형별 패턴의 평균점수는 그림이 조금 높게 나타났으나 유의미한 차이는 나타나지 않았다. 이것은 형태에 따라 학생들의 패턴 인식 차이가 없다는 것을 나타내며 초등학교 1학년 학생들이 다른 패턴에 비해 반복패턴에 대한 인식능력이 매우 높다는 최혜진 외(2007)의 연구와 일치한다.

<표Ⅳ-1> 반복패턴과 표현 형태에 따른 문항에서의 정답률

문항 \ 보기		① 명(%)	② 명(%)	③ 명(%)	④ 명(%)
그림	1번(aabbcc)	0	115 (99.1)	1 (0.9)	0
	2번(abab)	0	116 (100)	0	0
	3번(abcabc)	112 (96.6)	4 (3.4)	0	0
	4번(abbabb)	116 (100)	0	0	0
	5번(abcdabcd)	4 (3.4)	110 (94.8)	2 (1.8)	0
숫자	6번(aabbcc)	112 (96.6)	4 (3.4)	0	0
	7번(abcabc)	115 (99.1)	1 (0.9)	0	0
	8번(abcabc)	3 (2.6)	109 (94.0)	0	4 (3.4)
	9번(abbabb)	0	116 (100)	0	0
	10번(abcdabcd)	1 (0.9)	113 (97.3)	2 (1.8)	0

<표Ⅳ-2> 반복패턴에서 그림과 숫자의 형태에 따른 점수 차이비교

패턴형태	평균	표준편차	t	유의확률(p)
그림	4.91	.395	.852	.396
숫자	4.87	.407		

나. 증가패턴

증가패턴과 관련한 문항별 정답률을 살펴보면 <표Ⅳ-3>과 같다. 13번과 18번 문항을 제외한 모든 문항에서는 90%이상의 높은 정답률을 보였다. 13번 문항의 경우는 보기④를 선택한 학생이 11.2%로 나왔는데 문제를 유추해 보면 학생들은 주어진 문제에서 패턴을 찾기보다는 뒤의 수와 연결된 의미에서 선택하였다는 것을 알 수 있다. 또한 증가패턴에서도 <표Ⅳ-4>와 같이 그림과 숫자의 형태에 대한 유의미한 차

이는 발견할 수 없었다. 이는 증가패턴 역시 형태의 변화에 관계없이 학생들이 잘 인식하고 있음을 나타낸다.

<표Ⅳ-3> 증가패턴과 표현 형태에 따른 문항에서의 정답률

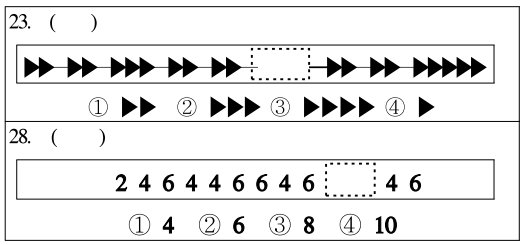
문항 \ 보기		① 명(%)	② 명(%)	③ 명(%)	④ 명(%)
그림	11번	3 (2.6)	0	3 (2.6)	110 (94.8)
	12번	0	3 (2.6)	113 (97.4)	0
	13번	2 (1.8)	9 (7.7)	92 (79.3)	13 (11.2)
	14번	0	0	116 (100)	0
	15번	114 (98.2)	0	1 (0.9)	1 (0.9)
숫자	16번	0	2 (1.8)	110 (94.8)	4 (3.4)
	17번	1 (0.9)	1 (0.9)	5 (4.3)	109 (93.9)
	18번	2 (1.8)	3 (2.6)	104 (89.6)	7 (6.0)
	19번	2 (1.8)	112 (96.4)	1 (0.9)	1 (0.9)
	20번	3 (2.6)	105 (90.5)	8 (6.9)	0

<표Ⅳ-4> 증가패턴에서 그림과 숫자의 형태에 따른 점수 차이비교

패턴형태	평균	표준편차	t	유의확률(p)
그림	4.70	.547	.628	.531
숫자	4.66	.724		

다. 변형패턴

변형패턴은 반복, 증가패턴에 비해 정답률이 비교적 낮게 나타났다.(<표Ⅳ-5> 참조) 특히, 23번, 28번의 문항([그림Ⅳ-1])에서 정답률이 낮게 나타났다. 23번 문항의 패턴은 aabaacaad로 3, 6, 9의 위치에 있는 그림들이 증가하는 패턴을 갖고 있다. 23번 문항에서 51.7%의 학생이 2번을 정답으로 선택했다. 이것으로 보아 학생들은 문제의 패턴을 찾기 위해 앞에서부터 순서대로 aab의 형태가 계속해서 반복된다는 생각을 하여 답을 선택했다고 유추할 수 있다. 이는 아직까지 초등학교 1학년 수준에서 변형패턴의 완전한 이해가 어렵다는 것을 보여준다. 또한 28번 문항의 패턴은 abc/dbc/ebc로 3개의 숫자를 묶어서 본다면 각 첫째 수가 2씩 증가하는 패턴을 갖고 있다. 그렇지만 학생들이 보기 1번을 40.5%, 2번을 25.9% 선택을 하였다. 이는 학생들이 패턴의 앞부분에 대한 변화를 살펴보기보다는 뒷부분을 살펴보는 것에 익숙하여 오답을 선택한 경우가 많았던 것으로 보인다.



[그림Ⅳ-1] 23, 28번 문항

<표Ⅳ-5> 변형패턴과 표현 형태에 따른 문항에서의 정답률

문항 \ 보기		① 명(%)	② 명(%)	③ 명(%)	④ 명(%)
그림	21번	15 (12.9)	96 (82.8)	5 (4.3)	0
	22번	74 (63.8)	1 (0.9)	4 (3.4)	37 (31.9)
	23번	1 (0.9)	60 (51.7)	54 (46.5)	1 (0.9)
	24번	2 (1.8)	26 (22.3)	1 (0.9)	87 (75.0)
	25번	21 (18.1)	2 (1.8)	4 (3.4)	89 (76.7)
숫자	26번	21 (18.1)	2 (1.8)	93 (80.1)	0
	27번	0	34 (29.3)	5 (4.3)	77 (66.4)
	28번	47 (40.5)	30 (25.9)	36 (31.0)	3 (2.6)
	29번	22 (19.0)	10 (8.6)	84 (72.4)	0
	30번	37 (31.9)	6 (5.1)	72 (62.1)	1 (0.9)

변형패턴은 반복패턴과 증가패턴에 비해 낮은 평균점수를 가졌으나 변형패턴 내에서의 그림형태의 평균점수가 숫자형태보다 높게 나왔으며, 유의미한 차이를 보여준다(p<.05). 이는 학생들이 그림으로 된 형태를 숫자로 된 형태보다 더 쉽게 생각하고 있다는 것을 나타내며, 숫자형태의 패턴이 더 어렵게 느껴진다는 것을 보여준다.

<표Ⅳ-6> 변형패턴에서 그림과 숫자의 형태에 따른 점수 차이비교

패턴형태	평균	표준편차	t	유의확률(p)
그림	3.45	1.274	2.531	.013
숫자	3.12	1.621		

2. 표현 형태별 패턴의 속성에 따른 패턴 인식 능력

가. 그림형태

각 패턴의 속성에서 그림형태로 된 패턴별 평균점수를 이용한 대응표본 t 검정을 한 결과는 <표Ⅳ-7>과 같다. 반복패턴과 증가패턴의 평균점수의 차이는 통계적으로 유의한 차이가 있는 것으로 나타났다(p<.05). 또한 증가패턴과 변형패턴, 변형패턴과 반복패턴의 평균점수의 차이에서도 통계적으로 유의한 차이가 있는 것으로 나타났다(p<.05). 이는 그림형태에서 반복, 증가, 변형 패턴에 대한 학생들의 인식능력에 차이가 난다는 것을 의미하며, 평균점수를 비교했을 때에도 학생들은 반복, 증가, 변형 패턴의 순으로 어려워한다는 것을 의미한다.

나. 숫자형태

숫자형태로 된 각 패턴의 속성별 문항에 대한 점수의 비교에서도 <표Ⅳ-8>과 같이 유의한 차이가 있는 것으로 나타났다(p<.05). 반복 패턴과 증가패턴 사이에서의 평균점수 차이가 가장

<표Ⅳ-7> 그림형태에서 패턴의 속성간 점수 차이 비교

패턴속성	대응차			t	유의확률(p)
	평균	표준편차	평균의 표준오차		
반복 - 증가	.207	.692	.064	3.221	.002*
증가 - 변형	1.250	1.215	.113	11.081	.000*
변형 - 반복	1.457	1.315	.122	11.935	.000*

*p<.05

작았으며(.216), 변형 패턴과 반복패턴의 평균차이가 1.750으로 가장 많이 났다. 이는 숫자형태에서 반복, 증가, 변형 패턴에 대한 학생들의 인식능력에 차이가 난다는 것을 의미하며, 평균점수를 비교했을 때에도 그림형태와 같이 학생들은 반복, 증가, 변형 패턴의 순으로 어려워한다는 것을 의미한다.

<표Ⅳ-8> 숫자형태에서 패턴의 속성간 점수 차이비교

패턴속성	대응차			t	유의확률(p)
	평균	표준편차	평균의 표준오차		
반복 - 증가	.216	.811	.075	2.863	.005*
증가 - 변형	1.534	1.546	.144	10.690	.000*
변형 - 반복	1.750	1.598	.148	11.793	.000*

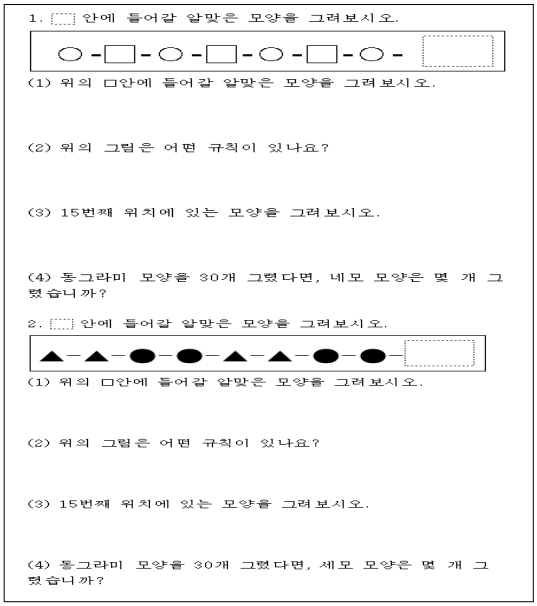
*p<.05

3. 패턴의 속성에 따른 학생들의 사고과정 분석

가. 반복패턴

반복패턴에 대한 학생들의 사고를 알아보기 위해 [그림Ⅳ-2]와 같은 문항을 제시하였다.

반복 패턴의 1, 2번 문항에서 학생들은 (1), (2)번 문항을 통해 규칙을 잘 인식하고 있었으



[그림Ⅳ-2] B형 검사지의 반복패턴 문항

나 (3)번과 (4)번 문항에서는 차이를 보였다. 1번의 (3)번 문항에서는 학생 B를 제외한 모든 학생은 동그라미(○)를 정답으로 그렸는데, 찾은 방법에는 차이가 있었다. 학생 C와 학생 D는 동그라미(○)와 네모(□)를 반복해서 15번째를 찾아내었으나, 학생 A는 각 모양의 위치에 초점을 두어, "동그라미는 한번, 세 번, 다섯 번, 일곱 번, 아홉 번, 열한 번, 열세 번, 열다섯 번 이렇게 있기 때문"이라고 설명했다. 한편, 네모(□)라고 답한 학생 B와의 면담 과정은 다음과 같다.

학생B : 동그라미, 네모가 계속 반복되니까 15번 반복되면 동그라미, 네모가 있기 때문에 네모라고 생각했어요.
교 사 : 그럼 다시 한 번 문제를 살펴볼까? 첫 번째에는 동그라미, 두 번째에는 네모, 세 번째에는 동그라미, 네 번째에는 네모 이렇게 그림이 그려져 있지? 그럼, 10번째는 어떤 모양일까?
학생B : (문제의 동그라미와 네모를 계속 그려보며) 10번째는 네모가 되요.
교 사 : 그럼 15번째는 어떤 모양일까?
학생B : (조금 전과 같이 반복적으로 그려보며) 동그라미가 되요.

학생 B의 경우 추가적인 질문을 통해 15번째의 모양을 찾게 되었다. 하지만 학생들이 반복되는 패턴을 하나의 묶음으로 생각할 수 있다는 사실을 발견할 수 있었다. 이러한 사실은 1-(4)번 문항에서 더 확인할 수 있었는데, 학생 C는 동그라미, 네모의 순서대로 반복되기 때문에 동그라미가 30개 그려지면, 네모는 동그라미 뒤에 나오기 때문에 29개 그려진다고 답한 반면에, 나머지 학생들은 동그라미 모양이 30개이기 때문에 네모 모양도 30개라고 하였다. 다음의 내용은 학생 A의 면담내용을 예로 든 것이다.

학생A : 동그라미가 30개 있으면, 동그라미 뒤에 나오는 네모도 30개일 것 같아서요.
교 사 : 그러면 너는 동그라미가 그려져 있으면 네모도 뒤에 그려져 있다고 생각한 거야?
학생A : 네

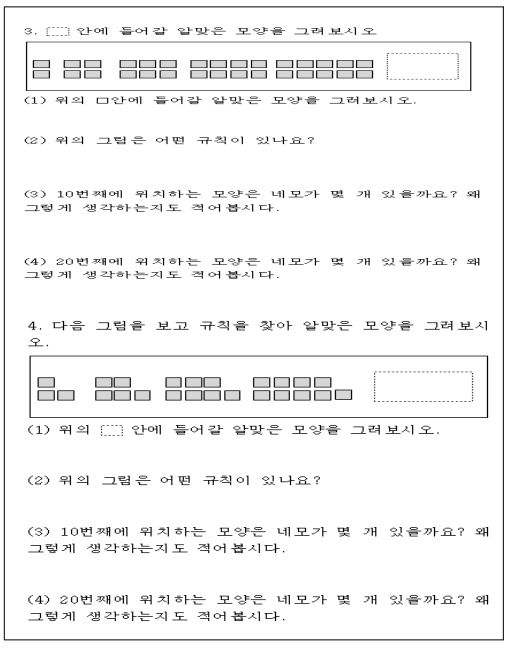
이와 같이 정답은 29개임에도 불구하고, 3명의 학생들은 모두 반복되는 패턴에서 동그라미와 네모를 하나의 묶음으로 생각하여 앞의 모양을 30개 그리면, 뒤의 모양도 30개가 그려져야 한다고 생각을 하고 있었다. 이와 같은 경향은 2번 문항에서도 비슷하게 나타났다. 2번 문제는 반복되는 패턴이 ▲-▲-●-●의 순서대로 이루어져 있고 동그라미가 뒤쪽에 있기 때문에 동그라미 모양이 30개 그려졌다면 세모모양도 30개가 그려져야 한다. 하지만 면담 결과 학생들은 1-(4)번과 같이 이것을 하나의 묶음단위로 생각하여 세모모양도 30개가 그려진다고 생각했다. 즉, 답은 바르게 찾았으나 왜 세모모양이 30개가 되는지에 대한 이유는 정확하게

나타내지 못하였다. 이는 학생들이 패턴에는 잘 주목하지만 이것을 확장하는 경우의 의도하는 내용을 파악하는 데 인지 수준의 어려움을 겪는다는 것을 나타낸다고 볼 수 있다.

또한 학생들은 세기 전략을 통해 문제를 해결하고자 하였다. 예를 들어 15번째의 모양을 찾을 때 처음부터 세거나 2개씩 뛰어 세는 전략을 사용하여 찾았으며, 이를 확장하여 추가적인 질문(30번째, 40번째의 모양)에 대해서도 그림을 그려서 해결하려 하거나 문제에 제시된 패턴을 반복적으로 세어보면서 해결하려고 하였다. 이는 아직까지 대수의 기초가 되는 곱셈이나 나눗셈을 학습하지 않은 상태의 학생들에게는 수세기 전략이 문제해결에 있어 가장 보편적인 방법이라는 것을 보여준다.

나. 증가패턴

증가패턴에 대한 학생들의 사고를 알아보기 위해 [그림Ⅳ-3]과 같은 문항을 제시하였다.


3. □ 안에 들어갈 알맞은 모양을 그려보시오.

(1) 위의 □안에 들어갈 알맞은 모양을 그려보시오.

(2) 위의 그림은 어떤 규칙이 있나요?

(3) 10번째에 위치하는 모양은 네모가 몇 개 있을까요? 왜 그렇게 생각하는지도 적어봅시다.

(4) 20번째에 위치하는 모양은 네모가 몇 개 있을까요? 왜 그렇게 생각하는지도 적어봅시다.

4. 다음 그림을 보고 규칙을 찾아 알맞은 모양을 그려보시오.

(1) 위의 □ 안에 들어갈 알맞은 모양을 그려보시오.

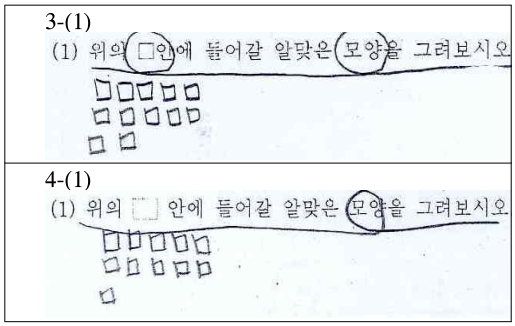
(2) 위의 그림은 어떤 규칙이 있나요?

(3) 10번째에 위치하는 모양은 네모가 몇 개 있을까요? 왜 그렇게 생각하는지도 적어봅시다.

(4) 20번째에 위치하는 모양은 네모가 몇 개 있을까요? 왜 그렇게 생각하는지도 적어봅시다.

[그림Ⅳ-3] B형 검사지의 증가패턴 문항

증가패턴의 3-(1), 4-(1)번에서 학생 A, B, D는 정확하게 모양을 나타내었지만 학생 C의 경우는 □안에 들어갈 모양의 개수는 찾았지만 모양은 정확하게 나타내지 못했다([그림Ⅳ-4] 참조).



[그림Ⅳ-4] 학생 C의 3-(1), 4-(1)에 대한 응답

다음과 같은 면담 과정에서 학생 C는 모양의 개수에만 초점을 맞추어 모양의 변화에 대해서는 미처 생각을 하지 못했음을 알 수 있었다.

교 사 : 3번의 1번 문제에서 네모 안에 들어갈 모양을 왜 이렇게 그린거야?

학생C : (잠시 생각한 뒤) 네모 안에 들어갈 모양은 모두 12개이니까요.

교 사 : (문제를 가리키며)그럼 앞의 네모모양들은 어떻게 늘어났어?

학생C : 옆으로 2개씩 늘어났어요.

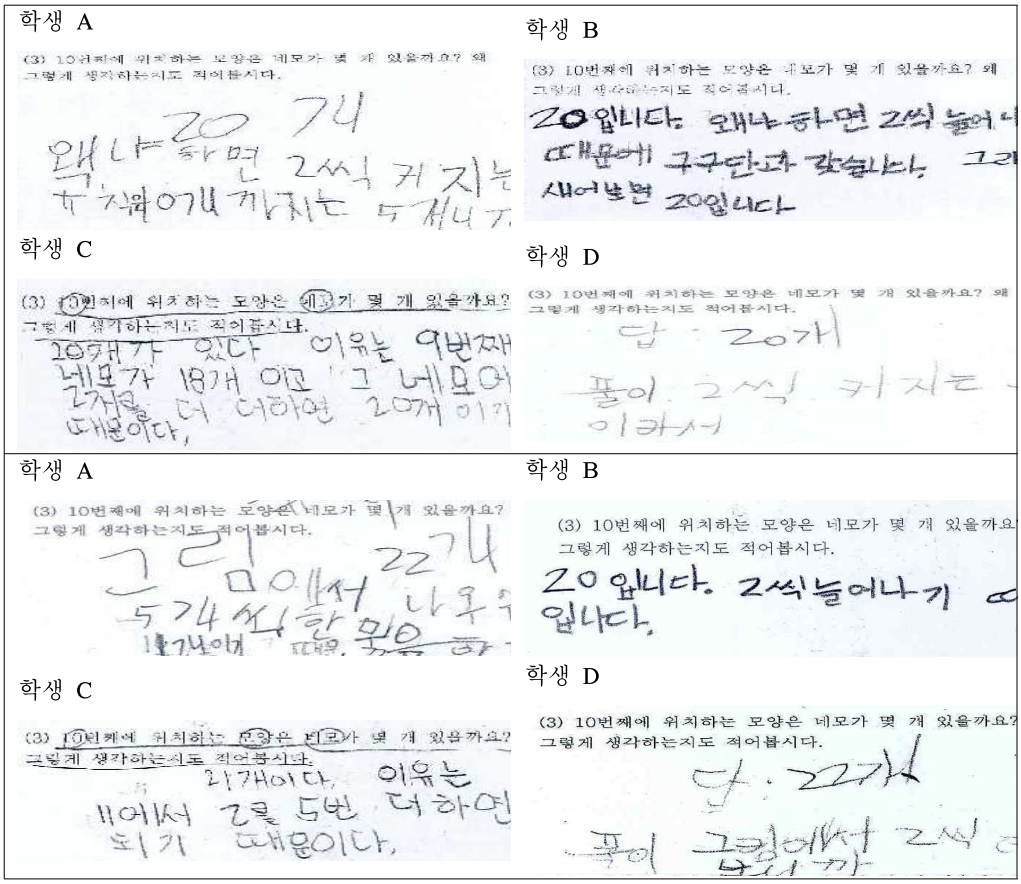
한편, 규칙을 찾는 (2)번 문항에서 4명의 모든 학생은 '2씩 커진다.', '2개씩 늘어난다.'라고 정답을 적었다. 그러나 주목할 사항은 학생 A는 3-(3)번의 정답을 찾기 위해 5번째 모양의 개수를 이용하여 10번째 모양의 개수를 잘 찾았으나 이와 같은 방법으로 4-(3)번에도 적용하여 5번째의 개수가 11개이므로 10번째는 22개라고 하였다([그림Ⅳ-5] 참조). 즉, 2개씩 늘어나는 규칙보다 10번째는 5번째의 2묶음이라고 생각하는 사고의 오류를 범하였다고 볼 수 있다.

즉, 학생 A는 증가패턴에 대한 사고의 확장에서 부적절한 전략으로 인한 일반화를 이끌어낸 것이다.

학생 B의 경우, 3-(3)번의 문제를 해결하는 과정에서 늘어나는 개수가 구구단 2단의 형태와 같다는 표현을 하기는 했지만, 면담 결과 구구단 2단을 이용하여 계산하지는 않았고 2개씩 직접 세어서 계산했음을 알 수 있었다. 4-(3)번 역시 단순히 2씩 증가하는 규칙만 생각을 하여 20이라는 오류를 범하였다. 즉, 학생 B도 패턴이 의도하는 내용을 파악하여 일반화를 하려고 하였지만 정확하게 나타내지 못한 것이다.

한편, 학생 C는 3-(3)번과 4-(3)번을 맞혔는데, 3-(3)번의 경우는 9번째의 네모를 구해서 2개를 더하였고, 4-(3)번의 경우는 5번째의 개수 11개에서 10번째는 2가 5번 더해진다는 사실을 이용하여 21이라는 개수를 구한 것을 알 수 있다. 이는 수세기전략에서 덧셈전략을 일부 이용했다는 사실을 알 수 있다. 학생 D의 경우는 2개씩 커진다는 규칙을 적용해서 문제를 해결하였다. 3-(3)번은 정답을 찾을 수 있었으나 4-(3)에서는 정답을 찾을 수가 없었다.

3-(4), 4-(4)의 문항에서, 4명의 학생들은 3-(3), 4-(3)의 해결방법을 유추하여 문제를 해결하고자 하였다는 것을 알 수 있다([그림Ⅳ-6] 참조). 그러나 주목할 사항은 학생 C의 풀이방법이었는데, 학생 C의 경우에는 (3)번의 문항에서 (4)번의 문항을 해결하는데 네모모양이 10개

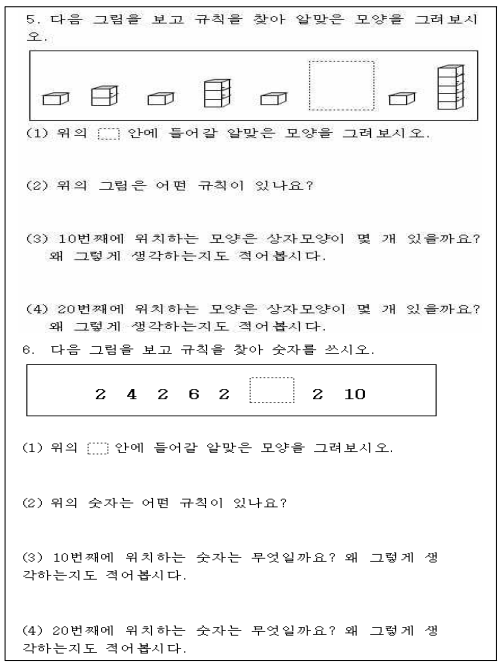


[그림Ⅳ-5] 3-(3)번(위)과 4-(3)번(아래)에 대한 학생들의 응답

가 더 많다고 답을 하였다. 면담 결과 학생 C는 10번째에서 20번째가 된다는 것은 10개 많아졌기 때문에 네모의 모양도 10번째보다 10개가 더 많아지면 된다고 생각하여 3-(3)번의 답에서 10개씩을 더해서 답을 구하였다. 그래서 "30번째에 위치하는 네모는 몇 개가 될까?"라는 질문에 "30번째는 20번째보다 10개 더 많아지니까 40개가 되요"라고 답을 하였다. 면담 과정에서 10번째에서부터 2개씩 증가하며 실제 30개가 되는 위치를 찾아보게 하였을 때 15번째라는 것을 알고 자신의 해결방법이 잘못되었다는 사실을 깨달았다. 그러나 증가패턴을 확장하여 "40번째의 네모모양의 개수는 몇 개일까?"라는 질문에는 답을 하지 못했다. 이것은 아직까지 초등학교 1학년 교육과정에서는 덧셈과 뺄셈에 대한 학습만 이루어지고 있어 곱셈적 사고가 충분히 일어나지 않아 배의 개념을 모르고 있다는 것을 보여주며 학생들이 일반화를 하기에는 수학 지식이 부족하다는 사실을 보여준다.

다. 변형패턴

변형패턴에 대한 학생들의 사고를 알아보기 위해 [그림Ⅳ-7]의 문항을 제시하였는데, 패턴


5. 다음 그림을 보고 규칙을 찾아 알맞은 모양을 그려보시오.

(1) 위의 ⬚ 안에 들어갈 알맞은 모양을 그려보시오.

(2) 위의 그림은 어떤 규칙이 있나요?

(3) 10번째에 위치하는 모양은 상자모양이 몇 개 있을까요? 왜 그렇게 생각하는지도 적어봅시다.

(4) 20번째에 위치하는 모양은 상자모양이 몇 개 있을까요? 왜 그렇게 생각하는지도 적어봅시다.

6. 다음 그림을 보고 규칙을 찾아 숫자를 쓰시오.

2 4 2 6 2 ⬚ 2 10

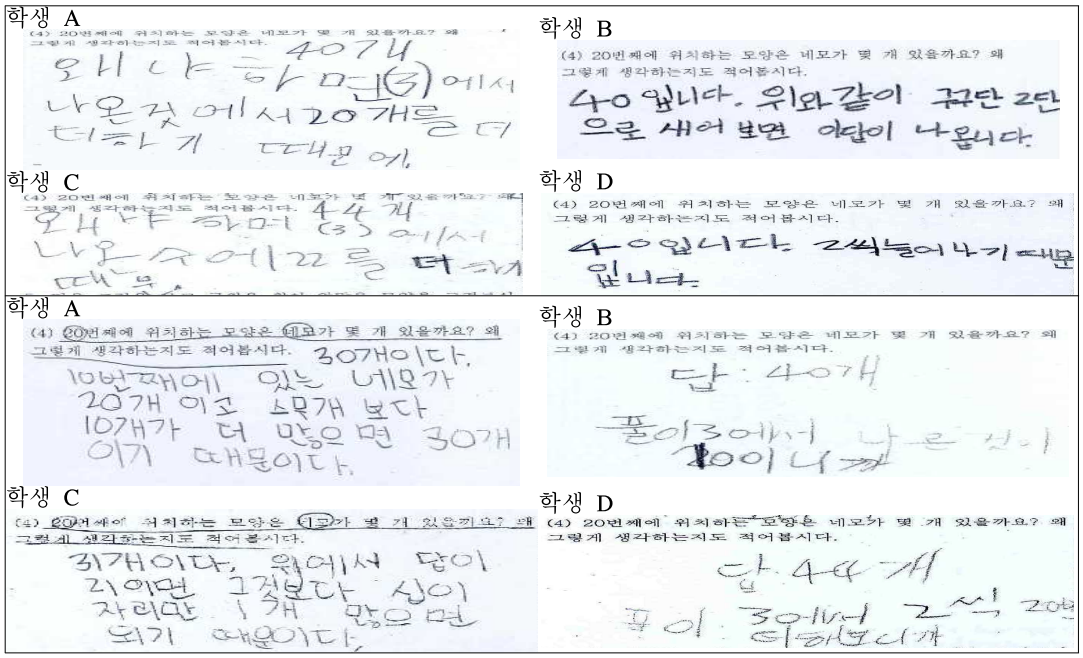
(1) 위의 ⬚ 안에 들어갈 알맞은 모양을 그려보시오.

(2) 위의 숫자는 어떤 규칙이 있나요?

(3) 10번째에 위치하는 숫자는 무엇일까요? 왜 그렇게 생각하는지도 적어봅시다.

(4) 20번째에 위치하는 숫자는 무엇일까요? 왜 그렇게 생각하는지도 적어봅시다.

[그림Ⅳ-7] B형 검사지의 변형패턴 문항



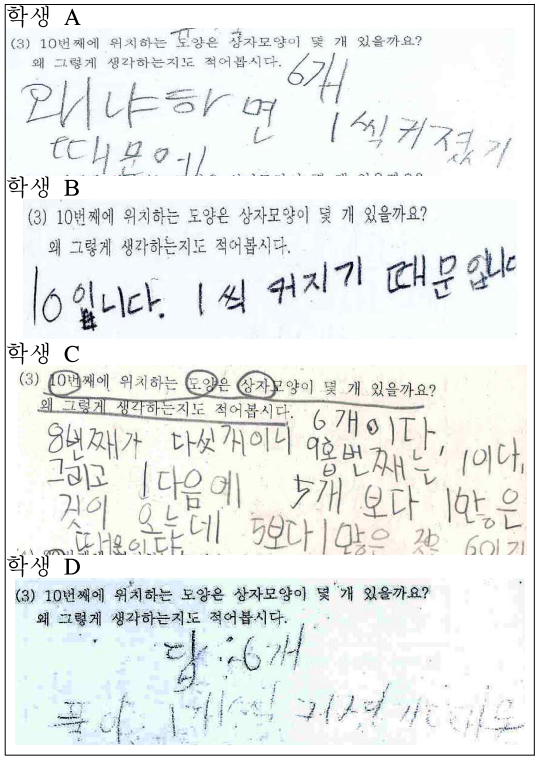
[그림Ⅳ-6] 3-(4)(위), 4-(4)(아래)번 문항에 대한 학생들의 응답

은 abacad의 형태로 동일하지만 표현 형태는 모양과 숫자를 각각 사용하였다. 이는 본 연구의 A형 검사지 분석 결과 학생들이 다른 패턴에 비해 변형패턴에 대한 인식이 상대적으로 낮다는 점을 감안하여 변형패턴의 두 가지 표현 형태에서 패턴을 확장할 때 학생들이 어떻게 사고하는지 알아보기 위함이었다. 5번 문항은 짝수 째 번에 있는 도형이 1개씩 증가하고, 6번 문항은 수 개념이 포함된 짝수 번째 수가 2씩 증가하는 변형패턴이다.

각 문항의 (1),(2)번 하위문항에 대해서 3명의 학생들은 '뒤의 것'(즉 짝수 번째 모양이나 수)이 2개씩 커진다는 사실을 발견하여 문제를 잘 해결하였다. 그러나 학생 B는 6-(1)번의 정답을 4라고 생각하고 (2)번 문항에서 그 이유를 "2, 4, 2, 6 이니까 2씩 커지기 때문"이라고 적었다. 즉, 이 학생은 앞의 4개의 수를 이용하여 2, 4, 6이 각각 2씩 커진다고 생각하여 뒤의 수나 문제에 주어진 2, 6, 10의 숫자와 무관하게 정답을 4라고 하였다.

5-(3)에서도 3명의 학생들은 정답을 바르게 찾아내었으나 학생 B는 "상자모양이 1개씩 커지기 때문에 10번째는 10개가 되요"라고 생각하여 10이라고 적었다. 주목할 사실은 학생 B 역시 다른 학생들처럼 규칙이 1개씩 증가한다는 사실을 바르게 찾아내었지만([그림Ⅳ-8] 참조), 이러한 규칙이 반복, 증가패턴과 같이 처음부터 1개씩 증가하여 누적된다고 생각하는 오류를 범한 것이다.

한편, 6-(3)에서는 모든 학생들이 정답을 찾지 못하고 동일하게 오답 20을 적었다. 학생들은 수로 주어진 형태에서도 "뒷수가 2씩 커진다"는 규칙을 진술할 수 있었지만, 이를 확장하여 적용하는 데 인지적 어려움을 겪었다. 특히 표현 형태만 다를 뿐, 문항 유형이 동일한 5-(3)에서 정답을 찾고 타당하게 설명한 학생들



[그림Ⅳ-8] 5-(3)번에 대한 학생들의 응답

조차 이 문항에서 동일하게 오답을 했다는 점은 주목할 만하다. A형 검사지 결과에서 나타났던 바와 같이 학생들이 숫자형태(추상적 표현)를 그림형태(시각적 표현)보다 더 어려워한다는 사실에서 그 원인을 유추해 볼 수 있다. 면담과정에서 학생들에게 변형되는 숫자의 위치에 초점을 맞추게 하자, 학생들은 다음과 같이 쉽게 정답을 찾아낼 수 있었다.

교 사 : 10번째의 숫자가 왜 20이 되지?
학생B : 왜냐하면 뒤의 수가 2씩 커지잖아요. 그러니까 10번째에 있는 수는 20이 되요.
교 사 : 그런데 문제를 보면 커지는 숫자는 어디어디에 있니?
학생B : (문제의 숫자를 보며) 둘, 넷, 여섯…
교 사 : 그럼 10번째 숫자를 (문제) 옆에 적어 볼까? 얼마가 되니?
학생B : (잠시 적은 뒤) 12가 되요.

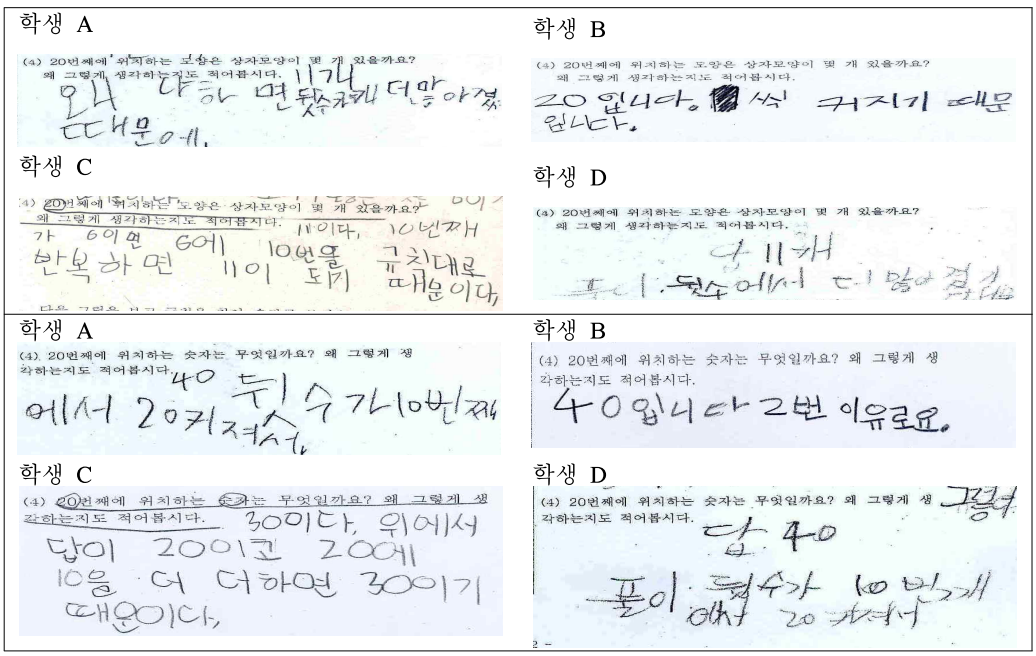
5-(4)번과 6-(4)번의 문항에 대한 분석 결과는 다음과 같다([그림Ⅳ-9] 참조). 학생 A, C, D는 5-(4)번의 20번째에 위치하는 상자모양을 11개라고 하였다. 학생들은 정답을 찾기 위해 주어진 모양을 반복적으로 더해보는 활동을 하면서 정답을 찾았다. 또한 면담과정에서도 문제를 많이 어려워하고 있어 자신의 생각을 충분하게 나타내지 못했다.

6-(4)번에서도 학생 A, B, D는 2개씩 증가한다는 기본적인 생각을 바탕으로 (3)번의 문제에서 10번째의 답이 20개였기 때문에 20번째의 답은 20이 더 커져서 40이 된다고 생각하였다. 그러나 학생 C는 3번, 4번 문제를 해결할 때와 같이 10번째와 20번째는 10의 차이가 나기 때문에 6-(3)에서 구한 답에 10을 더하는 방법으로 답을 구했다는 사실을 알 수 있었다. 이러한 사실은 비록 학생들이 1학기에 수의 순서에 대한 기수와 서수에 대한 학습을 하였지만 10번째, 20번째에 대한 의미를 변형패턴에서는 어려워하고 있다는 사실과 가법적인 사고에 의해 20번째는 10번째의 2배라기보다 10개가 더 많다는 사실만을 일반화하여 답을 구하려는 습성이 있다는 사실을 알 수 있다. 또한 변형패턴의 문제에서 그 패턴이 의도하고 있는 내용을 정확히 파악하지 못하고 있다는 것을 드러낸다.

Ⅴ. 결론

본 연구는 그림과 숫자형태로 이루어진 반복, 증가, 변형패턴에 대해 초등학교 1학년 학생들이 어떻게 인식하는지 알아보고 패턴을 확장하였을 때 학생들이 어떻게 사고하는지에 대해서 살펴보고자 하였다. 분석 결과를 통해 패턴의 유형과 학생들의 사고과정에 대해 몇 가지 시사점을 탐색하고자 한다.

첫째, 반복패턴, 증가패턴, 변형패턴에 대한 학생들의 인식은 반복>증가>변형패턴의 순서로 높은 인식을 하고 있었고, 그림과 숫자의 형태



[그림Ⅳ-9] 5-(4)(위), 6-(4)(아래)번에 대한 학생들의 응답

에 따라 그림이 숫자에 비해 조금 더 높은 점수를 보였으나 반복, 증가패턴에서는 유의미한 차이를 보이지 않았다. 그러나 변형패턴에서는 그림과 숫자형태에서 유의미한 차이를 보였다. 또한 그림과 숫자의 형태에서 패턴의 속성별 비교를 하였을 때 유의미한 차이를 보였다. 따라서 학생들은 그림으로 나타낸 패턴과 숫자로 나타낸 패턴을 해결할 때 반복, 증가, 변형패턴에서 수준의 차이를 갖고 있다.

앞서 살펴본 수학교과서 분석 결과 주된 패턴의 구성이 반복패턴 중심으로 되어 있고, 증가패턴에 대한 것은 일부(에, 2학년 1학기에서 abaabaaab 형태의 그림이나 바둑돌을 이용한 삼각수 형태) 제시되고 있다. 여러 가지 패턴 유형이나 표현 형태에 따른 본 연구 결과를 고려해 볼 때, 교과서에서 반복패턴뿐만 아니라 증가패턴이나 변형패턴에 대한 내용 구성을 경험적 자료를 바탕으로 적극적으로 모색해 보는 것이 필요하다고 생각된다. 또한 단순히 그림이나 사물로만 문제를 구성하는 대신에 수나 기호 등의 다양한 형태를 제공함으로써 학생들이 다양한 패턴을 인식할 수 있도록 도울 필요가 있다고 생각된다.

둘째, 패턴의 일반화 측면에서 살펴보면, 반복패턴의 경우, 학생들은 □안에 들어갈 모양이나 규칙을 잘 찾아내었다. 하지만 모양의 개수가 더 많아질 때 다른 모양의 개수를 찾는 활동을 어려워하였다. 즉, 많은 학생들은 반복되는 성분을 잘 찾아내지만, 그 패턴을 반복되는 부분들로 쪼개는 것을 어려워하기 때문이다(Warren & Cooper, 2008). 이러한 요소는 주어진 패턴에서 그 패턴이 의도하고 있는 내용은 파악하고 있으나 일반화를 형성하기 위해 주어진 것 외에 또 다른 예를 생각하고 연결하는데 어려움을 갖고 있다는 것이다. 또한 증가패턴의 경우 증가하는 규칙을 잘 찾아내었지만 일부 학생은 □안에 들어갈 모양을 정확히 그리지 못하였으며, 단순히 2씩 더해서 문제를 풀려고 하는 경향이 있었다. 따라서 증가패턴과 관련하여 학생들에게 지도할 때, 단계를 구성하는 성분들을 하나하나 분석하여 이를 확장하여 각 단계의 규칙을 찾도록 하는 것이 중요하다는 것을 알 수 있다. 그림형태와 숫자형태로 알아본 변형패턴의 경우, 알맞은 모양을 그리거나 규칙을 찾는 활동은 잘 찾아내었으나 패턴을 확장하여 모양을 찾는 경우에 학생들은 증가패턴의 형태로 문제를 해결하거나 반복 형태로 문제를 인식하여 해결하려는 경향이 있었다. 또한 그림형태에서 규칙을 제대로 찾고 설명한 학생들조차 비슷한 유형의 숫자형태에서 어려움을 겪는 것으로 드러났다. 학생들이 변형패턴에서 겪는 인지적 어려움을 고려해 볼 때, 우선 반복이나 증가패턴과 다른 변형패턴의 특징에 주목하게 하고, 그림형태의 시각적인 접근을 통해 변형패턴을 충분히 경험하게 한 후, 이를 숫자나 기호 형태의 추상적인 접근으로 확장해 볼 수 있을 것으로 판단된다.

셋째, 학생들에게 제공된 문제에서 모양을 찾기 위한 측면에서, 학생들은 주어진 패턴을 하나의 묶음단위로 생각하고 있다는 것을 알 수 있었다. 검사지에서 '~번째의 모양은 무엇입니까?, ~번째의 수는 무엇입니까?' 라고 질문을 했을 때, 면담을 했던 학생들 중 3명은 패턴을 하나의 묶음으로 생각하여 하나의 패턴에서 앞의 그림이 나오면 뒤의 그림도 자동으로 따라온다고 생각하는 경향이 있다. 이는 어린 학생들이 아주 일찍부터 일상 경험을 통해 능동적으로 사물들 간의 관계를 파악하고 관련성을 찾아 일반화시키는 능력과 관련될 수 있다(이윤정, 2006). 따라서 반복되는 모양들 사이의 관계만을 파악하고 있는 교과서의 질문에 "왜 그렇게 생각합니까?"와 같은 질문을 추가

하거나 “~번째의 모양은 무엇입니까?”라는 질문과 같이 패턴에서 주어진 모양이나 기호, 숫자를 찾을 수 있는 질문을 교사가 할 수 있도록 안내하여 추론의 기회를 제공할 필요가 있을 것이다.

마지막으로, 학생들이 패턴을 찾기 위해 가장 많이 사용한 전략은 덧셈적 사고를 이용한 세기 전략이었다. 가령, 2씩 커지는 규칙이 있다면 이들은 2를 여러 번 더해서 문제의 답을 찾으려고 하였다. 또한 뛰어 세기의 방법을 이용하여 문제를 해결하는 경우도 있었다. 특히, 기수와 서수의 구별에서 10번째의 수와 20번째의 수에 대한 문제에서는 패턴의 특성을 생각하기 보다는 20번째는 10번째의 2배라는 개념이 앞서 답을 찾지 못하는 경우도 있었다. 이는 학생들이 기존에 패턴의 특성을 찾는 학습과 몇 번째의 모양 혹은 수에 대한 서수의 개념은 알고 있지만 이러한 기존의 지식들 사이의 관계를 잘 연결하여 발견하는 연결성이 부족하기 때문이라는 것을 보여준다. 따라서 사고의 확장을 위해, “이러한 규칙이 더 반복(증가)된다면 9번째 오는 모양은 무엇일까요?” 와 같은 질문이 2학년의 말미에 제시될 것이 아니라 서수를 학습한 1학년부터 체계적으로 안내되어 학생들이 좀 더 패턴을 잘 이해하고 확장할 수 있는 기회를 제공하도록 할 필요가 있다고 생각된다.

참고문헌

강현영(2007). 패턴 탐구를 통한 일반화와 기호 표현: 시각적 패턴을 중심으로. **학교수학, 9**(2). 313-326.

교육부(1999). **초등학교 교육 과정 해설(Ⅳ): 수학, 과학, 실과**. 교육부.

교육과학기술부(2008). **초등학교 교육과정 해설(Ⅳ): 수학, 과학, 실과**. 교육과학기술부.

_____(2010a). **초등학교 수학교과서 1-1**. 서울: (주)두산.

_____(2010b). **초등학교 수학교과서 1-2**. 서울: (주)두산.

_____(2010c). **초등학교 수학교과서 2-1**. 서울: (주)두산.

_____(2010d). **초등학교 수학교과서 2-2**. 서울: (주)두산.

김남균, 김은숙(2009). 초등학교 6학년의 패턴의 일반화를 통한 대수 학습에 관한 연구. **수학교육논문집, 23**(2), 399-428.

김상미(1997). **수학적 패턴에 관한 학습 프로그램 개발 연구: 초등학교 4학년을 대상으로**. 한국교원대학교 석사학위 논문.

김성준(2002). 대수 교육과정의 변화에 관한 고찰: 패턴에 기초한 대수 도입을 중심으로. **수학교육학연구, 12**(3), 353-369.

_____(2003). 패턴과 일반화를 강조한 대수 접근법 고찰. **수학교육학 연구, 5**(3), 343-360.

원지영(2006). **초등학교 수학수업에서 패턴 지도 방안**. 경인교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

이경우(1985). **유아를 위한 새 수학 교육**. 서울: 창지사.

이윤정(2006). **유아의 패턴 인식 능력에 관한 연구**. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위 논문.

최혜진, 이혜은, 유수경(2007). 유치원과 초등학교 1학년 아동의 패턴인식능력에 대한 연구. **열린유아교육연구12**(1), 223-240.

Lannin, J . K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Orton, J, Orton, A, & Roper, T. (1999). Pictorial and practical contexts and the perception of pattern. In Orton, A., (Ed), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp.121-136). New York, NY: Continuum Books.

Reys, R., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2009). *Helping children learn mathematics (9th ed.)*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Warren, E., & Copper T. J. (2008). Patterns that support early algebraic thinking in the elementary school. In C. E. Greenes, (Ed.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (70th year book). (pp.113-126). Hillsdale, NJ: Erlbaum & The National Council of Teachers of Mathematics.

Analysis on the First Graders' Recognition and Thinking About Mathematical Patterns

Choi, Byoung Hoon (Graduate School of KNUE)
Pang, Jeong Suk (Korea National University of Education)

This study aimed to examine first graders' recognition and thinking about mathematical patterns. To attain the goal, this paper analyzed 116 students' response with regard to repeating, growing, and changing patterns represented in both picture and number, and also analyzed four students' thinking process of the patterns through interview. It was found that students showed high recognition in repeating, growing, and changing patterns in order. Whereas there was no significant difference between picture and number representation in both repeating and growing patterns, pictures gained a bit higher scores than numbers in changing patterns. Also, according to the result of examining the thinking process by the patterns, students tended to consider the patterns as a bundle and tried to solve problems with counting strategies. The result of this paper provides an empirical foundation on how first graders recognize and think of various patterns.

* **Key Words** : Mathematical Pattern(수학적 패턴), Pattern Recognition(패턴 인식), Generalization(일반화), Repeating Patterns(반복패턴), Growing Patterns(증가패턴), Changing Patterns(변형패턴)

논문접수: 2011. 1. 8.
논문수정: 2011. 1. 21.
심사완료: 2011. 2. 11.