대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 21 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 21, No. 1, 57-65. Feb 2011

학교수학과 대학수학에서 정의와 증명 개념 변화에 대한 수학사적 분석

이 지 현* · 최 영 기**

이 연구는 학교수학에서 대학수학으로의 이행과정에서 정의와 증명의 변화와 관련하여, 기하학에서 공리적 방법의 발달과정을 분석하였다. 고대 그리스에서 현대수학적인 공리적 방법으로의 변화를 이해하는데 있어서, 상수 혹은 변수라는 기본용어의 성격 차이는 중요한 지표이다. 특히 기본용어의 상수에서 변수로의 성격 변화는 수학에서 정의와 증명 개념 및 수학에 대한 인식 변화를 설명한다. 이러한 수학사적 분석은 대학수학의 입문과정에서 형식적 정의와 증명 개념의 의미를 설명하는 데 유용하게 사용될 수 있으리라 기대된다.

Ⅰ. 서론

많은 대학생들은 학교수학과 대학수학에서 단순한 중등교육과 대학교육의 차이 이상의 심각한 단절을 느낀다. 특히 대학생들은 대학수학[1]에서 형식적 정의와 증명의 개념을 처음 접하게 된다. 이와 관련하여 Tall(2003, p.27)은 학교수학에서 대학수학으로의 이행에서 '기술하기'에서 '정의하기'로, 또 '확신하기'에서 '정의에 기초하여 논리적으로 증명하기'라는 변화를 지적하였다. 예를 들어 학교수학에서 벡터를 크기와 방향을 가지고 있는 양으로 기술하며, 벡터의 여러 대수적인 성질을 유향선분이라는 구체적인 표상에서 확인한다. 그러나 대학수학에서 벡터공간의 정의는, 어떠한 대상이 벡터인지 기술하지 않으며 단지 '벡터'라고 불리는 대상에 대해 가정되는 대수적인 성질을 공리체계로 제시한다. 그리고 이러한 형식적 정의에서 벡터의 기타 성질을 논리적으로 증명한다. 학교수학에서 친숙한 어떤 대상을 기술하는 정의를 주로 다루어왔던 대학생들은 이러한 유형의 정의와는 사뭇 다른 형식적 정의에 당황한다. 또 많은 대학생들이 사전적 정의와 수학적 정의를 구별하지 못하며(Harel, et al., 2006; Edwards, Ward, 2004; Alcock, Simpson, 2002), 직관적으로 자명한 명제에 대한 형식적 증명의 의미도 이해하지 못한다. 주로 대학 1-2학년 학생들이 연구 대상인 고등수학적 사고(advanced mathematical thinking)분야의 많은 연구들이 학교수학에서 대학수학으로의 이행에 수반되는 정의와 증명의 변화를 대학생들의 심각한 인식론적 장애요인으로 간주하고 있다(Gray, et al., 1999; Harel, Tall, 1991; Tall, 1992).

McClure(2000)는 대학수학에서 형식적 정의의 인식론적 장애는 대학생들의 '정의' 개념이 수학자인 자신의 정의 개념과 다르다는 점에 기인할 수 있음을 자신의 교수경험에서 발견하

* 서울 전자고, leeji_hyun@hanmail.net, 교신저자.
** 서울대학교, yochoi@snu.ac.kr

1) 이 논문에서 '대학수학'이라는 용어는, 수학 혹은 수학교육을 전공하는 학생들이 배우는 순수수학에 한정하여 사용한다.

였다. McClure 뿐 아니라 대학생들의 형식적 정의 사용의 문제에 대한 Alcock, Simpson (2002)및 Edwards, Ward(2004)의 연구에서도 대학생들과 강의자가 각각 '정의'에 대하여 다르게 이해하고 있으며, 이로 인한 대학생과 강의자 사이의 대화 단절 문제를 보고하고 있다. 따라서 대학수학에서 형식적 정의의 이해는 '정의' 개념의 변화를 요구하는데, 수학사에서 이러한 정의 개념의 변화는 고대 그리스의 유클리드 원론과 힐베르트 공리체계의 '점'에 대한 정의에서 다음과 같이 찾아볼 수 있다. 유클리드는 원론 1권에서 다음과 같은 점과 선의 정의 및 공리를 제시하였다.

정의 1. 점은 쪼갤 수 없는 것이다.
정의 2. 직선은 폭이 없는 길이이다.
공리 1. 임의의 두 점을 지나는 한 직선이 존재한다.

수학을 전공하지 않은 이들에게 힐베르트 공리체계에서는 점이나 선이 무엇인가를 기술하는 유클리드와 같은 '정의'를 찾아볼 수 없다는 것은 매우 놀라운 사실이다. 힐베르트 공리체계는 유클리드 원론의 정의 1 · 2와 공리 1을 다음과 같은 하나의 공리로 대치한다.

결합공리 1-1. 임의의 서로 다른 두 점을 지나는 직선이 유일하게 존재한다.

유클리드의 점과 선의 정의는 그것이 무엇인가를 직관적으로 기술하는 사전적 정의이다. 하지만 이러한 정의를 이용하여 어떤 명제를 증명할 수는 없다. 반면 힐베르트 공리체계는 '점'과 '선'을 무정의 용어로 간주하여, 이들 사이에 성립하는 관계를 서술하는 전체 공리체계로 정의하므로, 그로부터 어떤 명제를 논리적으로 증명하는 것이 가능하다. 이렇게 유클리드 원론과 힐베르트 공리체계에서 점과 선의 수학적 정의가 무엇인가에 대한 다른 관점을 찾아 볼 수 있다.

Harel과 Sowder(1998, 2007)는 학교수학과 대학수학에서 취급하는 증명의 차이를 유클리드 원론의 고대 그리스적 증명도식과 힐베르트 공리체계의 현대수학적 증명도식으로 설명하고, 이러한 증명 개념의 변화로 인하여 대학생들에게 나타나는 인식론적 장애를 관찰하였다. 따라서 학교수학에서 대학수학으로의 이행과정에서 일어나는 정의와 증명 개념의 변화는 유클리드 원론으로 대표되는 고대 그리스의 공리적 방법에서 힐베르트 기하학 공리체계로 대표되는 현대수학의 공리적 방법으로의 전환과 관련이 있음을 알 수 있다.

특히 공리적 방법이 처음 태동한 수학 분야는 기하학이므로, 이 논문은 기하학에서 공리적 방법의 발달과정을 분석한다. 먼저 유클리드 원론과 힐베르트 공리체계에서 특히 기본용어에 대한 정의와 그와 관련된 증명의 문제를 중심으로, 사전적 정의와 형식적 정의의 차이 및 Harel과 Sowder(1998, 2007)가 지적한 그리스적 증명도식과 현대수학적 증명도식의 차이를 확인한다. 그리고 기하학의 역사에서 이러한 형식화의 동인 및 그로 인한 수학에 대한 인식 변화를 고찰하며, 마지막으로 수학사적 분석의 결론과 그 시사점을 논의하고자 한다.

II. 고대 그리스와 현대수학의공리적 방법: 공리적 방법에서 기본용어의 변화

그리스어원에서 'geo'는 땅을, 'metry'는 측정을 의미한다. 이러한 어원과 같이 원래 측정 기술에 관한 경험적 학문이었던 기하학은 그리스인들에 의하여 연역적 학문으로 재탄생하였

으며, 이는 사상사에서 '그리스의 기적'이라고 평가된다(Dieudonné, 1971, p.251).

그리스인들은 기하학적 도형을 경험적 대상이 아닌 시공간적 세계와 독립적으로 영원히 존재하는 형상(form)의 지위를 갖는 것으로 이해하였다. 또 그리스인들은 경험적 방법이 아닌 공리로부터의 연역이라는 방법을 창안하였다(Nagel, 1939, p.142). 이렇게 그리스인들이 체계화한 공리적 방법은 오늘날 실질적(實質的) 공리체계(material axiomatic system)라고 부른다. 공리체계를 구성하는 네 가지 요소는 바로 기본용어・공리・정의된 용어・정리이며, 이에 대하여 Eves(1972, p.11)는 실질적 공리체계의 양식을 다음과 같이 제시하였다.

(1) 체계의 기본적인 전문용어를 도입하고, 이들 용어의 의미를 설명하는 정의가 제시된다. 이러한 용어들은 기본용어(primitive term)라고 한다.
(2) 기본용어에 관한 기본명제의 목록이 제시된다. 이 체계가 의미를 가지기 위해서, 독자들은 (1)에 주어진 설명에 근거하여 이러한 기본명제가 참인지 알아야 한다. 이러한 기본명제를 공리라 한다.
(3) 체계의 다른 모든 전문용어는 그 이전에 도입된 용어를 사용하여 정의된다. 기본용어 외의 전문용어를 정의된 용어(defined term)라 한다.
(4) 체계의 다른 모든 명제는 그 이전에 받아들였거나 증명된 명제로부터 논리적으로 연역된다. 이와 같이 연역된 명제들을 정리라 한다.

유클리드 원론은 기본용어 점・선・면 등에 대한 사전적인 정의로부터 시작하며, 이러한 정의는 그 지시 대상이 공간 직관으로 알 수 있는 이상화된 물리적 실재임을 전달한다. 이렇게 고대 그리스 수학에서 기본용어는 단 하나의 이상화된 실재를 지시한다는 점에서 상수(constant)의 성격을 가지고 있다(Wilder, 1967).

그러나 점・선・면이라는 기본용어를 공간 직관에 의존하여 이해한 유클리드는 순서 혹은 연속성에 대한 성질을 공리로 명시하지 않은 채 증명에서 암묵적으로 사용하고 있다는 것을 인식하지 못하였다. 고대 그리스적 증명도식에서 기하학적 증명의 타당성은 공간 직관에도 의존하는 것이었으며, 유클리드와 같이 증명에서 사용하는 모든 가정을 명시할 수 없었다. 이점에서 유클리드의 기본용어에 대한 정의는, 증명에서 공간 직관에 의존할 여지를 남겨두고 있다는 점에서 고대 그리스적 증명도식의 중대한 논리적 결함의 요인이었다(Mueller, 1969, pp. 294-295).

그러나 유클리드 원론의 실질적 공리체계는 19세기 말 형식적 공리체계(formal axiomatic system)라는 보다 추상적인 양식으로 바뀌게 된다. Eves(1972, p.338)는 형식적 공리체계의 양식을 다음과 같이 제시하였다.

(1) 무정의 용어가 도입된다. 이러한 용어를 기본용어라 한다.
(2) 기본용어에 대한 임의의 명제가 제시되며 수용된다. 이러한 기본명제를 공리라 한다.
(3) 체계의 다른 모든 전문용어는 그 이전에 도입된 용어를 사용하여 정의된다.
(4) 체계의 다른 모든 명제는 그 이전에 받아들였거나 증명된 명제로부터 논리적으로 연역된다.

여기서 세 가지 대상의 체계를 고려하고자 한다. 첫 번째 대상을 점이라 하고, $A, B, C, \ldots$ 등으로 표기하자. 두 번째 대상은 직선이라 하며, $a, b, c, \ldots$ 등으로 표기하자. 세 번째 대상은 면이라 하고, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ 등으로 표기한다. 또 점, 선, 면 사이의 어떤 특정 관계를 생각할 수 있는데, 이것을 '위에', '사이에', '평행', '합동', '연속'이라 한다. 기하학의 공리체계는 정확한 수학적 목적을 위하여 이러한 관계를 충분히 기술한다

(Hilbert, 1997, p.3).

실질적 공리체계에서 형식적 공리체계로의 변화는 항목(1)의 기본용어에 대한 취급에서 시작된다. 힐베르트 공리체계에서 무정의 용어 점·선·면 등은 이에 관한 공리체계로 기술되는 관계가 그대로 유지되면 다른 용어로 교환 가능한 변수이며, 무정의 용어를 포함하는 공리 또한 참 혹은 거짓인 명제가 아니라 명제 함수이다(Eves, 1995). 따라서 공리체계에서 정의된 것 외의 기본용어에 대한 직관적인 의미를 증명에서 사용될 수 없다. 그리하여 형식적 공리체계에서 증명은 기본용어의 직관적 의미에도 암묵적으로 의존하였던 고대 그리스적 증명도식에서 공리체계로 서술된 형식에만 의존하며, 증명에서 사용하는 모든 가정을 명시 가능한 현대수학적 증명도식으로 변화하였다.

기본용어에 대한 사전적 정의는, 2000여년 동안 연역적 이론의 패러다임으로 간주되었던 유클리드 원론이 '공리체계로부터의 논리적 증명'의 측면에서 사실 불완전하였음을 보여주고 있다. 결국 기하학에서 공간직관에 의존하지 않는 형식적 정의와 형식적 증명의 개념이 나타난 것은 19세기 말 현대수학적인 공리적 방법이 정립된 이후였다. 고대 그리스에서 현대수학적인 공리적 방법으로의 변화에서, 사전적 정의에서 형식적 정의로의 '정의' 및 이와 관련된 '증명' 개념의 변화를 찾아 볼 수 있다.

III. '양', '공간', '선험성' 으로부터 기하학의 해방

이 절에서는 고대 그리스의 공리적 방법에서 현대수학적인 공리적 방법으로의 기하학의 발달과정을 '양적 과학', '공간의 과학', 그리고 '선험적 과학'이라는 상식에서의 단계적인 해방으로 기술하고 있는 Nagel(1939)의 논의를 중심으로 살펴본다.

고대 그리스로부터 기하학은 길이, 각도, 넓이와 같은 크기의 관계인 계량적 성질을 탐구하는 양적 과학으로 생각되었다. 그러나 비계량적인 사영기하학이 체계적으로 탐구되면서, 기하학의 탐구 대상은 2, 3차원에 배열된 크기의 탐구에서 위치와 순서 관계를 포함하는 것으로 확대되었으며, 양적 과학에서 벗어나게 되었다. 그러나 양적 과학에서 벗어난 이후에도 여전히 기하학의 탐구대상은 시각적인 공간도형이었다는 점에서 기하학은 여전히 공간의 과학이었다(Nagel, 1939, pp. 144-149).

공간의 과학이라는 뿌리 깊은 상식이 붕괴하게 된 수학적 계기는 사영 기하학에서 이상점의 도입이었다(Nagel, 1939, pp.149-178). 공간의 과학으로서의 기하학은 시각적인 공간적 대상이 아닌 이상점을 가질 수 없었다. 또 '무한대에 위치한 두 평행선의 교점'이라는 이상점의 정의는, '쪼갤 수 없는 것'이라는 유클리드의 점에 대한 정의와 달리 무한대에 대한 불확실한 직관에 의존하므로 널리 인정받지 못하였다. 따라서 이상점은 유클리드 원론의 기본용어에 대한 정의와 다른 성격의 정의를 필요로 하였다. 결국 사영기하학에서 이상점을 수학적으로 정의하려는 시도는 유클리드 원론에서의 기본용어에 대한 사전적 정의에서 벗어나게 되는 계기가 되었다.

Nagel은 기하학에서의 이상점, 또는 대수학에서의 허수와 같은 새로운 수학적 대상의 도입 방법을 다음과 같은 공리화(postulation), 암묵적 정의(implicit definition), 그리고 구성(construction)의 세 가지로 분류하였다[2]. 먼저

2) Nagel(1939, pp.162-163)은 대수학에서 허수 i의 도입에 대한 공리화, 암묵적 정의, 구성의 방법을 다음과 같

공리화란 특정 수학적 대상의 존재 자체를 공리로 수용하는 것이다. Poncelet는 대수학에서 형식불역의 원리와 유사한 역할을 하는 연속성의 원리로 기하학에서 이상점의 도입을 정당화하였으며, 이것은 공리화의 방법으로 간주된다. 그러나 단순한 공리화의 방법은 공리적으로 창조된 수학적 대상을 의심했던 수학자들에게는 여전히 거센 비판의 여지를 가지고 있었다. 따라서 Gergonne와 Grassmann과 같은 수학자들은 수학적 대상에 대해 가정되는 관계를 공리체계로 명시하여 어떤 수학적 대상을 암묵적으로 정의하는 방법을 구상하였다. 한편 Von Staudt는 한 직선위에 있는 두 쌍의 실점으로 결정되는 타원적 대합이라는 함수가 이상점에 대해 가정되는 형식적인 관계를 만족하므로, 바로 이 함수로 이상점을 구성 혹은 정의할 수 있다고 보았다. 이렇게 Von Staudt는 이상점을 실점으로부터 '구성'함으로서 이상점의 수학적 지위를 최종적으로 정당화하게 된다(Nagel, 1939, pp.149-178).

결국 '대상' 자체가 아닌 그 대상이 만족하는 '관계'를 정의하는 암묵적 정의와 구성의 방법이 등장하면서, 수학적 대상에 대해 약정된 관계만이 중요하며 그 대상이 무엇인가에 대한 직관적인 해석은 불필요하다는 인식이 싹트기 시작하였다. 이런 점에서 이상점을 어떻게 정의할 것인가에 대한 사영기하학에서의 논쟁은, 기하학에서 정의의 초점이 결국 대상 자체에서 대상 사이의 관계로 옮겨지게 된 계기가 되었다. 이렇게 '공간'에 속하지 않는 이상점을 가진 기하학은 이제 더 이상 공간의 과학에 한정될 수 없었으나, 여전히 점 혹은 선과 같은 기하학의 기본 용어의 의미는 직관적인 해석의 굴레로부터 완전히 자유롭지 못하였다(Nagel, 1939, pp.178-179).

기하학의 기본용어는 하나의 공간적인 모델을 표상하는 상수라는 유클리드적 인식에서 완전히 벗어나 기하학이 공간의 과학이라는 속박으로부터 완전하게 해방된 계기는 바로 쌍대성 원리의 발견과 그것이 적용되는 다양체의 확장 과정이었다. 쌍대성 원리는 직관적으로는 절대 대등하지 않은 점과 선을 서로 교환할 수 있음을 보여준다. 이러한 쌍대성 원리와 그 수학적 결과에서 점차 수학자들은 점과 선 등의 기본 용어는 하나의 공간적인 모델을 표상하는 상수가 아니라 다양한 해석이 가능한 변수임을 점차 인정하게 되었으며, 마침내 다음과 같은 형식적 공리체계로서의 순수기하학에 대한 인식이 출현하였다. 순수기하학의 기본용어는 하나의 공간적인 모델로 해석되는 상수가 아니라 해석될 필요가 없는 변수이다. 그리고 수학적 증명은 이러한 변수에 대한 해석이 아닌 오직 이에 대하여 공리체계로 약정된 관계에만 의존한다(Nagel, 1939, pp.178-192).

하지만 기하학이 공간의 과학에서 벗어났음에도 불구하고, 여전히 기하학은 감각 경험과 독립적인 선험적 과학으로 생각되었다. 그리스인들은 유클리드 원론의 기본용어는 하나의 공간적인 모델을 지시하며, 또 공리는 공간에 대해 자명한 참인 명제라고 생각하였다. 따라서 그리스인들은 이러한 공리로부터 논리적으로 연역된 유클리드 기하학을 공간에 대한 사실적

이 설명하고 있다. 공리화의 방법은 허수 i를 실수와 비슷한 연산법칙을 만족하지만 방정식 $x^2=-1$을 만족하는 해로서 도입한다. 암묵적 정의는 새로운 기호 i에 대해 가정되는 연산 규칙을 공리체계로 명시하여 i를 간접적으로 정의한다. 이렇게 공리체계로 암묵적으로 정의된 수학적 대상에 대해서도 가정된 공리체계를 만족하는 수학적 대상이 정말 존재하는가를 질문할 수 있는데, 이에 대하여 구성의 방법은 새로운 수학적 대상을 이미 확립된 수학적 존재자의 조합으로 정의하는 것이다. 실수의 순서쌍으로 복소수를 정의한 해밀턴의 방법이 바로 구성의 방법이다. 구성은 공리체계에 의해 암묵적으로 정의되는 대상의 존재성을 증명함으로서 암묵적 정의를 보조한다.

진리이자 동시에 선험적 진리라고 간주하였으며(Blanché, 1962), Kant역시 이의 연장선상에서 유클리드 기하학을 종합적 선험적 지식으로 수용하였다. 특히 Kant는 인간의 공간 개념은 본래 그 자체의 공간이 아닌 머릿속에 현상된 공간이라고 주장하였다. 그리고 그는 유클리드 공리는 우리 두뇌 속에서 공간을 조직하는 바로 그 원리들이며 따라서 종합적이면서도 선험적인 진술이라고 이해하였다(Trudeau, 1987, pp. 107-117).

그러나 Kant의 견해는 비유클리드 기하학의 출현으로 붕괴하였다. 비유클리드 기하학의 출현으로 어떤 기하학이 공간을 가장 잘 기술하는가라는 경험적 문제가 제기되었으며, 이에 대하여 Poincaré는 물리적 탐구에서 기하학의 선택은 물리적 사실로 결정될 수 없는 규약의 결과라고 하였다. 결국 19세기 말 기하학의 역사는 응용수학과 순수수학 즉 해석된 체계와 해석되지 않은 체계의 구획으로 종결되었으며, 그리스인들이 유클리드 기하학이 모두 가지고 있다고 생각하였던 사실적 진리성과 형식적 진리성은 각각 응용수학과 순수수학으로 해체되었다(Nagel, 1939, pp.193-216)

Poincaré는 현대수학의 입장에서 유클리드 기하학의 명제는 종합적 선험적 진술이라는 칸트의 논의를 다음과 같이 수정하였다. 해석되지 않은 체계인 순수기하학에서 무정의 용어는 변수이며 그것을 포함하는 공리나 정리는 참 혹은 거짓을 판단할 수 없는 명제함수이다. 따라서 순수기하학의 공리와 정리는 그것이 참이라는 판단이 경험에 의존하지 않는 선험적인 진술이다. 한편 점, 선, 면과 같은 무정의 용어는 공리체계에 의해 암묵적으로 정의되는 것이기 때문에, 순수 기하학의 공리는 공리가 참이라는 판단이 그것을 이해하는 이상의 것을 필요로 하지 않으므로 분석적이다. 반면 해석된 체계에서의 무정의 용어인 선을 곧게 펴진 실 혹은 광선의 진행 경로로 물리적으로 해석할 수 있다. 이렇게 모든 무정의 용어를 해석하면, 공리의 참 혹은 거짓을 실험으로 결정할 수 있다. 따라서 응용기하학의 공리는 종합적이나 선험적인 것은 아니다. 결론적으로 응용기하학 혹은 순수기하학의 그 어느 쪽을 선택하더라도 Kant의 견해처럼 기하학의 공리들이 종합적인 동시에 선험적일 수는 없다(Trudeau, 1987, pp. 248-250).

여기서도 기하학의 공리적 발달 과정에서 상수에서 변수로의 기본용어의 성격 변화는 해석된 체계와 해석되지 않은 체계를 구분하게 된 계기가 되었으며, 또 이로 인하여 수학에서 사실적 진리성과 형식적 진리성 혹은 종합성과 선험성이 명확하게 분리되었다.

Ⅳ. 결론

이 논문은 학교수학에서 대학수학으로의 이행에서 나타나는 정의와 증명 개념의 차이 및 그 이면에 내재한 수학에 대한 인식 변화를 이해하기 위하여, 기하학 분야를 중심으로 고대 그리스에서 현대수학의 공리적 방법에 이르는 과정을 분석하였다.

고대 그리스의 공리적 방법에서 현대수학적인 공리적 방법으로의 변화를 이해하는데 있어, 특히 기본용어의 상수 혹은 변수라는 성격 차이는 중요한 지표이다. 유클리드 원론의 점과 선이라는 기본용어는 하나의 공간적인 모델을 지시하는 상수에 불과하였으며, 결국 현대수학적인 공리적 방법이 확립된 이후에야 기본용어는 변수로 인식될 수 있었다(Wilder, 1967, pp.116-117). 이러한 기본용어의 차이는 실질적 혹은 형식적 공리체계에서의 공리의 성격을 결

정한다. 따라서 기하학의 공리적 발달 과정은 바로 그 기본용어가 상수에서 변수라는 인식으로 변화하는 과정이라 할 수 있다.

고대 그리스와 현대수학의 공리적 방법에서 상수에서 변수로의 기본용어의 성격 변화는 수학에서 '정의'와 '증명'의 성격도 바꾸어 놓았다. 특히 정의 문제의 핵심은 정의된 용어에 대한 것이 아니라 기본용어인 점과 선에 대한 수학적 정의가 무엇인가라는 것이었다. 유클리드의 원론에서 '쪼갤 수 없는 것'이라는 점의 정의는 하나의 공간적인 대상에 대한 사전적 정의에 불과하였다. 그러나 힐베르트 공리체계에서 무정의 용어인 점은 공리체계 전체로 정의되어, 그것을 이용하여 논리적 증명이 가능한 형식적 정의가 되었다. 또한 상수에서 변수로 기본 용어의 성격이 변화하면서, 증명 역시 그 타당성이 직관에도 암묵적으로 의존하는 '고대 그리스적 증명 도식'에서 오직 공리체계라는 형식에만 의존하는 '현대수학적 증명도식'으로 변화하였다(Harel, Sowder, 2007, 1998). 이러한 고대 그리스의 공리적 방법에서 현대수학적인 공리적 방법으로의 전환은 정의와 증명 개념의 변화 이상의 수학 자체에 대한 인식의 변화를 수반하였으며, 특히 기하학에서는 양적 과학, 공간의 과학, 그리고 선험적 과학이라는 전통적인 통념에서의 해방으로 나타났다.

McClure(2000)가 지적하듯이, 현대수학에 익숙한 수학자들은 자신에게는 너무나 자연스러운 형식적 정의와 증명 개념에 대하여 대학 신입생들이 어떠한 의문을 가지고 있으며 또 왜 그토록 어렵게 생각하는지를 이해하기 어렵다. 다음과 같은 Freudenthal(1983, p.469)의 언급은 이러한 상황과 관계가 있다.

> 나의 경우뿐만이 아니라 다른 사람들에 있어서도, 통찰의 근원이 결국 자동화(automatism)에 가려버리게 된다는 것을 경험할 수 있었다. (학생들이 이해하지 못하는) 어떻게 그리고 왜에 대한 질문이 더 이상 제기되지 않을 정도로 이미 어떤 활동을 완벽하게 숙달한 이들에게는, 더 이상 어떻게 그리고 왜라는 질문을 할 수 없다. 또한 그들은 이러한 질문을 더 이상 유의미한 질문으로 이해할 수 없다.

Dorier(1995)는 대학생들에게 형식적이고 추상적인 개념을 설명하는 것 보다 왜 추상화와 형식화가 필요한지를 설명하는 것이 더 중요하다고 하였다. Luk(2005)도 대학수학의 입문 과정에서 형식주의의 의미를 전달하지 않는다면, 대학생들에게 형식주의는 완전히 외래어에 불과하며 그 가치와 상관없이 강의에서 아무것도 이해하지 못할 것이라고 지적한다. 특히 Luk은 유클리드 원론과 힐베르트 공리체계를 비교하여 보는 경험, 또 Bourbaki의 텍스트에 대한 소개를 통해 대학 신입생들에게 형식주의를 소개한 교수경험을 보고하였다.

이러한 맥락에서 기하학 분야를 중심으로 고대 그리스에서 현대수학적인 공리적 방법으로의 전환에 대해 고찰한 본 연구는 학교수학과 대학수학에서 정의와 증명 개념의 변화 및 수학자체에 대한 인식 변화가 어떻게, 또 왜 일어나게 되었는가라는 질문에 대한 수학사적 답변이라 하겠다. 따라서 본 연구의 수학사적 분석이 Luk의 시도와 같이 대학수학에서 형식적 정의와 증명 개념으로의 이행을 돕기 위한 유용한 토대가 되기를 기대한다.

참고문헌

Alcock L., Simpson A. (2002). Definitions: Dealing with categories mathematically. *For the learning of mathematics, 22*(2), 28-34.

Blanché, R. (1962). *Axiomatics*(G. B. Keene Trans.). London : Routledge.

Dieudonné, J. (1971) Modern axiomatic methods and the foundations of mathemtics(C. Pinter, H. Kline, Trans.). In F. Le Lionnais(Ed.), *Great currents of mathematical thought: Vol II*(pp. 251-266). New York : Dover Publications.

Dorier, J. L. (1995). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 29*(2), 175-197.

Edwards, B. S. & Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis)use of mathematical definitions. *The American Mathematical Monthly, 111*, 411 - 424.

Eves, H. (1972). *A Survey of geometry*. Allyn and Bacon.

Eves. H. (1995). **수학의 기초와 기본 개념**(허민, 오혜영 역). 서울 : 경문사. (원저는 1958년 출판)

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht : Reidel.

Gray, E. M., Pitta, D., Pinto, M. & Tall, D. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary & advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 111 - 133.

Harel, G., Tall, D. (1991). The General, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics, 11*(1), 38-42.

Harel, G., & Sowder, H. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III*(pp.234-282). Providence, RI : American Mathematical Society.

Harel, G., Selden, A., & Selden, J. (2006). Advanced mathematical thinking: Some PME perspectives. In A. Gutierrez, P. Boero. (Eds), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*. Sense Publishers.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective on proof. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*(pp. 805-842). National Council of Teachers of Mathematics.

Hilbert, D. (1997). *Foundations of geometry*(L. Unger Trans., P. Bernays Rev.). Illinois : Open court publishing company. (원저는 1899년 출판)

Luk, H. S. (2005). The gap between secondary school and university mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36*(2), 161-174.

McClure, J. E. (2000). Start where they are: Geometry as an introduction to Proof. *American Mathematical Monthly, 107*(1), 44-52.

Mueller, I. (1969). Euclid's Elements and the axiomatic method. *British Journal for the Philosophy of Science, 20*(4), 289-309.

Nagel, E. (1939). The formation of modern conception of formal logic in the development of geometry, *Osiris, 7*, 142-223.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. In D. A. Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*(pp. 495 - 511). New York : Macmillan.

Tall, D. (2003). **고등수학적 사고**(류희찬, 조완영 · 김인수역). 서울: 경문사. (원저는 1991년 출판)

Trudeau, R. J. (1987). The *Non-Euclidean Revolution*. Birkhauser : Boston.

Wilder, R. L. (1967). The Role of the Axiomatic Method. *The American Mathematical Monthly, 74*(2), 115-127.

Historical Analysis of Definition and Proof Conceptions in the Transition from Secondary to Tertiary Mathematics

Lee, Ji Hyun (Seoul Electronics High School)
Choi, Younggi(Seoul National University)

The conceptions of definition and proof radically change in the transition from secondary to tertiary mathematics. Specifically this paper analyses the historical development of the axiomatic method from Greek to modern mathematics. To understand Greek and modern axiomatic method, it is important to know the different characteristics of the primitive terms, constant and variable. Especially this matter of primitive terms explains the change of conceptions of definition, proof and mathematics. This historical analysis is useful for introducing the meaning of formal definition and proof.

* Key Words : axiomatic method(공리적 방법), definition(정의), proof(증명), secondary-tertiary transition in mathematics(학교수학에서 대학수학으로의 이행)

논문접수: 2011. 1. 10.
논문수정: 2011. 1. 21.
심사완료: 2011. 2. 11.