응용통계연구 (2011)
24(2), 293–305

DOI: 10.5351/KJAS.2011.24.2.293

MCMC 방법을 이용한 ARMA-GARCH 모형에서의 예측 방법 연구

채화연[1] · 최보승[2] · 김기환[3] · 박유성[4]

[1]한국씨티은행, [2]대구대학교 전산통계학과, [3]고려대학교 정보통계학과, [4]고려대학교 통계학과

(2010년 12월 접수, 2011년 3월 채택)

요 약

변동성은 최근 경제가 급변하면서 옵션의 가격 결정과 자산의 위험관리에서 그 중요성이 더 커지고 있다. 이러한 변동성은 분산을 지칭하며, 위험(risk)을 측정하는 수단이 되므로 정확한 추정과 예측이 매우 필요하다. 본 논문에서는 변동성에 대한 모형으로 오차항이 ARMA(p,q)-GARCH(r,s) 모형을 따르는 회귀모형을 설정하고, 이 모형의 모수에 대해 베이지안 추정법을 제시하였다. 또한 평균과 분산(변동성)에 대한 예측값을 구하고 이에 대한 베이지안 구간추정을 하였다. 이를 500개의 모의실험 자료를 통해 최우추정법과 비교하였다. 뿐만 아니라, 베이지안 방법을 이용하여 Frequentist의 관점에서는 구하기 어려운 GARCH 모형에서의 일종의 단위근이 존재할 확률을 구하였다.

주요용어: 변동성, GARCH, 베이지안 추론, MCMC.

1. 서론

고전적 회귀모형에서는 오차항은 동일한 분산을 가지고 오차항들 간에는 독립임을 가정한다. 그러나 시계열 자료에 대한 회귀모형을 구축하고자 할 때 시계열 자료가 가지는 자기상관성에 의하여 고전적 회귀모형의 이용은 모수의 추론에서 여러가지 문제를 발생시킨다. 시계열 자료에 대한 예측 모형으로 가장 대표적인 방법은 ARMA(autoregressive and moving average) 방법이다. 이는 현 시점에서의 시계열 값은 자기상관성에 기반한 과거 값과 오차항의 가중평균에 의하여 구성되었다고 보고 이들에 기초하여 모형을 구축하고 분석을 수행하는 방법이다. 금융시계열 자료를 이용하여 분석을 수행할 때는 미래시점의 값에 대한 예측과 더불어 변동성(volatility)의 추정 및 예측 또한 중요한 관심사항이라 할 수 있다. 파생상품 가격결정 이론인 Black-Scholes 모형에서 일반적으로 변동성은 상수라 가정한다. 그러나 실제 Black-Scholes 모형이 적용되는 금융시계열 자료에서 변동성은 측정 시점의 사회, 경제적인 상황에 따라 끊임없이 변동하기 때문에 변동성이 상수라는 가정은 적절하지 않다고 볼 수 있다. 금융시계열 자료에서 변동성은 바로 분산을 지칭하며 금융 자산의 위험관리(risk management) 측면에서의 위험(risk)의 측정값으로도 사용된다.

금융시계열 자료에서 이러한 변동성의 변화는 일정한 패턴을 가질 수 있다. 예를 들면 현 시점의 자료의 분산이 크다면 미래의 분산도 커지는 경향을 보이는 반면, 안정된 분산을 가진 자료의 경우에는 앞으로의 분산도 안정된 분산을 가질 것이라 예상할 수 있다. 즉 금융시계열 자료의 분산은 과거의 분산에 의존하게 되는 변동성의 클러스터링(clustering) 현상을 보이게 되고, 이를 기반으로 하여 미래시점에 대한 분산의 예측을 가능하게 된다. 실물 경제의 상황에서 변동성은 선물, 옵션, 파생상품의 가

[4]교신저자: (136-701) 서울시 성북구 안암동 5가, 고려대학교 통계학과, 교수. E-mail: yspark@korea.ac.kr

격 결정뿐만 아니라, 자산에 위험관리(risk management) 측면에서도 그 중요성이 점점 더 커지고 있으며 현시점에서의 변동성의 추정과 더불어 관찰되지 않은 미래시점에서의 변동성에 대한 예측 또한 중요한 문제라 할 수 있다. 시계열 자료에서 변동성을 추정하고 예측하기 위한 통계적 모형으로 가장 대표적인 방법은 시계열 자료에 기초한 함수의 형태로 변동성의 동적행동을 모형화 하는 방법으로 Engle (1982)이 제시한 자기회귀 조건부 이분산(autoregressive conditional heteroskedasticity; ARCH(r, s)) 모형이 가장 대표적인 방법이라 할 수 있다. 그리고 이를 확장 발전시킨 일반화 자기회귀 조건부 이분산 모형(Generalized ARCH; GARCH), EGARCH(Exponential GARCH), IGARCH(Integrated GARCH) 등이 대표적인 방법이라 할 수 있다 (Bollerslev, 1986).

김우환 (2011)은 우리나라 KOSPI 주가지수의 변동을 예측하기 위하여 GARCH-ARJI(auto regressive jump intensity) 모형을 이용하였다. GARCH-ARJI 모형을 이용하여 시계열 자료가 가지는 일상정인 변동과 더불어 시간 가변성에 의하여 발생하는 추가적인 변동을 설명하고자 하였다. 홍선영 등 (2009)는 비대칭 변동성을 설명하기 위하여 I-TGARCH(Integreated-Treshold GARCH) 모형을 이용하였으며 이를 KOSPI 주가자료에 적용하였다. 이와는 조금 다른 관점에서 박만식 등 (2008)은 개별 시계열 자료들의 변동성간에 발생할 수 있는 유사성 및 상서성을 측정하기 위하여 GARCH 모형을 이용하였다.

변동성을 위한 모형으로 두 번째는 변동성이 확률과정을 따른다고 보고, 확률식에 의해 변동성을 설명하는 것으로 확률 변동성(stochastic volatility) 모형이 이에 속한다. 그러나 이 모형들은 추정에 큰 어려움이 따른다. 우도함수가 매우 복잡하고 제약조건이 많기 때문에 Gauss-Newton, Newton-Raphson 방법과 같은 수치해석적인 추정 방법을 사용하게 되는데, 이 방법들 역시 수렴하지 않는 경우가 많아 모수를 추정하지 못하는 경우가 빈번하게 발생하게 된다. 이러한 모수 추정 문제를 해결하기 위하여 최근에는 베이지안(Bayesian) 방법에 의한 변동성 모형의 추정방법들이 제안되어 왔다. ARCH류 모형(ARCH, GARCH, EGARCH, IGARCH 등)은 Kleibergen와 Van Dijk (1993), Nakatsuma (2000)에 의하여 연구되어 왔고, 확률 변동성 모형은 Jacquier 등 (1994), Tsay (2002) 등에 의해 연구되어 왔다.

ARCH류 모형 중 IGARCH 모형은 GARCH 모형 가운데 ARMA 모형이 단위근을 가지는 모형과 유사한 형태의 모형이다. IGARCH 모형에서 특히 GARCH 모형의 차수가 모두 1, 1인 IGARCH(1, 1) 모형은 금융이론의 위험관리(Risk Management)에서 가장 기본이 되는 VaR(Value at Risk)를 측정하기 위한 모형으로 널리 알려진 RiskMetrix 모형이 된다. IGARCH 모형에 대한 검정방법으로 우함도수에 기반한 검정방법은 매우 어렵지만 베이지안 방법을 적용하면 상대적으로 쉽게 모형을 구축하고 검정을 수행할 수 있다. 베이지안 방법을 이용한 모형구축과정은 전통적인 우도함수에 기반하여 최대우도추정 방법을 이용한 모형 구축과정보다 여러가지 강점이 있다. 예측에 있어서 전통적인 방법에서는 모형을 추정한 후에 계산된 미래값에 대하여 MSE가 최소가 되도록 하는 방법을 통하여 미래치를 예측하게 된다. 이에 반하여 베이지안 입장에서는 미래치를 하나의 모수로 간주하고 베이지안 관점하에서 모수를 추정하는 방법과 유사한 방법을 이용하여 미래치를 예측하게 된다. 구간추정에 있어서도 베이지안의 입장에서는 점근 확률의 개념으로 사용되는 전통적인 신뢰구간을 추정하는 방법과는 달리 MCMC(Markov-chain Monte Carlo method) 방법을 이용하여 사후분포로 부터 표본을 추출한 후 추출된 표본의 분포로부터 신용구간(credibility interval)을 통해 구간추정을 수행할 수 있다. 특히 HPD(Highest Posterior Density) 신용구간을 이용하여 베이지안 구간추정을 수행하게 되면 모수의 분포가 비대칭일 때 더욱 유용하다.

Chib과 Greenberg (1994)는 오차항이 ARMA(p, q) 모형을 따르는 회귀모형에 대하여 MCMC 방법을 이용한 베이지안 기법하에서의 모수의 추정방법을 제안하였다. Muller와 Pole (1995)는 오차항이 GARCH 모형을 따르고 자기상관을 가지고 있지 않을 때 회귀모형에 대한 MCMC 기법을 적용한 모형

추정방법을 제안하였다. Nakutsuma (2000)은 이들의 방법을 확장하여 오차항이 ARMA-GARCH 모형을 따르는 회귀모형에 대하여 MCMC 기법을 적용함 모형 추정방법을 제안하였다.

본 연구에서는 변동성 예측을 위한 모형으로서 오차항이 ARMA-GARCH 모형을 따르는 회귀모형을 설정하고, 이 모형의 모수에 대해 베이지안 측면에서의 추정방법으로 Nakutsuma (2000)이 제안한 방법을 이용하였고 평균과 분산(변동성)의 예측을 위하여 Albert와 Chib (1993)이 제안한 방법을 이용하였다. 그리고 HPD 신용구간을 이용하여 예측값에 대한 이들의 신뢰구간을 구하고자 하였다. 또한, GARCH 모형에서 일종의 단위근이 존재하여 IGARCH 모형이 될 사후확률을 구하였다. 전개될 내용을 간략하게 요약하면, 2절에서 ARMA-GARCH 모형에 대해 소개와 베이지안 방법을 이용한 ARMA-GARCH 모형에의 적용 과정을 전개한다. 3절에서 베이즈 추정법과 최우추정법에 의한 모의실험자료에 대한 결과를 비교하며, 결론에 대해서는 4절에서 언급한다.

2. 오차항이 ARMA-GARCH 모형을 따르는 회귀모형

2.1. ARMA-GARCH 모형

오차항이 ARMA(p,q)-GARCH(r,s) 모형을 따르는 회귀모형을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} y_t &= x_t'\boldsymbol{\gamma} + u_t, \quad t = 1, 2, \ldots, n \\ u_t &= \sum_{j=1}^{p} \phi_j u_{t-j} + \epsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \epsilon_{t-j}, \quad \epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim (0, \sigma_t^2), \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \epsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \sigma_{t-j}^2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

여기서, x_t는 독립변수로 $k \times 1$ 벡터이다. $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k)'$는 회귀 계수 벡터, $\mathcal{F}_{t-1}$은 $\{y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots\}$로 이루어진 모든 정보의 집합을 나타내는 σ-field, ϕ_j과 θ_j는 각각 AR(p) 과정과 MA(q) 과정의 계수를 나타낸다. α_j와 β_j은 GARCH(r,s) 과정의 계수이다.

이 모형은 ARMA 모형과 GARCH 모형을 모두 고려한 것이므로 다음의 제약 조건을 만족하여야 한다.

C1. 특성함수 $1 - \Phi(B)(= \sum_{j=1}^{p} \phi_j B^j) = 0$의 모든 근의 절대값이 1보다 크다.

C2. 특성함수 $1 - \Theta(B)(= \sum_{j=1}^{p} \theta_j B^j) = 0$의 모든 근의 절대값이 1보다 크다.

C3. $\alpha > 0,\ j = 0, \ldots, r.$

C4. $\beta > 0,\ j = 1, \ldots, s.$

C5. $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j + \sum_{j=1}^{s} \beta_j < 1.$

조건 C1과 C2는 각각 ARMA 모형에서의 정상성 조건과 가역성 조건을 나타내고 C3과 C4는 GARCH 모형에서 변동성이 양수일 조건을 나타낸다. 마지막 C5는 GARCH 모형에서 비조건부 분산이 존재하기 위한 조건이다.

식 (2.1) 모형은 오차항에 대해 ARMA모형으로 평균값(mean-value)에 대한 적합도를 올릴 수 있을 뿐 아니라 오차항의 분산에 대한 모형으로 변동성까지 모형화 할 수 있다. 재정관련 시계열 자료에서 많이 나타나는 변동성 클러스터링(clustering) 현상에 대해, 한 변동이 얼마동안 영향을 미치는지를 변동성의 충격의 지속성이라 정의하면 이는 $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j$로 나타낼 수 있다. 이 값이 1에 가까우면 한번 일어난 충격이 오랜 기간을 지속되는 것을 의미하고, 0에 가까운 값일 수록 충격이 곧 소멸됨을 의미한

다. 한편 $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i+\sum_{j=1}^{s}\beta_j=1$인 경우 고려할 수 있는 모형이 Engle과 Bollerslev (1986)가 제안한 IGARCH(Integrated GARCH) 모형으로, 이는 금융이론의 위험관리(Risk Management)의 가장 기본이 되는 VaR(Value at Risk)의 기본 모형이다. 이 밖에도 ϵ_t의 분산이 y_t의 평균에 의존할 때 고려할 수 있는 모형으로 Engle 등 (1987)이 제안한 GARCH-M 모형, 주가가 오른 날의 다음 날보다는 주가가 내려간 날의 다음 날에 주가수익률의 변동성이 커지는 경향과 같은 변동성의 비대칭성을 반영하는 모형으로 σ_t^2 대신 $\ln\sigma_t^2$을 사용하는 Nelson (1991)이 제안한 EGARCH(exponential GARCH) 모형 등이 있다. 보다 자세한 내용은 박유성과 송석헌 (1998), Hamilton (1994) 등을 참고하기 바란다.

2.2. 베이지안 방법을 이용한 ARMA(p,q)-GARCH(r,s) 모형 구축

이제 본 절에서는 식 (2.1) 모형에 대하여 베이지안 방법에 의한 모수 추정 방법에 대하여 알아본다. 본 연구에서는 Chib과 Greenberg (1994)가 제안한 방법을 Nakutsuma (2000)이 보완하여 적용한 방법을 이용하였다. Nakutsuma (2000)가 제안한 방법에 따른 베이지안 절차는 다음과 같다.

먼저 베이즈 추정을 하기 위해 먼저 관심 모수에 대한 우도함수와 각 모수에 대한 사전분포를 정의하여야 한다. 식 (2.1) 모형의 우도함수는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$l(Y|X,\delta)=\Pi_{t=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}}\ \exp\left[-\frac{\hat{\epsilon_t}^2}{2\sigma_t^2}\right]. \tag{2.2}$$

여기서

$$\hat{\epsilon_t}=\begin{cases}\epsilon_0, & t=0,\\ y_t-x_t'\boldsymbol{\gamma}-\sum_{j=1}^{p}\phi_j\left(y_{t-j}-x_{t-j}'\boldsymbol{\gamma}\right)-\sum_{j=1}^{q}\theta_j\hat{\epsilon}_{t-j}, & t=1,\ldots,n\end{cases}$$

이고, $y_0=\epsilon_0$, 모든 $t<0$에 대해 $y_t=0$, 모든 $t\le 0$에 대해 $x_t=0$이라 가정한다. 사전표본오차 ϵ_0도 추정하고자 하는 하나의 모수로 고려한다. 추정하여하 하는 각 모수에 대하여 $\boldsymbol{\phi}=(\phi_1,\ldots,\phi_p)'$, $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\ldots,\theta_q)'$, $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)'$, $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_s)'$라 할 때 $\boldsymbol{\delta}=\{\epsilon_0,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\phi},\ \boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}\}'$는 추정하여야 하는 전체 모수의 집합을 나타낸다. 이제 베이지안 접근을 위하여 각 모수에 대한 사전분포를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}&p(\epsilon_0)\sim N(\mu_{\epsilon_0},\Sigma_{\epsilon_0}), && p(\boldsymbol{\gamma})\sim N_k(\mu_\gamma,\Sigma_\gamma), && p(\phi)\sim N_p(\mu_\phi,\Sigma_\phi)I_{c1}(\phi),\\ &p(\theta)\sim N_q(\mu_\theta,\Sigma_\theta)I_{c2}(\theta), && p(\alpha)\sim N_r(\mu_\alpha,\Sigma_\alpha)I_{c3}(\alpha), && p(\beta)\sim N_s(\mu_\beta,\Sigma_\beta)I_{c4}(\beta).\end{aligned} \tag{2.3}$$

여기서 N과 N_c는 각각 일변량 정규분포와 c-변량 정규분포를 나타내고 μ_i,Σ_i는 모수 i, $i=\epsilon_0,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\phi}$, $\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$에 대한 사전분포의 모수, $I_{cj}(\cdot)$, $j=1,2,3,4$는 지시함수로써 2.1절에서 언급된 제약조건(Cj) 들을 만족하면 1, 아니면 0의 값을 가진다. 따라서 $N(\cdot)I_{cj}(\cdot)$는 정규분포에서 지시함수의 조건을 만족하는 부분만을 의미한다. 이제 우도함수 (2.2)와 사전분포함수 (2.3)에 의하여 사후분포함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{\delta}|Y,X)&\propto l\left(Y|X,\boldsymbol{\delta}\right)p\left(\boldsymbol{\delta}\right)\\ &\propto \Pi_{t=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}}\ \exp\ \left[-\frac{\hat{\epsilon_t}^2}{2\sigma_t^2}\right]N\left(\mu_{\epsilon_0},\Sigma_{\epsilon_0}\right)\times N_k\left(\mu_\gamma,\Sigma_\gamma\right)\times N_p\left(\mu_\phi,\Sigma_\phi\right)I_{c1}(\phi)\\ &\quad\times N_q\left(\mu_\theta,\Sigma_\theta\right)I_{c2}(\theta)\times N_r\left(\mu_\alpha,\Sigma_\alpha\right)I_{c3}(\alpha)\times N_s\left(\mu_\beta,\Sigma_\beta\right)I_{c4}(\beta).\end{aligned} \tag{2.4}$$

사후분포 함수 (2.2)는 매우 복잡한 형태를 가지기 때문에 이 함수로부터 모수의 추정치를 직접 계산하는 것은 매우 복잡하고 어려운 문제이다. 이와 같이 복잡한 형태의 사후분포를 가질 때 일반적으로 MCMC 방법을 이용하여 조건부 사후분포로부터 표본을 추출하여 모수를 추정할 수 있다. Nakatsuma (2000)는 모형 (2.1)을 ARMA 모형과 GARCH 모형 두 부분으로 나누고 Chib과 Greenberg (1994)가 제안한 방법을 조정하여 우도함수를 간단한 형태로 만들었다. 이를 사전분포와 결합하여 각 모수에 조건부 분포를 만든 후 이에 대한 제안분포를 구하고, 깁스 표본추출(Gibbs sampler) (Gelfand와 Smith, 1990)을 통해 표본을 추출하였다. 깁스 표본추출을 이용하여 각 모수에 대한 조건부분포로부터 표본을 추출하는 과정은 다음과 같다. $(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \epsilon_0, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$에 대한 임의의 초기값을 $(\boldsymbol{\phi}_{(0)}, \boldsymbol{\theta}_{(0)}, \epsilon_{0(0)}, \boldsymbol{\alpha}_{(0)}, \boldsymbol{\beta}_{(0)})$라 하고 깁스 표본추출은 다음과 같은 과정을 따르게 된다.

1. $f_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\gamma}|Y, X, \Sigma, \boldsymbol{\phi}_{(0)}, \boldsymbol{\theta}_{(0)}, \epsilon_{0(0)}, \boldsymbol{\alpha}_{(0)}, \boldsymbol{\beta}_{(0)})$로부터 표본 $\boldsymbol{\gamma}$를 추출하고 $\boldsymbol{\gamma}_{(1)}$로 표시한다.
2. $f_{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\phi}|Y, X, \Sigma, \boldsymbol{\gamma}_{(1)}, \boldsymbol{\theta}_{(0)}, \epsilon_{0(0)}, \boldsymbol{\alpha}_{(0)}, \boldsymbol{\beta}_{(0)})$로부터 표본 $\boldsymbol{\phi}$를 추출하고 $\boldsymbol{\phi}_{(1)}$로 표시한다.
3. $f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}|Y, X, \Sigma, \boldsymbol{\gamma}_{(1)}, \boldsymbol{\phi}_{(1)}, \epsilon_{0(0)}, \boldsymbol{\alpha}_{(0)}, \boldsymbol{\beta}_{(0)})$로부터 표본 $\boldsymbol{\theta}$를 추출하고 $\theta_{(1)}$로 표시한다.
4. $f_{\epsilon_0}(\epsilon_0|Y, X, \Sigma, \boldsymbol{\gamma}_{(1)}, \boldsymbol{\phi}_{(1)}, \boldsymbol{\theta}_{(1)}, \boldsymbol{\alpha}_{(0)}, \boldsymbol{\beta}_{(0)})$로부터 표본 ϵ_0를 추출하고 $\epsilon_{0(1)}$로 표시한다.
5. $f_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}|Y, X, \Lambda, \boldsymbol{\gamma}_{(1)}, \boldsymbol{\phi}_{(1)}, \boldsymbol{\theta}_{(1)}, \epsilon_{0,(1)}, \boldsymbol{\beta}_{(0)})$으로부터 표본 $\boldsymbol{\alpha}$를 추출하고 $\alpha_{(1)}$로 표시한다.
6. $f_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}|Y, X, \Lambda, \boldsymbol{\gamma}_{(1)}, \boldsymbol{\phi}_{(1)}, \boldsymbol{\theta}_{(1)}, \epsilon_{0(1)}, \boldsymbol{\alpha}_{(1)})$로부터 표본 $\boldsymbol{\beta}$를 추출하고 $\beta_{(1)}$로 표시한다.
7. 각 단계에서 추출된 표본으로 대체한 후 단계1~6을 반복한다.

Nakatsuma (2000)는 이 MCMC 과정을 두 부분으로 나누어서 전개하였다. 첫 번째 부분은 ARMA 모형 부분으로 $\boldsymbol{\delta}_1 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \epsilon_0)$이고 두 번째 부분은 GARCH 모형 부분으로 $\boldsymbol{\delta}_2 = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ 부분이다. MCMC 과정에서 $\boldsymbol{\delta}_1$의 추출은 일반적인 ARMA 모형

$$y_t = x_t'\boldsymbol{\gamma} + \sum_{j=1}^{p} \phi_j \left(y_{t-j} - x_{t-j}'\boldsymbol{\gamma}\right) + \epsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \epsilon_{t-j}, \quad \epsilon \sim N\left(0, \sigma_t^2\right) \tag{2.5}$$

을 이용하고 $\boldsymbol{\delta}_2$의 추출은 GARCH 모형

$$\epsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{l} (\alpha_j + \beta_j)\, \epsilon_{t-j}^2 + \omega_t - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \omega_{t-j}, \quad \omega_t \sim N\left(0, 2\sigma_t^4\right) \tag{2.6}$$

을 이용한다. 조건부 분산 $\Sigma =$daig$\{\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2\}$는 고정된 알려진 값이라고 가정하였고 각 MCMC 과정에서 추출된 표본을 이용하여 조건부 분산 $\{\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2\}$과 오차항의 추정치 $\{\hat{\epsilon}_1, \ldots, \epsilon_n\}$를 함께 갱신한다. 이제 각 단계에서 표본을 추출하는 과정에 대하여 자세히 살펴보자.

(1) γ의 추출

회귀 계수 $\boldsymbol{\gamma}$에 대한 조건부 분포를 구하기 위하여 우도함수를 다음과 같이 재표현 할 수 있다.

$$f(Y|X, \Sigma, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \epsilon, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \Pi_{t=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left[-\frac{(y_t^* - x_t'^{*}\gamma)^2}{2\sigma_t^2}\right].$$

여기서 $\Sigma = \text{daig}\{\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2\}$이고, y_t^*와 x_t^*는 다음과 같다.

$$y_t^* = y_t - \sum_{j=1}^{p} \phi_j y_{t-j} - \sum_{j=1}^{q} \theta_j y_{t-j}^*, \qquad x_t^* = x_t - \sum_{j=1}^{p} \phi_j x_{t-j} - \sum_{j=1}^{q} \theta_j x_{t-j}^*.$$

여기서 $y_0^* = \epsilon_0$, 모든 $t < 0$에서 $y_t = y_t^* = 0$이고 $t \le 0$에서 $x_t = x_t^* = 0$이다. 그리고 ARMA 모형으로부터 $Y^* - X\boldsymbol{\gamma} = \epsilon$로 놓았을 때 $\epsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$이므로 우도함수와 사전분포가 모두 정규분포를 따르므로 γ에 대한 조건부 사후분포는 다음과 같은 k변량 정규분포가 됨을 알수 있다.

$$f(\boldsymbol{\gamma}|Y, X, \Sigma, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \epsilon, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \sim N_k\left(\hat{\mu}_{\boldsymbol{\gamma}}, \hat{\Sigma}_{\boldsymbol{\gamma}}\right).$$

여기서 $\hat{\mu}_{\boldsymbol{\gamma}} = \hat{\Sigma}_{\boldsymbol{\gamma}}(X_{\boldsymbol{\gamma}}^{'}\Sigma^{-1}Y_{\boldsymbol{\gamma}} + \Sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^{-1}\mu_{\boldsymbol{\gamma}})$, $\hat{\Sigma}_{\boldsymbol{\gamma}} = (X_{\boldsymbol{\gamma}}^{'}\Sigma^{-1}X_{\boldsymbol{\gamma}} + \Sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^{-1})^{-1}$이고, $Y_{\boldsymbol{\gamma}} = [y_1^*, \ldots, y_n^*]'$, $X_{\boldsymbol{\gamma}} = [x'^*_1, \ldots, x'^*_n]'$이다.

(2) ϕ의 추출

$\boldsymbol{\gamma}$와 유사한 방법으로 AR 계수($\boldsymbol{\phi}$)에 대한 조건부 사후분포를 구하기 위해 우도함수를 다음과 같이 재표현한다.

$$f(Y|X, \Sigma, \boldsymbol{\gamma\phi}, \boldsymbol{\theta}, \epsilon, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \Pi_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left[-\frac{(\tilde{y}_t - \tilde{x}_t\boldsymbol{\phi})^2}{2\sigma_t^2}\right]. \tag{2.7}$$

여기서 $\tilde{y}_t$, $\tilde{x}_t$는 다음과 같다.

$$\tilde{y}_t = y_t - x_t'\gamma - \sum_{j=1}^{q}\theta_j\tilde{y}_{t-j}, \qquad \tilde{x_t} = [\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n]. \tag{2.8}$$

여기서 $\tilde{y}_0 = \epsilon_0$, 모든 $t < 0$에서 $y_t = \tilde{y}_t = 0$이다. 그리고 ARMA 모형으로부터 $\tilde{y} - \tilde{x}_t\boldsymbol{\phi} = \epsilon$을 보일 수 있다. 따라서 재표현된 우도함수 (2.7)과 사전분포 (2.3)이 모두 정규분포를 따르므로 $\boldsymbol{\phi}$에 대한 조건부 사후분포는 다음과 같은 정규분포가 됨을 알 수 있다.

$$\boldsymbol{\phi}|Y, X, \Sigma, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\theta}, \epsilon, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \sim N_p\left(\hat{\mu}_{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\Sigma}_{\boldsymbol{\phi}}\right) I_{c1}(\boldsymbol{\phi}).$$

여기서 $\hat{\mu}_{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\Sigma}_{\boldsymbol{\phi}}(X_{\boldsymbol{\phi}}^{'}\Sigma^{-1}Y_{\boldsymbol{\phi}} + \Sigma_{\boldsymbol{\phi}}^{-1}\mu_{\boldsymbol{\phi}})$, $\hat{\Sigma}_{\boldsymbol{\phi}} = (X_{\boldsymbol{\phi}}^{'}\Sigma^{-1}X_{\boldsymbol{\phi}} + \Sigma_{\boldsymbol{\phi}}^{-1})^{-1}$이고, $Y_\phi = [\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n]'$, $X_\phi = [\tilde{x}_1', \ldots, \tilde{x}_n']'$이다. 조건부 사후분포 함수로부터 추출된 ϕ들이 2.1절의 조건 C1을 만족시키지 않은 경우 표본을 갱신하지 않고 버린다.

(3) $\boldsymbol{\theta}$의 추출

ARMA 모형의 MA 계수 $\boldsymbol{\theta}$의 추출을 위한 과정은 오차항 u_t가 θ들에 대하여 비선형 함수이기 때문에 다른 모수들에 비하여 보다 복잡한 과정을 거치게 되고 조건부 사후분포가 알려진 분포의 형태를 따르지 않는다. 먼저 테일러정리에 의해 $\epsilon_t(\boldsymbol{\theta}) \approx \epsilon_t(\boldsymbol{\theta}^*) + \psi_t(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*)$와 같이 선형화하여 표현할 수 있다. 여기서, $\epsilon_t(\boldsymbol{\theta}^*) = y_t^*(\boldsymbol{\theta}^*) - x_t^{'*}(\boldsymbol{\theta}^*)\boldsymbol{\theta}$이고, $\psi_t = [\psi_{1t}, \ldots, \psi_{qt}]$는 $\boldsymbol{\theta}^*$에서 $\epsilon_t(\boldsymbol{\theta})$을 1차 미분한 것으로 다음과 같다.

$$\psi_t = -\epsilon_{t-i}(\theta^*) - \sum_{j=1}^{q}\theta_j^*\psi_{it-j}, \quad (i = 1, \ldots, q).$$

여기서 모든 $t \le 0$에서 $\psi_{it} = 0$이다. $\boldsymbol{\theta}^*$의 선택을 위하여 Chib과 Greenberg (1994)가 제안한 방법에 GARCH 모형이 가지는 이분산성을 고려하여 다음과 같은 가중 비선형 최소제곱추정을 선택하였다.

$$\boldsymbol{\theta}^* = \text{argmin}_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{t=1}^{n} \frac{\{\epsilon_t(\boldsymbol{\theta})\}^2}{\sigma_t^2}.$$

이를 이용하여 근사적인 우도함수를 다음과 같이 재표현 할 수 있다.

$$f(Y|X,\Sigma,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta},\epsilon,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \Pi_{t=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left[-\frac{\{\epsilon_t(\boldsymbol{\theta}^*) + \psi_t(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}^*)\}^2}{2\sigma_t^2}\right],$$

이 우도함수와 사전분포 (2.3)을 이용하면 $\boldsymbol{\theta}$ 추출을 위한 제안분포는 다음과 같은 q-변량 정규분포를 따르게 된다.

$$\boldsymbol{\theta}|Y,X,\Sigma,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\phi},\epsilon,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \sim N\left(\hat{\mu}_{\boldsymbol{\theta}},\hat{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}\right) I_{c2}(\boldsymbol{\theta}). \tag{2.9}$$

여기서 $\hat{\mu}_{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}(X_{\boldsymbol{\theta}}'\Sigma^{-1}Y_{\boldsymbol{\theta}}+\Sigma^{-1}\mu_{\boldsymbol{\theta}})$, $\hat{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}} = (X_{\boldsymbol{\theta}}'\Sigma^{-1}X_{\boldsymbol{\theta}}+\Sigma_{\boldsymbol{\theta}}^{-1})^{-1}$이고, $Y_{\boldsymbol{\theta}} = [\psi_1\boldsymbol{\theta}^*-\epsilon_1(\boldsymbol{\theta}^*),\ldots,\psi_n\boldsymbol{\theta}^*-\epsilon_n(\boldsymbol{\theta}^*)]'$, $X_{\boldsymbol{\theta}} = [\psi_1',\ldots,\psi_n']'$이다.

언급한 바와 같이 $\boldsymbol{\theta}$에 대한 조건부 사후분포함수는 일반적으로 알려진 함수의 형태가 아니기에 Metropolis-Hastings 알고리즘 (Metropolis 등, 1953; Hastings, 1970)을 이용하여 표본추출 과정을 완성한다. Metropolis-Hastings 알고리즘을 이용한 표본추출 절차는 다음과 같다 (Tierney, 1994).

1. 새로운 표본 $\boldsymbol{\theta}^m$을 제안분포 $J(\boldsymbol{\theta}^m|\boldsymbol{\theta}^{m-1})$로 부터 추출한다. 제안분포 $J(\boldsymbol{\theta}^m|\boldsymbol{\theta}^{m-1})$는 식 (2.9)가 된다.
2. 이동확률 $\alpha = \min\{1,c\}$를 가지고 $\boldsymbol{\theta}^m$를 갱신한다. 여기서

$$c = \frac{p(\boldsymbol{\theta}^m|\cdot)/J(\boldsymbol{\theta}^m|\boldsymbol{\theta}^{m-1})}{p(\boldsymbol{\theta}^{m-1}|\cdot)/J(\boldsymbol{\theta}^{m-1}|\boldsymbol{\theta}^m)}$$

이고 $p(\cdot|\cdot)$은 사후분포함수 식 (2.2)이다.

(4) ϵ_0의 추출

$t \leq 0$일 때의 오차 즉, 사전 표본 오차(pre-sample error) ϵ_0의 표본추출 절차는 다음과 같다. ARMA-GARCH 모형 (2.5)로부터 모든 $t < 0$에서 $y_t = \epsilon_t = 0$, $x_t = 0$이고, $t > p$에 대해 $\phi_t = 0$, $t > q$에 대해 $\theta_t = 0$이다. $t > \max\{p,q\}$일 때, 식 (2.5)는 ϵ_0에 의존하지 않는다. 우도함수는 다음과 같이 재표현된다.

$$f\left(Y|X,\Sigma,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta},\epsilon,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right) = \Pi_{t=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left[-\frac{(y_t^\dagger - x_t^\dagger\epsilon_0)^2}{2\sigma_t^2}\right].$$

여기서 $y_t^\dagger, x_t^\dagger$는 다음과 같다.

$$y_t^\dagger = y_t - x_t\gamma - \sum_{j=1}^{p}\phi_j(y_{t-j} - x_{t-j}\gamma) - \sum_{j=1}^{q}\theta_j y_{t-j}^\dagger,$$
$$x_t^\dagger = (\phi_t + \theta_t) - \sum_{j=1}^{q}\theta_j x_{t-j}^\dagger.$$

$\boldsymbol{\gamma}$의 전개과정과 유사하게 모든 $t \leq 0$에 대해 $y_t = y_t^\dagger = 0$이고 $x_t = x_t^\dagger = 0$이다. 이 재표현된 우도함수와 사전분포 (2.3)은 모두 정규분포를 따르고 ϵ_0의 조건부 사후우도 함수는 다음과 같은 정규분포를 따른다.

$$\epsilon_0|Y,X,\Sigma,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \sim N\left(\hat{\mu}_{\epsilon_0},\hat{\Sigma}_{\epsilon_0}\right).$$

여기서 $\hat{\mu}_{\epsilon_0} = \hat{\Sigma}_{\epsilon_0}(\sum_{t=1}^{n} x_t^{\dagger 2}/\sigma_t^2 + \mu_{\epsilon_0}/\sigma_{\epsilon_0}^2)$이고, $\hat{\Sigma}_{\epsilon_0} = (\sum_{t=1}^{n} x_t^{\dagger} y_t^{\dagger}/\sigma_t^2 + \sigma_{\epsilon_0}^{-2})^{-1}$이다.

(5) $\boldsymbol{\alpha}$의 추출

GARCH 모형 (2.6)으로부터 $\boldsymbol{\alpha}$와 $\boldsymbol{\beta}$의 표본추출 방법에 들어가기 앞서 간단하게 사전 표본 오차 ω_0의 생성방법에 대하여 알아보자. 초기 분산을 $\sigma_0^2 = \alpha_0$이라 가정하면, $\omega_t = \epsilon_t^2 - \sigma_t^2$이므로 $\omega_0 = \epsilon_0^2 - \alpha_0$가 된다. ω_0는 사실상 ϵ_0^2, α_0에 의해 결정되므로 별도의 추출과정이 필요없게 된다.

이제 ARMA-GARCH 모형에서 GARCH 부분의 모수인 α들의 추출방법에 대하여 살펴보자. α의 조건부 사후 분포 함수는 일반적으로 알려진 형태의 분포가 아니므로 이 역시 적절한 제안분포를 이용하여 표본을 추출한 후 Metropolis-Hastings 알고리즘을 이용할 수 있다. GARCH 모형 (2.6)으로부터 ϵ^2에 대한 우도함수를 근사적으로 다음과 같이 재표현할 수 있다.

$$f(\epsilon^2|Y, X, \Lambda, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \epsilon_0, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \Pi_{t=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(2\sigma_t^4)}} \exp\left[-\frac{(\bar{\epsilon}_t^2 - \zeta_t\alpha)^2}{2(2\sigma_t^4)}\right].$$

여기서 $\Lambda = \text{diag}\{2\sigma_1^4, \ldots, 2\sigma_n^4\}$, $\epsilon^2 = [\epsilon_1^2, \ldots, \epsilon_n^2]'$이고, $\omega_t = \bar{\epsilon}_1^2 - \zeta_t\alpha$이다. ARMA 모형에서의 변환 (2.8)과 같이 $\tilde{\epsilon}_t^2 = \epsilon_t^2 + \sum_{j=1}^{q}\beta_j\tilde{\epsilon}_{t-j}^2$, $\tilde{\iota}_t = 1 + \sum_{j=1}^{q}\beta_j\tilde{\epsilon}_{t-j}^2$일때, $\bar{\epsilon}_t^2$, ζ_t는 다음과 같다.

$$\bar{\epsilon}_t^2 = \tilde{\epsilon}_t^2 - \sum_{j=1}^{s}\beta_j\tilde{\epsilon}_{t-j}^2, \qquad \zeta_t = \left[\tilde{\iota}_t, \tilde{\epsilon}_{t-1}^2, \ldots, \tilde{\epsilon}_{t-r}^2\right].$$

근사된 우도함수와 사전분포 (2.3)이 모두 r-변량 정규분포를 따르므로 $\boldsymbol{\alpha}$에 대한 제안 분포는 다음과 같다.

$$\alpha|Y, X, \Lambda, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \epsilon_0, \boldsymbol{\beta} \sim N\left(\hat{\mu}_{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}\right) I_{c3}(\boldsymbol{\alpha}).$$

여기서 $\hat{\mu}_{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}(X_{\boldsymbol{\alpha}}'\Lambda^{-1}Y_{\boldsymbol{\alpha}} + \Sigma_{\boldsymbol{\alpha}}^{-1}\mu_{\boldsymbol{\alpha}})$, $\hat{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}} = (X_{\boldsymbol{\alpha}}'\Lambda^{-1}X_{\boldsymbol{\alpha}} + \Sigma_{\boldsymbol{\alpha}}^{-1})^{-1}$이고, $Y_{\boldsymbol{\alpha}} = [\bar{\epsilon}_1^2, \ldots, \bar{\epsilon}_n^2]'$, $X_{\boldsymbol{\alpha}} = [\zeta_1', \ldots, \zeta_n']'$이다.

(6) $\boldsymbol{\beta}$의 추출

GARCH 계수 β에 대한 표본 추출과정을 알아보자. ARMA 모형의 θ와 비슷하게 적절한 제안분포로부터 표본을 추출한 후 Metropolis-Hastings 알고리즘을 이용하여 표본을 추출할 수 있다. 테일러 정리에 의해 $\omega_t(\boldsymbol{\beta}) \approx \omega_t(\boldsymbol{\beta}^*) - \xi_t(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^*)$과 같이 선형화하여 표현할 수 있다. $\xi_t = [\xi_{1t}, \ldots, \xi_{st}]$는 $\boldsymbol{\beta}^*$에서 $\sigma_t^2(\beta)$을 1차 미분한 것으로 다음과 같다.

$$\xi_{it} = \sigma_{t-i}(\beta^*) + \sum_{j=1}^{s}\xi_{it-j}.$$

여기서, $\boldsymbol{\beta}^*$는 GARCH 모형의 이분산성을 고려하여 다음을 만족하는 것으로 선택한다.

$$\beta^* = \text{argmin}_{\boldsymbol{\beta}} \sum_{t=1}^{n} \frac{\{\omega_t(\boldsymbol{\beta})\}^2}{2\sigma_t^4}.$$

이를 이용하여 근사적인 우도 함수는 다음과 같이 재표현된다.

$$f\left(\epsilon^2|Y, X, \Lambda, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \epsilon_0, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\right) = \Pi_{t=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(2\sigma_t^4)}} \exp\left[-\frac{\{\omega_t(\boldsymbol{\beta}^*) - \xi_t(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^*)\}^2}{2(2\sigma_t^4)}\right].$$

이 우도함수와 사전분포 (2.3)을 이용하면 $\boldsymbol{\beta}$에 대한 제안 분포는 다음과 같은 s-변량 정규분포를 따른다.

$$\boldsymbol{\beta}|Y, X, \Lambda, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \epsilon_0, \boldsymbol{\alpha} \sim N\left(\hat{\mu}_{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}}\right) I_{c4}(\boldsymbol{\beta}).$$

여기서 $\hat{\mu}_{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}}(X_{\boldsymbol{\beta}}^{'}\Lambda^{-1}Y_{\boldsymbol{\beta}} + \Sigma^{-1}\mu_{\boldsymbol{\beta}})$, $\hat{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}} = (X_{\boldsymbol{\beta}}^{'}\Lambda^{-1}X_{\boldsymbol{\beta}} + \Sigma_{\boldsymbol{\beta}}^{-1})^{-1}$이고, $Y_{\boldsymbol{\beta}} = [\omega_1(\boldsymbol{\beta}^*) + \xi_1\boldsymbol{\beta}^*, \ldots, \omega_n(\boldsymbol{\beta}^*) + \xi_n\boldsymbol{\beta}^*]'$, $X_{\boldsymbol{\beta}} = [\xi_1^{'}, \ldots, \xi_n^{'}]'$이다.

2.3. 예측

Albert와 Chib (1993)이 제안한 베이지안 예측방법에 의한 예측에 대하여 알아보자. Albert와 Chib (1993)은 $n+1$ 시점의 y의 예측값을 모수의 함수 $h(\boldsymbol{\delta})$로 간주하고 추정하였다. 모형 (2.5)에서 y_{n+1}은 Y, X, Σ, ϵ_t가 주어지면 $\boldsymbol{\delta}_1(=\{\epsilon_0, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}\})$의 함수로써 y_{n+1}은 $h(\boldsymbol{\delta}_1|Y, X, \Sigma)$가 된다. 유사한 방법으로 변동성(분산)에 대한 예측값도 구할 수 있다. σ_{t+1}^2은 Y, X, Λ가 주어지면 $\boldsymbol{\delta}_2(=\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\})$의 함수 $h(\delta_2|Y, X, \Lambda)$가 된다. 이제 각 예측값은 2.2절에서 얻은 각 모수의 표본을 이용하여 다음 식을 통하여 추정할 수 있게 된다.

$$E(h(\boldsymbol{\delta})) \simeq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} h(\boldsymbol{\delta}_{(i)}). \tag{2.10}$$

이때, $\boldsymbol{\delta} = (\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2)$는 모수 집합이고 $\boldsymbol{\delta}_{(i)} = (\boldsymbol{\delta}_{1,(i)}, \boldsymbol{\delta}_{2,(i)})(i = 1, \ldots, N)$는 MCMC 방법을 통해 얻은 i번째 표본이다. 추정된 예측값 y_{n+1}을 관측된 값으로 놓고 다음과 같이 우도함수를 갱신한다.

$$l(Y|X, \boldsymbol{\delta}) = \Pi_{t=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left[-\frac{\hat{\epsilon_t}^2}{2\sigma_t^2}\right] \tag{2.11}$$

을 유사한 방법으로 σ_{t+1}^2, $\sigma_{t+2}^2, \ldots$ 또한 식 (2.10)과 (2.11)을 통하여 추정할 수 있다.

3. 모의실험

3.1. 모의실험 자료

ARMA-GARCH 모형에 대한 베이즈 추정과 최우추정을 비교하기 위해 다음과 같은 모형을 따르는 자료를 생성하였다.

$$\begin{aligned} y_t &= \gamma_1 + \gamma_2 x_t + u_t, \quad t = 1, \ldots, n \\ u_t &= \phi_1 u_{t-1} + \epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \theta_2\epsilon_{t-2} + \theta_3\epsilon_{t-3} + \theta_4\epsilon_{t-4}, \quad \epsilon_t|\mathcal{F}_{t-1} \sim N\left(0, \sigma_t^2\right) \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\epsilon_{t-2}^2 + \alpha_3\epsilon_{t-3}^2 + \alpha_4\epsilon_{t-4}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 + \beta_2\sigma_{t-2}^2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

여기서 실제 모수 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (\gamma_1, \gamma_2) &= (1.0, 1.0), \qquad \phi_1 = 0.9, \\ (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) &= (-0.48, 0.36, -0.24, 0.12), \\ (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) &= (0.001, 0.24, 0.18, 0.12, 0.06), \\ (\beta_1, \beta_2) &= (0.2, 0.1). \end{aligned}$$

식 (3.1)에서 x_t는 $(-0.5, 0.5)$ 사이의 균일분포에서 얻은 확률표본이고 표본의 수는 $n = 1{,}005$로 하였다. 이 가운데 1,000개의 표본에 대해서는 추정을 하고 나머지 5개 표본은 예측을 위한 참 값으로 남겨

표 **3.1.** 각 모수의 추정에 대한 RMSE

모수	N	베이즈 추정	N	최우추정
γ_1	500	0.004655105	163	0.005069615
γ_2	500	0.001772617	163	0.001736695
ϕ_1	500	0.020170350	163	0.019321335
θ_1	500	0.123680233	163	0.034632355
θ_2	500	0.097985203	163	0.033004545
θ_3	500	0.037407219	163	0.037783594
θ_4	500	0.031935873	163	0.031865342
ϵ_0	500	0.019400593		
α_0	500	0.000896707	163	0.000892526
α_1	500	0.052835594	163	0.058977114
α_2	500	0.054109149	163	0.056877060
α_3	500	0.048397314	163	0.064284524
α_4	500	0.029917637	163	0.044123690
β_1	500	0.042184120	163	0.120102873
β_2	500	0.033645208	163	0.086357397

두었다. 베이즈 추정을 위해 필요한 사전분포는 다음과 같이 무정보적(noninformative) 사전분포 이면서 적절(proper) 사전분포가 되도록 할당하였다.

$$p(\epsilon_0,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = N(0,10)\times N(0,10\times I_2)\times N(0,10\times I_1)I(|\phi|<1)$$
$$\times N(0,10\times I_4)I(|\theta|<1)\times N(0,10\times I_5)I(\alpha>0)\times N(0,10\times I_2)I(\beta>0).$$

이때, I_i는 $i\times i$의 항등행렬이다. 모형 (2.6)에서 GARCH 모형에서 단위근이 존재하여 IGARCH 모형이 될 사후확률을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$1-\Pr\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i+\sum_{j=1}^{s}\beta_j<1\right)\approx\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}I\left(\sum_{i=1}^{4}\alpha_i^k+\sum_{j=1}^{2}\beta_j^k\geq 1\right). \tag{3.2}$$

여기서 α_i^k과 β_j^k은 k번째 MCMC 확률표본을 의미한다. 본 논문에서는 베이즈 추정과 최우추정에 대한 평균제곱오차제곱근(root mean squared error; RMSE)을 구하기 위해 모형 (3.1)을 따르는 자료를 각각 500개 생성하였다. 베이즈 추정에서는 MCMC 방법을 이용하여 총 33,000개의 확률표본을 추출하였다. 이 가운데 초기 3,000개의 확률표본은 계열의 안정성을 위해 사용하지 않았다(burn-in sample). 또한 MCMC 표본추출에서 표본들이 가지는 강한 자기 상관성(serial correlation)을 제거하기 위해 30,000개의 표본 가운데 매 3번째 값만을 선택하여 최종 10,000개의 확률표본을 분석에 이용하였다.

3.2. 베이즈 추정과 최우추정 결과 비교

500개 각 자료를 가지고 모수에 대한 추정한 결과, 베이즈 추정은 모두 수렴(converge)하였으나, 최우추정은 전체 자료의 약 1/3정도인 163개 표본만이 수렴하였다. 베이즈 추정과 최우추정의 성능을 비교하기 위해서 모의실험 자료의 추정값에 대한 RMSE를 구하였다. 결과는 표 3.1과 같다. 추정 방법에 따른 RMSE의 큰 차이는 보이지 않지만, 최우추정은 전체 자료의 약 1/3정도(163개)만 믿을 만한 추정값을 제공하였고 베이즈 추정은 전체 자료에서 믿을 만한 추정값을 제공하였다는 점에서 큰 의미를 가진다.

표 **3.2.** 예측값에 대한 RMSE와 예측값의 신뢰구간에 대한 CP

예측값	N	베이즈 추정의 RMSE	HPD의 CP	N	최우추정의 RMSE	CP
$\hat{Y}_{1001}$	500	0.058956764	0.918	163	0.031181902	0.944
$\hat{\sigma}^2_{1001}$	500	0.007211657	0.938	163	0.000274188	
$\hat{Y}_{1002}$	500	0.056849802	0.938	163	0.056601237	0.803
$\hat{\sigma}^2_{1002}$	500	0.009903737	0.944	163	0.000770967	
$\hat{Y}_{1003}$	500	0.075097936	0.908	163	0.066099168	0.822
$\hat{\sigma}^2_{1003}$	500	0.008758425	0.950	163	0.001147693	
$\hat{Y}_{1004}$	500	0.064700077	0.916	163	0.063792633	0.791
$\hat{\sigma}^2_{1004}$	500	0.003813660	0.954	163	0.001806018	
$\hat{Y}_{1005}$	500	0.091338382	0.900	163	0.086393866	0.815
$\hat{\sigma}^2_{1005}$	500	0.009054612	0.938	163	0.001865369	

각 예측값에 대한 예측 정확도를 비교하기 위하여 5시점의 예측값에 대한 RMSE를 계산하였고 예측값의 구간추정으로 베이지안 방법에 대해서는 500개의 표본으로부터 95% HPD 신용구간을 계산하였고 ML 추정에서는 수렴한 163개의 표본으로부터 95% 신뢰구간을 계산한 후 각 구간들이 실제값을 포함하는지에 대한 확률인 포함확률(coverage probablilty; CP)를 계산하였다. 표 3.2는 5개의 예측값에 대한 RMSE와 CP를 정리한 표이다. 여기서 $\hat{Y}_i$와 $\hat{\sigma}_i^2$은 각각 $i\,(i > n)$시점에서의 평균과 분산(변동성)에 대한 예측값이다.

예측값에 대한 두 추정 방법의 RMSE 역시 큰 차이는 보이지 않지만, 예측값의 신뢰구간에서는 차이를 보인다. 베이즈 추정은 평균과 변동성 예측뿐만 아니라 이에 대한 신뢰구간도 구할 수 있는 반면에 최우추정은 변동성 예측의 신뢰구간을 구할 수 없다. 또한 예측의 95% 신뢰구간에서 예측 시점이 길어짐에 따라 베이즈 추정의 HPD구간은 90∼95%의 CP를 유지하지만 ML 추정에 기초한 신뢰구간에서는 점차 줄어듬을 볼 수 있다. 다음으로 GARCH 모형에서 IGARCH 모형이 될 사후확률 (3.2)를 계산한 결과 0.0768623의 확률을 얻었다. 즉 약 7.7%의 자료에서 GARCH 모형에서 단위근이 존재하여 IGARCH 모형이 된다 할 수 있다.

4. 결론

최근 경제가 급변하면서 옵션의 가격 결정과 자산의 위험관리에서 변동성의 중요성이 더욱 커지고 있다. 이러한 변동성은 분산을 지칭하며, 위험(risk)을 측정하는 수단이 되므로 정확한 추정과 예측이 필요하다. 본 논문에서는 변동성에 대한 모형으로 오차항이 ARMA(p, q)-GARCH(r, s) 모형을 따르는 회귀모형을 설정하였다. 이 모형은 ARMA 모형 뿐 아니라 GARCH 모형을 따르는 오차항에 대한 추론이 가능한 완전(full)모형이라 할 수 있다. 이 모형의 베이즈 추정을 위한 깁스 표본추출과 Metropolis-Hasting 알고리즘을 이용한 MCMC 방법을 전개하였다. 베이즈 추정과 최우추정의 RMSE를 비교한 결과, 큰 차이는 보이지 않았지만 자료의 1/3에서만 추정값이 수렴하였던 최우추정과 다르게 베이즈 추정에서는 모든 자료에 대한 추정이 가능 하였다. 또한, 베이즈 추정을 사용하여 오차와 조건부 이분산에 대한 초기 표본오차(pre-sample error) 값을 처리할 수 있었고, GARCH 모형에서 단위근이 존재하여 IGARCH 모형이 될 사후확률도 구할 수 있었다. 구간추정면에서 베이즈 추정은 최대우도추정법으로 구할 수 없었던 분산(변동성)에 대한 예측의 신뢰구간을 구할 수 있었으며, 평균에 대한 신뢰구간에서도 최우추정보다 베이즈 추정의 HPD 신용구간이 실제값을 포함할 확률(Coverage Probability)이 더 좋았고, 예측 시점이 길어지더라도 안정적인 확률을 가짐을 보였다.

참고문헌

김우환 (2011). GARCH-ARJI 모형을 활용한 KOSPI 수익률의 변동성에 관한 실증분석, <응용통계연구>, **24**, 78–81.

박만식, 김나영, 김희영 (2008). 이분산 시계열모형을 이용한 국내주식자료의 군집분석, <한국통계학회논문집>, **15**, 925–937.

박유성, 송석헌 (1998). <경영·경제자료분석>, 정일출판사. 서울.

홍선영, 최성미, 박진아, 백지선, 황선영 (2009). 지속-변동성을 가진 비대칭 TARCH 모형을 이용한 국내금융시계열 분석, <한국통계학회논문집>, **16**, 605–614.

Albert, J. and Chib, S. (1993). Bayesian inference for autoregressive time series with mean and variance subject to Markov jumps, *Journal of Business and Economic Statistics*, **11**, 1–15.

Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.

Chib, S. and Greenberg, E. (1994). Bayesian inference in regression modes with ARMA(p, q) errors, *Journal of Econometrics*, **64**, 183–206.

Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*, **50**, 987–1008.

Engle, R. F. and Bollerslev, T. (1986). Modeling the persistence of conditional variances, *Econometric Reviews*, **5**, 1–50.

Engle, R. F., Lillien, D. M. and Robin, R. P. (1987). Estimating time varying risk premia in the term structure: The ARMA-M model, *Econometrica*, **55**, 391–408.

Gelfand, A. E. and Smith, A. F. M. (1990). Sampling-based approachs to calculating marginal densities, *Journal of the American Statistical Association*, **85**, 398–409.

Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analisis*, Princeton University Press, Princeton, New York.

Hastings, W. K. (1970). Monte Carlo sampling methods using Markov Chains and their applications, *Biometrika*, **57**, 97–109.

Jacquier, E., Polson, N. G. and Rossi, P. E. (1994). Bayesian analisis of stochastic volatiliy models(with discussion), *Journal of Business & Economic Statistics*, **12**, 371–417.

Kleibergen, F. and Van Dijk, H. K. (1993). Non-stationarity in GARCH models: A Bayesian analisis, *Journal of Applied Econometrics*, **8**, S41–S61.

Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H. and Teller, E. (1953). Equations of state calculations by fast computing machines, *Journal of Chemical Physics*, **21**, 1087–1092.

Muller, P. and Pole, A. (1995). *Monte Carlo Posterior Intergration in GARCH Models*, Manuscript, Duke University.

Nakatsuma, T. (2000). Bayesian analysis of ARMA-GARCH models: A Markov chain sampling approach, *Journal of Econometrics*, **95**, 57–69.

Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach, *Econometrica*, **59**, 347–370.

Tierney, L. (1994). Markov Chains for exploring posterior distributions(with discussion), *Annals of Statistics*, **22**, 1701–1762.

Tsay, R. S. (2002). *Analysis of Financial Time Series*, Wiley Series in Probability and Statistics.

A Study for Forecasting Methods of ARMA-GARCH Model Using MCMC Approach

Wha Yeon Chae[1] · Boseung Choi[2] · Keewhan Kim[3] · Yousung Park[4]

[1]Citibank Korea Inc.; [2]Department of Computer Science and Statistics, Daegu University
[3]Department of Information and Statistics, Korea University
[4]Department of Statistics, Korea University

(Received December 2010; accepted March 2011)

Abstract

The volatility is one of most important parameters in the areas of pricing of financial derivatives and measuring risks arising from a sudden change of economic circumstance. We propose a Bayesian approach to estimate the volatility varying with time under a linear model with ARMA(p, q)-GARCH(r, s) errors. This Bayesian estimate of the volatility is compared with the ML estimate. We also present the probability of existence of the unit root in the GARCH model.

Keywords: Volatility, GARCH model, Bayesian inference, MCMC.

[4]Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Korea University, Seoul 136-701, Korea.
E-mail: yspark@korea.ac.kr