

---

# 4-ary SWSK 시스템에서 웨이블릿에 대한 비트 에러 확률에 관한 연구

정태일\*

A Study on Probability of Bit Error for Wavelet in 4-ary SWSK System

Tae-Il Jeong\*

## 요 약

본 논문은 4-ary SWSK(4-ary scaling wavelet shift keying) 시스템에서 여러 가지 웨이블릿 종류에 대하여 비트 에러 확률에 대한 성능을 연구하고자 한다. 기존의 4-ary SWSK 시스템에서 비트 에러 확률이 유도된 바 있다. 그래서 기존의 비트 에러 확률을 이용하여 Daubechies, Biorthogonal, Coiflet, Symlet 웨이블릿에 대한 비트 에러 확률을 실험적으로 구하였다. 또 웨이블릿의 탭 개수와 주기 변화에 대해서 그 성능을 분석하였다. 실험결과 4-ary SWSK 시스템에서 Coiflet, Symlet 웨이블릿이 비트 에러 확률면에서 좋은 성능을 보였고, 두 웨이블릿의 성능은 비슷하였음을 확인하였다.

## ABSTRACT

This paper presents a study on the performance analysis on probability of bit error for wavelet in 4-ary SWSK system. The formula for the bit error probability in 4-ary SWSK system was derived from the conventional method. This paper experimentally implements the probability of bit error for Daubechies, Biorthogonal, Coiflet and Symlet wavelet using the conventional formula of bit error probability. Additionally, the performance of bit error probability is analyzed for the period and the number of wavelet taps. Based on the results, we confirmed that the performance of Coiflet and Symlet wavelet for the probability of bit error is superior to the other wavelet, and their probability of bit error are similar.

## 키워드

4-ary 스케일링 웨이블릿 편이변조, 비트 에러 확률, 스케일링 함수, 웨이블릿

## Key word

4-ary SWSK(4-ary scaling wavelet shift keying), Probability of bit error, Scaling function, Wavelet

---

\* 정회원 : 부경대학교 전자공학과 (tijeong@daum.net)

접수일자 : 2010. 10. 14

심사완료일자 : 2010. 12. 09

## I. 서 론

이산 웨이브릿 변환은 수학적 이론의 발전과 더불어 음성 신호처리, 영상 신호처리 등 여러 분야 많이 응용되고 있다[1-3]. 연속 웨이브릿 변환이 정규 직교성을 지니지 않은 웨이브릿에 의한 연산이며, 따라서 역변환 과정이 복잡하며, 까다로운 허용 가능조건 및 경우에 따라 복원시 신호 또는 이미지의 미세한 정보손실이 불가피하다. 반면 이산 웨이브릿은 정규 직교성을 지니는 웨이브릿을 이용하여 신호의 완전한 복원이 가능하다. 연속 웨이브릿 변환이 신호 또는 이미지의 스케일 특성 분석을 위한 방법이라면, 이산 웨이브릿 변환은 정규직교 기저함수인 스케일 함수  $\phi(t)$ 와 이로부터 구해진 웨이브릿  $\psi(t)$ 을 이용하여 이미지 압축, 디지털 통신 등의 데이터 프로세싱에 응용된다. 이러한 이산 웨이브릿 변환은 통신분야에서도 많이 응용되고 있다[4-6].

정 등[7]은 스케일링 함수와 웨이브릿을 이용한 새로운 웨이브릿 편이 변조 시스템을 제안하였다. 이 방법은 스케일링 함수를 1로, 웨이브릿을 0으로 변조하는 방법이다. 그러나 이 방식은 후처리 과정이 필요한 단점이 있다. 또한 정[8]등은 2진 웨이브릿 편이 변조 시스템에서 Daubechies 웨이브릿 계열을 중심으로 눈 모양(eye pattern)에 의한 방법과 비트 에러 확률에 의한 방법으로서 웨이브릿의 성능을 분석하였다. 그리고 정 등[9]은 스케일링 함수와 웨이브릿 그리고 이 두 신호를 반전시켜서 생성된 4개의 반송파를 사용하는 2비트 변조방법을 제안하였다.

2비트 변조방법인 4-ary 스케일링 웨이브릿 편이 변조(4-ary SWSK : 4-ary scaling wavelet shift keying) 시스템을 정의하였고, QPSK (quadrature phase shift keying) 시스템으로부터 정의된 시스템의 비트 에러 확률과 부호 에러 확률을 유도하였다. 그래서 기존의 QPSK 방식과 MFSK (M-ary frequency shift keying) 방식에 대하여 비트 에러 확률 및 부호 에러 확률로서 그 성능을 분석하였다.

본 논문에서는 4-ary SWSK 시스템에서 웨이브릿에 대한 비트 에러 확률의 성능을 연구하고자 한다. 참고 문헌 [9]에서 유도된 비트 에러 확률 공식을 이용하여 Daubechies, Biorthogonal, Coiflet, Symlet 웨이브릿에 대

한 비트 에러 확률을 실험적으로 구하였다. 또 웨이브릿의 탭 개수와 주기 변화에 대해서 그 성능을 분석하였다.

## II. 관련이론

### 2.1 웨이브릿 변환 (Wavelet Transform)

함수  $f(t)$ 가  $L^2(R)$ 에 속한다면, 함수  $f(t)$ 의 이중적분의 놈(norm)은 유한이며 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\|f(t)\|^2 = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \right)^{1/2} < \infty \quad (1)$$

두 함수  $f(t)$ 와  $g(t)$ 가 각각  $L^2(R)$ 에 속하며, 두 함수의 내적이 다음과 같을 때 두 함수는 서로 직교(orthogonal)한다.

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int f(t)g(t-k)dt = \begin{cases} A, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

위 식에서 상수=1인 경우, 함수  $f(t)$ 와  $g(t)$ 는 정규 직교(orthonormal)라 정의한다.

이산 웨이브릿 변환에 있어서 함수의 직교성은 매우 중요한 의미를 가진다. 함수  $f(t)$ 는 정규직교 기저인 스케일 함수  $\phi_k(t)$ 를 이용하면 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$f(t) = \sum_k a_k \phi_k(t), \quad a_k = |a_k|^2 < \infty \quad (3)$$

이산 웨이브릿 변환은 위의 식(3)을 기반으로 정의된다. 즉, 이산 웨이브릿 변환은 정규직교 기저인 스케일 함수  $\phi_j(t)$ 와 웨이브릿  $\psi_j(t)$ 를 이용하여 함수  $f(t)$ 를 표현하는 방법이다. 정규 직교 기저를 이루는 웨이브릿은 다음과 같이 정의한다.

$$\psi_{jk} = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in z \quad (4)$$

따라서 정규 직교 기저 웨이브릿을 이용한 웨이브릿 변환은 다음과 같이 정의한다[1].

$$W_{jk} = \langle f(t), \psi_{jk}(t) \rangle \quad (5)$$

웨이브릿 변환은 정규 직교 기저를 이용한 이산 웨이브릿 변환과 연속 웨이브릿 변환의 두 분야로 나누어져 발전되었다. 웨이브릿의 정규 직교성에 따라 이산 웨이브릿 변환과 연속 웨이브릿 변환으로 나누어지며 각각 다른 응용분야를 형성하고 있다. 이산 웨이브릿의 경우, 저주파 계수(low frequency coefficients)는 수식 (6)와 같다[2,8].

$$\sum_n g_0(n) = \sqrt{2} \quad (6a)$$

$$\sum_n g_0^2(n) = 1 \quad (6b)$$

그리고 고주파 계수(high frequency coefficients)는 수식 (7)와 같다.

$$\sum_n g_1(n) = 0 \quad (7a)$$

$$\sum_n g_1^2(n) = 1 \quad (7b)$$

### III. 4-ary SWSK 시스템

4-ary SWSK 시스템에서는 스케일링 함수와 웨이브릿 그리고 이 두 신호를 반전시킨 4개의 반송파를 사용하여 4진 변조하는 방식이다. 즉, 웨이브릿은 00, 반전된 웨이브릿은 01, 스케일링 함수를 10, 반전된 스케일링 함수를 11로 변조한다. 본 논문에서는 4-ary SWSK 시스템에서 Daubechies, Biorthogonal, Coiflet, Symlet 웨이브릿에 대해서 비트 에러 확률로서 시스템의 성능을 분석코자 한다.

#### 3.1 변조기 알고리즘

4-ary SWSK 변조기 알고리즘은 그림 1과 같다. 기존의 2개의 반송파 대신 스케일링 함수와 웨이브릿, 이 둘의 반전 함수를 사용한다. 여기서 4진 입력에 대하여 00

일 때는 버퍼에 웨이브릿을, 01일 때는 반전된 웨이브릿을, 10일 때는 스케일링 함수를, 11일 때는 반전된 스케일링 함수를 변조하며, 이를 수식으로 표현하면 식(8)과 같다[9].

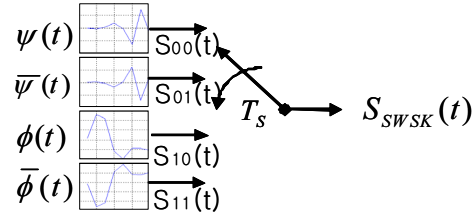


그림 1. 4-ary SWSK 변조 알고리즘

Fig. 1 Modulation algorithm for 4-ary SWSK.

$$S_{SWSK}(t) = \begin{cases} s_{00}(t) = \psi(t) & 0 \leq t \leq T, \text{ 00인 경우} \\ s_{01}(t) = \bar{\psi}(t) & 0 \leq t \leq T, \text{ 01인 경우} \\ s_{10}(t) = \phi(t) & 0 \leq t \leq T, \text{ 10인 경우} \\ s_{11}(t) = \bar{\phi}(t) & 0 \leq t \leq T, \text{ 11인 경우} \end{cases} \quad (8)$$

#### 3.2 비트 에러 확률

4-ary SWSK 시스템에서 정합필터를 이용한 복조시 비트 에러 확률( $P_{be}$  : probability of bit error)은 다음과 같다[9].

$$P_{be} = \frac{1}{\log_2 M} \operatorname{erfc} \left[ \sqrt{\left( \frac{E_s}{\eta} \right) \sin\left( \frac{\pi}{M} \right)} \right] \quad (9)$$

여기서  $M=4$ 이면,

$$P_{be} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[ \sqrt{\left( \frac{E_s}{\eta} \right) \sin\left( \frac{\pi}{4} \right)} \right] \quad (10)$$

$\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ 이고,  $E_s = T_s/2$ 이므로 M-ary 직교적인 신호의 경우, 비트 에러 확률( $P_{be}$ )은 다음과 같다.

$$P_{be} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_s}{2\eta}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{T_s}{4\eta}} \right) \quad (11)$$

#### IV. 웨이브릿의 비트 에러 확률 분석

본 논문에서 사용한 웨이브릿은 Daubechies, Biorthogonal, Coiflet, Symlet 4 종류를 사용하였다. 그리고 각각의 웨이브릿 대하여 각 탭의 수를 10개, 20개, 30개를 사용하였다. 신호의 주기는 각각 0.1[sec], 0.01[sec], 0.001[sec]를 사용하였고, 모의실험은 PC상에서 Matlab 프로그램을 사용하여 수행하였다.

그림 2는 필터 탭의 개수가 20개일 때, 본 논문에서 사용한 Daubechies, Biorthogonal, Coiflet, Symlet 웨이브릿에 대한 4개의 반송파를 나타내었다. 그림 (a)의 Daubechies 웨이브릿에서 (0,0)위치에 있는 파형은 수식 (8)에서  $s_{00}(t)$ 에 해당하고, (0,1)위치에 있는 파형은 수식 (8)에서  $s_{10}(t)$ 에 해당한다. (1,0) 위치와 (1,1) 위치에 있는 파형은 각각  $s_{01}(t)$ ,  $s_{11}(t)$ 에 해당한다. 여기서 Coiflet과 Symlet 웨이브릿의 파형의 위치는 Daubechies, Biorthogonal 웨이브릿에 비해 1주기의 중간에 위치함을 알 수 있다. 특히, 그림 2(b)의 Biorthogonal 웨이브릿에서  $s_{10}(t)$ ,  $s_{11}(t)$ 의 파형은 왼쪽으로 많이 치우쳐 있음을 알 수 있다. 이렇게 필터계수의 위치가 중간에 위치하지 않고, 한쪽으로 치우치는 것은 비트 에러 확률에 나쁜 영향을 미친다.

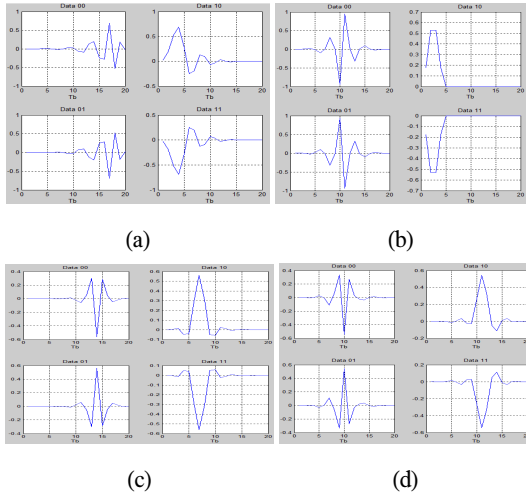


그림 2. 4개의 웨이브릿

(a) Daubechies (b) Biorthogonal (c) Coiflet (d) Symlet  
Fig. 2 Wavelet(Daub.,Bior.,Coif.,Sym.)  
(a) Daubechies (b) Biorthogonal (c) Coiflet (d) Symlet

즉, 필터계수(filter coefficients)의 위치가 1주기 중에서 중간에 위치하는 것이 비트 에러 확률에서 좋은 성능을 나타내었다.

그림 3은 Daubechies 웨이브릿에서  $T_s=0.1$  [sec]에서 탭 개수에 따른 BER(bit error rate)을 나타내었다. 여기서 필터의 탭 수가 많을수록 비트 에러 확률이 줄어들었고, 이러한 현상은 다른 웨이브릿에서도 같은 양상을 나타내었다.

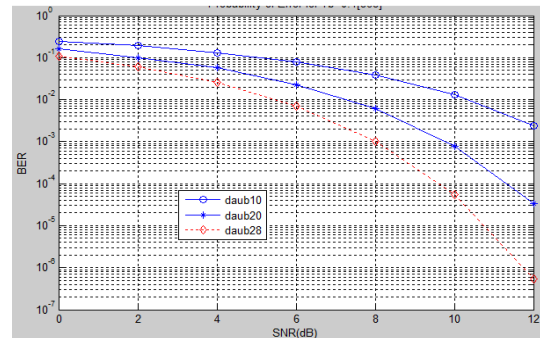


그림 3. 탭 수에 대한 BER 비교  
Fig.3 Comparison of BER for number of Tap

그림 4는 탭 개수가 20개이고, 주기  $T_s=0.1$  [sec]에서 각 웨이브릿의 성능을 비교하였다. 실험결과 Biorthogonal 웨이브릿이 가장 성능이 나빴으며, Symlet과 Coiflet 웨이브릿의 성능이 우수하였고, 두 웨이브릿의 성능은 거의 비슷하였다. Symlet과 Coiflet 웨이브릿의 성능이 우수한 이유는 필터계수의 위치가 1주기 중에서 중간에 위치하기 때문이다.

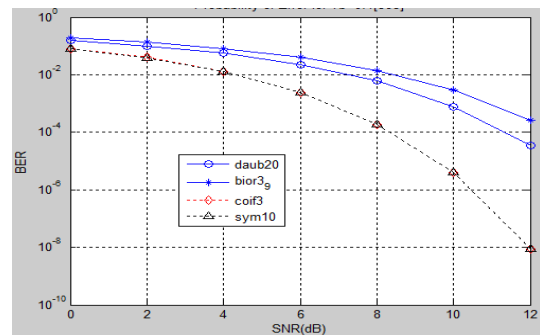


그림 4. 웨이브릿에 대한 BER 비교  
Fig. 4 Comparison of BER for wavelet

그림 5는 필터 탭 개수가 20개이고, dB=6에서 주기의 변화에 대한 웨이브릿의 BER 비교를 나타내었다. 여기서 주기는 0.001[sec], 0.01[sec], 0.1[sec]를 사용하였다. 주기가 클수록 BER은 감소하였고, Symlet과 Coiflet 웨이브릿의 성능이 우수하였다.(Symlet과 Coiflet 웨이브릿의 성능은 거의 동일함).

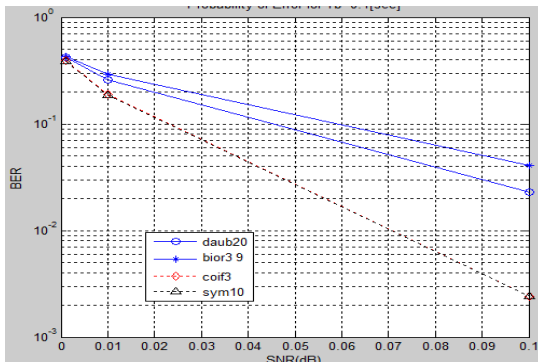
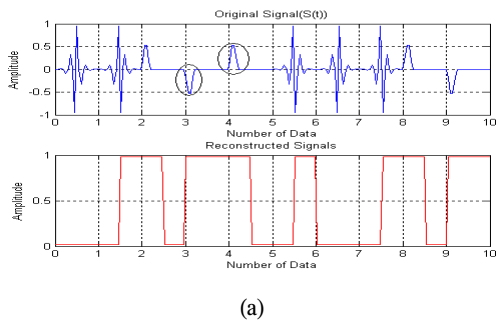
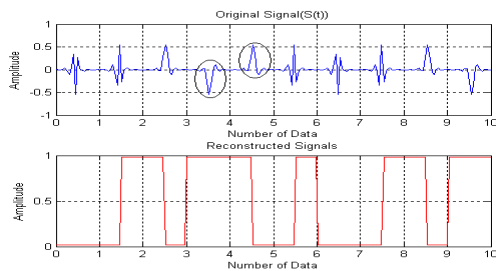


그림 5. 주기에 대한 BER 비교  
Fig. 5 Comparison of BER for period



(a)



(b)

그림 6. 반송파 위치 비교  
(a) Biorthogonal (b) Symlet  
Fig. 6 Comparison of position for carrier  
(a) Biorthogonal (b) Symlet

그림 6(a)는 20개의 2진 입력(0001101110010001 1011)을 Biorthogonal 웨이브릿을 사용하여 변조한 파형이다. 여기서 웨이브릿 신호( $s_{00}(t)$ )와 반전된 웨이브릿 신호( $s_{01}(t)$ )는 1주기의 중간에 필터계수들이 존재함을 알 수 있다. 그러나 스케일링 함수( $s_{10}(t)$ )와 반전된 스케일링 함수( $s_{11}(t)$ )은 1주기의 중간에서 왼쪽으로 치우쳐 있음을 알 수 있다. 이러한 치우침 현상이 BER 성능을 나쁘게 한다는 것을 알았다. 반면, 그림 6(b)의 Symlet 웨이브릿을 사용한 경우, Biorthogonal 웨이브릿과는 달리 스케일링 함수( $s_{10}(t)$ )와 반전된 스케일링 함수( $s_{11}(t)$ )은 1주기의 중간에 위치함을 알 수 있다. 그래서 상대적으로 BER 성능이 우수함을 알았다.

## V. 결 론

기존의 4-ary SWSK 시스템에서 비트 에러 확률이 유도되었다. 그래서 본 논문에서는 4-ary SWSK 시스템에서 Daubechies, Biorthogonal, Coiflet, Symlet 웨이브릿에 대해 비트 에러 확률을 실험적으로 구하였다. 실험결과 필터의 탭 수가 많을수록 비트 에러 확률은 낮아졌고, 주기가 클수록 좋은 성능을 보였다. 그리고 탭 개수가 20개이고, 주기  $T_s[\text{sec}] = 0.1$ 에서 Biorthogonal 웨이브릿이 가장 성능이 나빴으며, Symlet과 Coiflet 웨이브릿의 성능이 우수 하였다.(두 웨이브릿의 성능은 거의 비슷하였음). Symlet과 Coiflet 웨이브릿의 성능이 우수한 이유는 필터계수의 위치가 1주기 중에서 중간에 위치하기 때문이라는 것을 알았다.

## 참고문헌

- [1] 이승훈, 윤동한, 웨이브릿 변환 이론 및 적용, 보성각, 2004.
- [2] N.J Fliege, *Multirate Digital Signal Processing*, JOHN WILEY & SONS, 1994.
- [3] C.Sidney, Ramesh A.Gopinath, and Haitao Guo, *Introduction to Wavelet and Wavelet Transforms*, Prentice-Hall, 1998.

- [4] Fernandes, F.C.A.; van Spaendonck, R.L.C.and Burrus, C.S., "A new framework for complex wavelet transforms," *IEEE Trans., Signal Processing*, vol.51, pp.1825-1837, July, 2003.
- [5] Yu Liu and King Ngi Ngan, "Weighted Adaptive Lifting-Based Wavelet Transform for Image Coding," *IEEE Trans., Image Process.*, vol.17, pp.500-511, April, 2008.
- [6] J.Olive, R.Shantha Selva Kumari, and V.Sadasivam, "Wavelet for Improving Spectral Efficiency in a Digital Communication System," *ICCIMA '05, IEEE*, 2005.
- [7] 정태일, "스케일링 함수와 웨이브릿을 이용한 잡음에 강인한 새로운 웨이브릿 편이변조 시스템" *신호처리 시스템 학회 논문지*, 제9권, 2호, pp.98-103, 2008
- [8] 정태일, 김은주, "웨이브릿 편이변조 시스템에서 웨이브릿에 대한 성능분석", *한국해양정보통신학회 논문지*, 제13권 8호, pp.1580-1586, 2009.
- [9] 정태일, 유태경, 김종남, 문광석, 김현덕, "4-ary 스케일링 웨이브릿 편이변조 시스템의 성능분석에 관한 연구", *한국해양정보통신학회 논문지*, 제14권 5호, pp.1155-1163, 2010.



정태일(Tae-II Jeong)

1995년 부경대학교  
전자공학과(공학사)  
1997년 부경대학교  
전자공학과(공학석사)

2001년 부경대학교 전자공학과(공학박사)  
2000.3~2009.2 동명대학교 정보통신대학 정보통신  
공학과 전임

※ 관심분야: 신호처리, 멀티미디어 통신, Wavelet Transform