

일정체적을 갖는 포물선형 중공 보-기둥의 자유진동 해석 Free Vibration Analysis of Parabolic Hollowed Beam-columns with Constant Volume

이 태 은*·이 병 구*

Tae Eun Lee and Byoung Koo Lee

(2011년 3월 8일 접수 ; 2011년 4월 4일 심사완료)

Key Words : Free Vibration(자유진동), Beam-column(보-기둥), Hollowed Section(중공단면), Parabolic Taper(포물선 변단면), Constant Volume(일정체적), Natural Frequency(고유진동수)

ABSTRACT

This paper deals with free vibrations of the parabolic hollowed beam-columns with constant volume. The cross sections of beam-column taper are the hollowed regular polygons whose depths are varied with the parabolic functional fashion. Volumes of the objective beam-columns are always held constant regardless given geometrical conditions. Ordinary differential equation governing free vibrations of such beam-columns are derived and solved numerically for determining the natural frequencies. In the numerical examples, hinged-hinged, hinged-clamped and clamped-clamped end constraints are considered. As the numerical results, the relationships between non-dimensional frequency parameters and various beam-column parameters such as end constraints, side number, section ratio, thickness ratio and axial load are reported in tables and figures.

1. 서 론

보-기둥은 구조물을 형성하는 기본적인 요소로서 기능적, 미적 측면이 함께 고려되어야 하는 구조공학분야에서 많이 이용되고 있는 단위구조이다. 복잡하고 거대한 구조물도 이러한 단위구조의 결합체로 이루어지므로 이들 단위구조의 정적, 동적 거동을 나타내는 결과들을 이용하면, 전체 구조물의 거동결과를 예측하는 등의 사전정보를 얻을 수 있다. 따라서 보-기둥과 같은 단위구조의 거동을 정확하게 표현할 수 있는 값을 결정하는 것은 구조해석에 있어서 매우 기본적이고 중요한 요소이다⁽¹⁾.

최근 설계 및 시공 기술의 발달로 다양하고 복잡

한 거대 구조물의 건설이 활발히 진행되고 있다. 이러한 거대 구조물에서는 구조체의 자중을 줄이면서 외력에 대한 저항능력을 증가시키는 것이 무엇보다 중요한 과제이다. 이 연구에서 채택한 중공단면은 한정된 재료의 범위에서 자중의 감소, 좌굴하중 증가, 세장비 감소 등의 효과를 가져 올 수 있어 대부분의 단위구조에 널리 이용되고 있으며, 구조물의 대형화에 맞추어 그 사용이 날로 증가하고 있다⁽²⁾.

풍하중 또는 차량하중과 같은 동하중이 구조물에 작용하면 진동이 발생하며, 이러한 진동이 구조물의 고유진동수와 유사해지면 진폭이 매우 큰 진동이 발생하게 된다. 이러한 진동은 반복적으로 큰 응력을 발생시켜 피로파괴의 원인이 되거나 좌굴에 대한 안전도를 저하시켜 종종 구조물의 안정성에 문제를 일으키기도 한다. 따라서 구조물을 구성하는 단위구조체의 동적거동특성을 규명하는 것은 교량 등과 같이 동하중을 받는 구조물의 해석 및 설계에

† 교신저자; 정희원, 원광대학교 토목환경공학과
E-mail : telee@wku.ac.kr

Tel : (063)850-6718, Fax : (063)857-7204

* 정희원, 원광대학교 토목환경공학과

서 무엇보다도 먼저 선행되어야 할 연구과제이다⁽³⁾.

구조물의 설계에서 변단면의 사용은 자중감소, 내하력 증진 등의 기술적 효과뿐만 아니라 외관의 아름다움, 제작비용 절감 등의 사회, 경제적 측면에서도 유리하기 때문에 그 이용이 날로 증가하고 있다. 변단면 부재는 변단면 선형이나 단면의 변화율에 따라 정·동적 거동 특성이 크게 달라지므로 동일한 체적을 갖는 부재 또는 동일 표면적을 갖는 부재를 대상으로 거동에 보다 유리한 변단면 형태를 결정하는 것이 중요하다.

이 연구에서 대상으로 하는 보-기둥은 동일한 지간길이와 동일한 체적을 갖는 부재이다. 이러한 일정체적 부재는 단면형상과 변단면의 형태에 따라서 동적 거동값이 달라지므로 이러한 특성을 이용하면 동일한 체적에서 최대의 동적 안정성을 확보할 수 있는 기하형상을 결정할 수 있다. 이는 구조체의 기하적 형상만으로 고유진동수를 증진시킬 수 있는 매우 합리적인 방법이며, 동일한 강성에서는 최소의 자중을 가질 수 있으므로 최적설계의 개념에서도 매우 중요한 연구과제이다⁽⁴⁾. 최대의 동적 안정성을 갖는 기하형상을 결정하기 위해서는 대상 부재의 기하조건 변화에 따른 동적특성의 변화를 비교, 고찰하여야 한다. 일정체적 중공 보-기둥의 기하조건에 따른 자유진동 특성을 고찰하는 것이 이 연구의 목표이며, 최대의 동적 안정성을 갖는 보-기둥의 기하형상을 결정하기 위하여 선행되어야 하는 연구이다.

일정체적을 갖는 부재의 정·동적 특성 및 최강단면에 관한 연구는 최근 여러 연구자에 의해 활발히 진행되고 있다. 그러나 일정체적 중공단면 부재를 대상으로 하는 유사연구는 전혀 이루어지지 않고 있다. 따라서 이 연구의 결과는 중공단면을 갖는 부재 또는 이를 이용한 구조물의 설계 및 유지관리에 매우 유용한 자료를 제시할 수 있을 것으로 기대된다.

이 연구의 해석대상 보-기둥은 지간길이와 체적이 일정하고, 정다각형의 중공단면을 갖는다. 변단면의 깊이는 여러 함수로 표현할 수 있으나 여기에서는 강성이 상대적으로 크다고 알려진 포물선을 채택하였고, 부재의 단부는 회전지점과 고정지점으로 조합되는 지지조건을 고려하였다. 이러한 일정체적 변단면 중공 보-기둥의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 대상 부재의 무차원 고유진동수를 산출하였다. 수치

해석의 결과로 보-기둥의 체변수 즉, 정다각형 변수, 단면비, 두께비 및 축하중에 따른 무차원 고유진동수의 변화를 고찰하고 이를 표 및 그림에 나타내었다.

2. 수학적 모형

2.1 중공단면의 정의

Fig. 1(a)는 이 연구에서 대상으로 하는 정다각형 중공단면을 갖고, 지간길이가 l , 체적이 V 이며, 양단이 회전 및 고정지점으로 지지되어 있는 보-기둥을 나타낸다. 정다각형 단면의 도심에서 최외단 꼭지점까지의 거리가 단면깊이 h 이며, 꼭지점에서의 두께가 t 이다. 대상부재는 단면깊이 h 가 단면의 축방향 좌표 x 에 따라서 포물선형으로 변화하는 변단면 부재이며, 따라서 단면적 A 및 단면2차모멘트 I 도 축방향 좌표 x 에 따라서 변화하게 된다. Fig. 1(b)는 h 가 축방향 좌표 x 의 함수로 표현되는 형상 함수를 나타낸다. 이 그림에서 h_e 는 양단($x=0$ 및 $x=l$)에서 단면깊이이고, h_m 은 중앙($x=l/2$)에서 단면깊이이다. 부재의 체적은 h_e , h_m 의 크기와 h 의 형상함수에 상관없이 모두 일정체적 V 를 갖는다. 정다각형 변의 수가 짝수(정4각형 등) 또는 원형단면이면 Fig. 1(b)의 h 는 x 축에 대하여 대칭이다.

단면깊이 h 의 형상함수 f 를 결정하기 위하여 단면비와 두께비를 각각 다음과 같이 정의한다.

$$\alpha = \frac{h_m}{h_e} \tag{1}$$

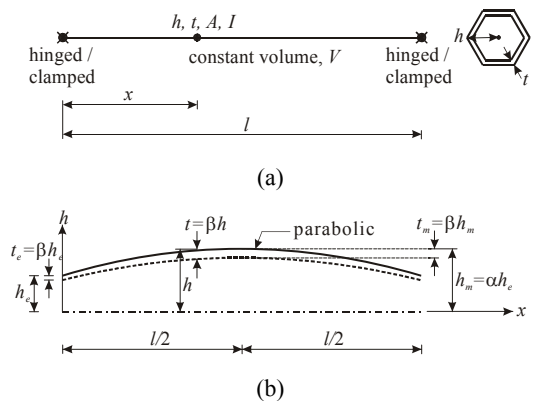


Fig. 1 (a) Hollowed beam-column (b) variable depth

$$\beta = \frac{t_e}{h_e} = \frac{t}{h} = \frac{t_m}{h_m} \quad (2)$$

위의 식들에서 α 는 단부에서의 단면깊이 h_e 에 대한 중앙에서의 단면깊이 h_m 의 비율을 나타내며, β 는 단면깊이 h 에 대한 두께 t 의 비율로 전 구간에 걸쳐 동일한 값을 갖는다.

단면깊이가 h 인 정다각형 중공단면의 단면적 A 및 단면2차모멘트 I 는 다음과 같이 산정된다.

$$A = c_1 [h^2 - (h-t)^2] = c_1 (1-c_3^2) h^2 \quad (3)$$

$$I = c_2 [h^4 - (h-t)^4] = c_2 (1-c_3^4) h^4 \quad (4)$$

위의 식들에 포함된 계수 $c_1 \sim c_3$ 는 다음과 같다.

$$c_1 = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (5)$$

$$c_2 = \frac{n}{4} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos^3\left(\frac{\pi}{n}\right) \left[1 + \frac{\tan^2(\pi/n)}{3}\right] \quad (6)$$

$$c_3 = 1 - \beta \quad (7)$$

위의 식들에서 계수 c_1, c_2 에 포함된 n 은 정다각형 변의 수($n \geq 3$)이며, n 이 ∞ 이면 원형단면으로 c_1 과 c_2 는 각각 π 와 $\pi/4$ 로 수렴한다.

Fig. 1(b)에 나타낸 변화단면 깊이 h 는 직선, 포물선, 정현 등 다양한 함수로 가능하지만 이 연구에서는 다음과 같은 포물선식을 적용하였다.

$$h = h_e f = h_e \left[4c_4 \left(\frac{x}{l} \right) \left(1 - \frac{x}{l} \right) + 1 \right], \quad 0 \leq x \leq l \quad (8)$$

위의 식에서 f 는 h 의 변화를 나타내는 형상함수이며, $c_4 = \alpha - 1$ 이다.

이 연구에서 단면비 α , 두께비 β , 정다각형의 변수 n 및 단면깊이 h 로 정의되는 일정체적 중공 보-기둥의 체적 V 는 다음 식(9)와 같이 산출할 수 있고, 이 체적 V 는 주어진 기하조건 즉, α, β 및 n 값에 관계없이 모든 부재에 대하여 항상 일정하다.

$$V = \int_0^l A dx = c_1 c_5 h_e^2 l \quad (9)$$

위의 식에서 c_5 는 단면깊이가 h_e 로 일정한 등단면 중실 보-기둥의 체적 V 에 대한 포물선 변단면 중공

보-기둥의 체적비율로 그 값은 다음 식과 같다.

$$c_5 = (1 - c_3^2) \frac{8\alpha^2 + 4\alpha + 3}{15} \quad (10)$$

2.2 지배미분방정식

Fig. 2는 Fig. 1(a), (b)에 나타낸 일정체적 중공 보-기둥에 축하중 P 가 작용할 때의 진동형을 나타내고 있다. 이 연구에서 축하중 P 는 압축하중을 (+)로 규정하였다.

이 그림에서 (x, w) 는 보-기둥의 진동형을 나타내는 직교좌표계이다. Fig. 2에 보인 바와 같이 점선으로 표시된 변형 전의 부재축이 자유진동하게 되면 시간에 따라 변화하는 횡방향 변위가 발생하여 실선으로 표시된 진동형상을 갖게 된다. 이때 $W(x, t)$ 는 자유진동하기 전 보-기둥의 축을 기준으로 측정된 진동변위로서 이를 조화진동식으로 표현하면 다음 식(11)과 같다⁽⁵⁾.

$$W(x, t) = w_x \sin(\omega_i t) \quad (11)$$

이 식에서 w_x 는 조화진동의 상대진폭, ω_i 는 rad/s의 단위를 갖는 고유각진동수, $i(i=1, 2, 3, 4, \dots)$ 는 모드 번호, t 는 시간이다.

Fig. 3은 진동변위에 의해 부재 미소요소에 발생하는 전단력 Q , 휨모멘트 M , 축하중에 의한 축방향력 P 및 관성력 F 를 나타낸 것이다. 부재 미소요소에 작용하는 이 힘들의 동적평형방정식을 세우면 다음과 같다.

$$\frac{dQ}{dx} - F = 0 \quad (12)$$

$$Q + \frac{dM}{dx} + P \frac{dw_x}{dx} = 0 \quad (13)$$

보-기둥의 단면에 발생하는 휨모멘트 M 을 변위항으로 나타내면 다음 식(14)와 같고⁽⁶⁾, 이를 식(13)에 대입하고 전단력 Q 에 대하여 정리하면 식(15)와 같이 나타낼 수 있다.

$$M = EI \frac{d^2 w_x}{dx^2} \quad (14)$$

$$Q = -EI \frac{d^3 w_x}{dx^3} - E \frac{dI}{dx} \frac{d^2 w_x}{dx^2} - P \frac{dw_x}{dx} \quad (15)$$

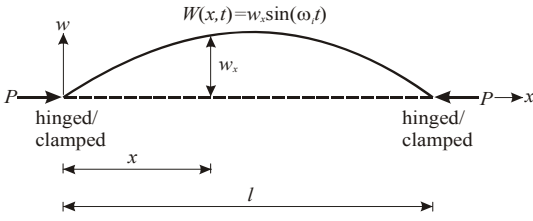


Fig. 2 Geometry of beam-column

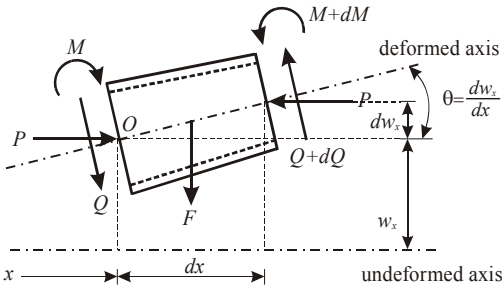


Fig. 3 Loads on beam-column element

보-기둥의 자유진동을 조화진동으로 가정하면 관성력 F 는 다음 식과 같다⁷⁾.

$$F = -\rho \omega_i^2 A w_x \quad (16)$$

위의 식에서 ρ 는 부재재료의 질량밀도이다.

식 (15)의 미분값 및 식 (16)을 식 (12)의 동적평형방정식에 대입하고 정리하면, Fig. 2에 나타낸 보-기둥의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$EI \frac{d^4 w_x}{dx^4} + 2E \frac{dI}{dx} \frac{d^3 w_x}{dx^3} + \left(E \frac{d^2 I}{dx^2} + P \right) \frac{d^2 w_x}{dx^2} - \rho \omega_i^2 A w_x = 0 \quad (17)$$

식 (4)의 단면 2차모멘트식에 식 (8)의 형상함수를 적용하여 식 (17)의 미분방정식에 포함된 포물선 변단면의 dI/dx 와 d^2I/dx^2 를 구하면 각각 다음의 식들과 같다.

$$\frac{dI}{dx} = 16(1 - c_3^4) c_4 \frac{I_c}{l} \left(1 - \frac{2x}{l} \right) f^3, \quad 0 \leq x \leq l \quad (18)$$

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = 32(1 - c_3^4) c_4 \frac{I_c}{l^2} f^2 \left[6c_4 \left(1 - \frac{2x}{l} \right)^2 - f \right], \quad 0 \leq x \leq l \quad (19)$$

위의 식들에서 $I_c = c_2 h_c^4$ 는 단면깊이가 h_c 로 일정한 등단면 중실단면의 단면 2차모멘트이다.

일정체적 중공 보-기둥의 상미분방정식을 무차원 양으로 유도하여 수치해석 과정 및 결과의 효율성을 높이고자 다음과 같은 무차원 변수들을 도입하였다.

$$p = \frac{Pl^4}{EV^2} \quad (20)$$

$$\xi = \frac{x}{l} \quad (21)$$

$$\eta = \frac{w_x}{l} \quad (22)$$

$$C_i = \sqrt{\frac{\rho \omega_i^2 l^5}{EV}}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \dots \quad (23)$$

식 (20)에서 p 는 축하중 P 를 일정체적 V 로 무차원화한 것으로 정다각형의 변수, 단면비 및 두께비에 상관없이 무차원 하중 p 를 서로 비교할 수 있다. 식 (21), (22)의 (ξ, η) 는 보-기둥의 진동형을 나타내는 직교좌표계 (x, w_x) 를 지간길이 l 로 정규화한 것이다. 식 (23)은 무차원 고유진동수이며, 이 식에서 i 는 모드번호이다.

이상의 무차원 변수들을 이용하면 앞에서 유도한 보-기둥의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 무차원화할 수 있다. 식 (3), (4) 및 식 (18), (19)를 식 (17)의 미분방정식에 대입하고, 무차원 변수인 식 (20)~(23)을 이용하면 다음과 같이 무차원 지배미분방정식이 유도된다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = a_1 \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} + (a_2 + a_3 p) \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + a_4 C_i^2 \eta \quad (24)$$

식 (24)의 무차원 상미분방정식에 포함되어 있는 계수 $a_1 \sim a_4$ 는 다음의 식들과 같다.

$$a_1 = -\frac{32c_4(1-\xi)}{f} \quad (25)$$

$$a_2 = -\frac{32c_4[6c_4(1-2\xi)^2 - f]}{f^2} \quad (26)$$

$$a_3 = -\frac{c_1^2(1-c_3^2)^2 c_2^2}{c_2(1-c_3^4)f^4} \quad (27)$$

$$a_4 = \frac{c_1^2(1-c_3^2)^2c_5}{c_2(1-c_3^4)f^2} \quad (28)$$

2.3 경계조건

이 연구에서 보-기둥의 단부조건은 회전 및 고정 지점을 채택하였다. 회전지점은 진동변위와 식 (14)의 휨모멘트가 “0”이므로 무차원 변수식 (21), (22)를 이용하면 다음의 무차원 경계조건식이 유도된다.

$$\eta = 0, \quad \xi = 0 \text{ 및 } \xi = 1 \text{에서} \quad (29)$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = 0, \quad \xi = 0 \text{ 및 } \xi = 1 \text{에서} \quad (30)$$

고정지점의 경우에는 진동변위와 단부에서의 회전각이 “0”이므로 무차원 변수식 (21), (22)를 이용하면 다음의 무차원 경계조건식이 유도된다.

$$\eta = 0, \quad \xi = 0 \text{ 및 } \xi = 1 \text{에서} \quad (31)$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 0, \quad \xi = 0 \text{ 및 } \xi = 1 \text{에서} \quad (32)$$

이상에서 유도된 식 (24)는 일정체적을 갖는 포물선형 중공 보-기둥의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식이며, 이 식 (24)에 식 (29)~(32)의 무차원 경계조건을 적용하면 수치해석 기법에 의해 다양한 단부조건에 대한 무차원 고유진동수를 산출할 수 있다.

3. 수치해석 결과 및 토의

3.1 수렴해석 및 검증

이상의 해석이론을 이용하여 일정체적 중공 보-기둥의 무차원 고유진동수 C_i 를 산출할 수 있는 수치해석 프로그램을 개발하였다. 지점조건(회전-회전/회전-고정/고정-고정), 정다각형 변수 n , 단면비 α , 두께비 β 및 무차원 하중 p 를 입력하고 중공 보-기둥의 무차원 고유진동수 C_i 를 산정하였다. 이 연구에서 상미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법⁽⁸⁾을 이용하였고, 고유치인 C_i 는 행렬값 탐사법을 결합한 Regula-Falsi법⁽⁸⁾을 이용하여 산출하였다.

수치해석 예를 고찰하기 전에 먼저 미분방정식의 수치적분 과정에서 보-기둥의 단계길이(step size) $\Delta\xi$

에 따른 수치해의 정확성을 평가하기 위한 수렴해석을 실시하였다. Fig. 4는 고정-고정의 단부조건을 갖고, $n=4$, $\alpha=1.5$, $\beta=0.2$, $p=1.2$ 인 중공 보-기둥의 수렴해석 결과를 나타낸 것이다. 수치해석 결과 $1/\Delta\xi=40$ 인 경우 제 4모드까지의 모든 수치해는 유효숫자 4자리까지 수렴하였으나 이 연구에서는 수치해의 정도를 강화하기 위하여 $1/\Delta\xi=100$ 으로 하여 모든 결과를 산출하였다.

Table 1은 이 연구의 이론적 전개과정 및 수치해석과정의 타당성을 검증하기 위하여 문헌⁽⁹⁾의 결과와 이 연구의 수치해를 비교한 것이다. Table 1에 나타낸 문헌의 결과는 등단면 중공부재에 대한 값이므로 이 논문에서 $\alpha=1.0$ 을 적용하였다. 또한 두께비에 대한 정의가 상이하므로 이 연구의 두께비를 조절하여 문헌의 두께비와 일치시켰다. 이 연구와 문헌의 결과를 살펴보면 원형($n=\infty$) 및 정4각형($n=4$) 단면에 대한 C_i 값의 오차가 최대 1.4% 이내로 매우 작게 나타나 이 연구에서 유도한 이론식 및 수치해석과정의 타당성을 검증할 수 있다.

3.2 변수연구

Table 2는 $\alpha=1.2$, $\beta=0.2$, $p=1.5$ 인 중공 보-기둥의 정다각형 변수 n 에 따른 무차원 고유진동수 C_i 의 변화를 단부조건별로 나타낸 것이다. n 이 증가하면 C_i 값은 감소한다. 제 1모드의 C_1 을 살펴보면 정3각형단면($n=3$)은 정4각형단면($n=4$)보다 평균 8.48%

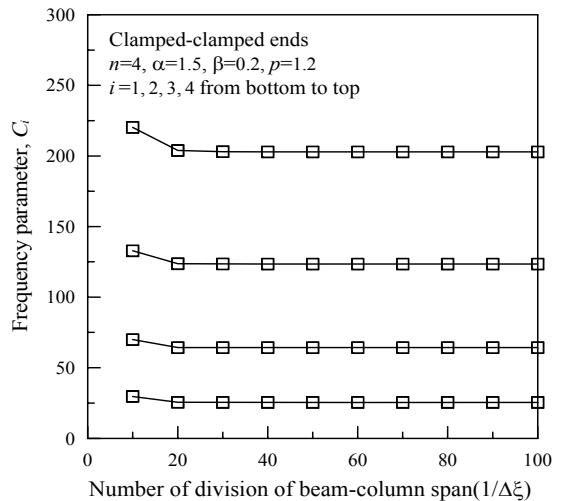


Fig. 4 Convergence analysis

더 크게 나타나 정3각형단면이 동역학적으로 가장 유리한 단면이다. 정5각형단면($n=5$)과 원형단면($n=\infty$)의 C_1 값은 평균 1.04%의 근소한 차이를 보여 정5각형 이상의 단면은 제작의 편의상 원형단면으로 대체하여도 동역학적 측면에서는 무리가 없을 것으로 사료된다. 한편 지점조건에 따른 C_i 값은 회전-회전<회전-고정<고정-고정 순으로 크게 나타나는

일반적인 경향을 그대로 보여주고 있으며, 정3각형 단면과 기타 단면 사이의 C_i 값 편차는 그 역순으로 크게 나타남을 알 수 있다.

Fig. 5는 회전-회전의 단부조건을 갖고, $n=3$, $\beta=0.2$, $p=1.0$ 인 중공 보-기둥의 단면비 α 에 따른 무차원 고유진동수 C_i 의 변화를 나타낸 것이다. α 값이 증가하면 C_i 는 증가하다가 정점에서 최대치를 보인 후에 다시 감소한다. 따라서 C_i 값이 최대가 되는 α 값이 존재함을 알 수 있으며, 이때의 α 값이 주어진 조건에서 동적능력이 가장 우수한 최적단면 비이다. 이 그림에서는 물리적으로 가장 중요한 의미를 갖는 제 1무차원 고유진동수 C_1 값이 최대가 될 때의 (α , C_1) 좌표를 ▲로 표시하였다. 그림에 나타낸 보-기둥의 경우 $\alpha=1.80$ 에서 $C_1=15.04$ 로 최대값을 갖는다. 이러한 결과를 이용하면 주어진 조건에서 C_1 값이 최대가 되는 즉, 동적능력이 가장 우수한 보-기둥의 기하형상을 결정할 수 있다.

한편 이 그림을 살펴보면 α 값의 증가에 따라 제 1무차원 고유진동수 C_1 값이 감소하다가 끝내 "0"이 되는 것을 알 수 있다. 이때 보는 동적으로 불안정한 상태에 놓이게 된다. 즉 $C_1=0$ 일 때의 α 값이 대상 보가 동적안정을 유지할 수 있는 임계값이며, 이 값을 그림에 ○로 표시하였다. Fig. 5에 나타낸 보-기둥의 경우 $0.47 < \alpha < 2.58$ 의 범위가 대상 보의 동적 안정영역이며, $\alpha < 0.47$ 과 $\alpha > 2.58$ 의 범위는 동적 불안정영역이 된다.

Table 3은 표에 나타낸 3가지 조건을 갖는 중공 보-기둥의 두께비 β 의 변화에 따른 무차원 고유진동수 C_i 의 변화를 나타낸 것이다. β 값이 증가하면 중공단면의 속이 점점 채워지게 되며, $\beta=0.5$ 이면 속이 완전히 채워진 증실단면을 의미한다. 이 연구의 대상 구조는 일정체적 부재이므로 β 값이 증가하면 동일한 체적을 갖기 위하여 단면깊이가 점점 작아지게 된다. $\beta=0.5$ 인 증실단면 부재는 단면깊이가 가장 작은 경우이므로 β 값이 작은 중공단면에 비하여 매우 세장한 구조가 될 것이다. 이 표를 살펴보면 β 값이 증가하면 주어진 모든 조건에서 무차원 고유진동수는 감소함을 알 수 있다. 예로서 $\beta=0.1$ 인 중공단면을 기준으로 할 때, $\beta=0.2$ 인 중공단면은 평균 50.08%, $\beta=0.5$ 인 증실단면은 평균 80.85% 정도 제 1무차원 고유진동수가 감소한 것을 알

Table 1 Comparisons of natural frequencies C_i between this study and reference

Geometry	β	i	Natural Frequency, C_i		Deviation (%)**
			This study	Ref. ⁽⁹⁾	
H-H* $n=\infty$ $\alpha=1.0$ $p=3.0$	0.01	1	28.11	28.08	0.107
		2	129.42	129.39	0.023
		3	296.07	297.71	0.554
		4	534.22	533.29	0.174
	0.1	1	25.87	25.68	0.388
		2	118.59	118.35	0.202
		3	270.64	272.30	0.613
		4	490.55	487.77	0.567
C-C* $n=4$ $\alpha=1.0$ $p=3.0$	0.02	1	84.52	83.93	0.698
		2	238.22	235.99	0.936
		3	462.35	466.47	0.891
		4	783.27	774.01	1.182
	0.2	1	70.91	70.61	0.423
		2	200.31	198.53	0.889
		3	389.87	392.43	0.657
		4	660.21	651.16	1.371

* H: hinged end, C: clamped end
** Deviation(%)=|(this study - reference)/this study|×100

Table 2 Effect of side number n on non-dimensional natural frequencies C_i

Geometry	n	Frequency parameter, C_i				Deviation (%)**
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	
H-H* $\alpha=1.2$ $\beta=0.2$ $p=1.5$	3	11.06	43.41	97.69	173.69	0.00
	4	9.97	40.05	90.60	161.28	9.86
	5	9.76	39.40	89.17	158.86	11.75
	6	9.69	39.19	88.73	158.10	12.39
	∞	9.64	39.02	88.37	157.48	12.84
	H-C* $\alpha=1.2$ $\beta=0.2$ $p=1.5$	3	18.92	56.49	116.03	197.34
4		17.41	52.29	107.67	183.33	7.98
5		17.11	51.47	106.04	180.59	9.57
6		17.02	51.21	105.53	179.74	10.04
∞		16.94	51.00	105.11	179.04	10.47
C-C* $\alpha=1.2$ $\beta=0.2$ $p=1.5$		3	24.65	67.35	132.23	218.90
	4	22.78	6243	122.78	203.42	7.59
	5	22.41	61.47	120.94	200.40	9.09
	6	22.30	61.17	120.36	199.46	9.53
	∞	22.21	60.93	119.89	198.69	9.90

* H: hinged end, C: clamped end
** Deviation(%)=|(C_{1(n=3)}-C₁)/C_{1(n=3)}|×100

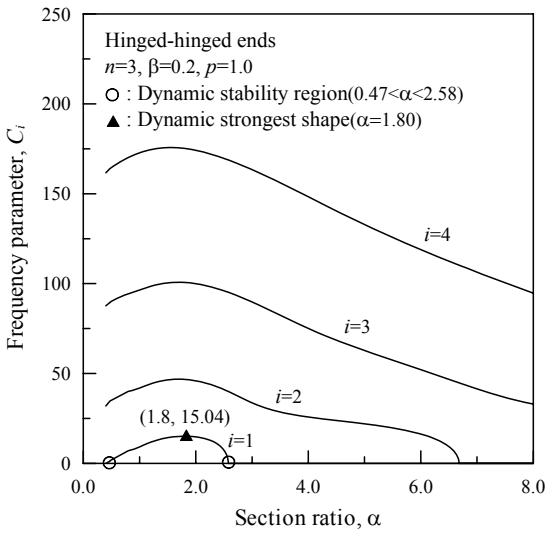


Fig. 5 C_i versus α curves

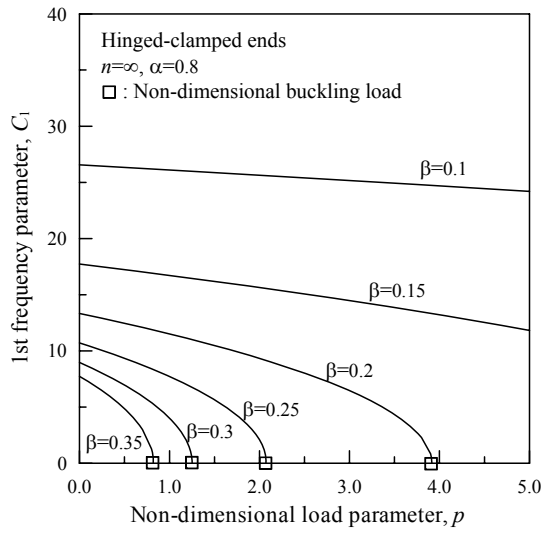


Fig. 6 C_i versus p curves

Table 3 Effect of thickness ratio β on non-dimensional natural frequencies C_i

Geometry	β	Frequency parameter, C_i				Deviation (%)***
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	
H-H* $n=4$ $\alpha=1.8$ $p=0.1$	0.1	29.72	89.41	189.64	327.98	0.00
	0.2	14.84	44.78	95.11	164.60	50.07
	0.3	9.83	29.89	63.72	110.46	66.92
	0.4	7.28	22.43	48.15	83.72	75.50
	0.5	5.72	17.98	38.98	68.05	80.75
H-C* $n=\infty$ ** $\alpha=1.2$ $p=0.15$	0.1	36.64	105.60	213.74	361.10	0.00
	0.2	18.29	52.88	107.18	181.21	50.08
	0.3	12.10	35.28	71.79	121.58	66.98
	0.4	8.93	26.47	54.22	92.11	75.63
	0.5	6.99	21.21	43.87	74.84	80.92
C-C* $n=3$ $\alpha=0.8$ $p=0.2$	0.1	51.35	137.16	266.33	438.63	0.00
	0.2	25.63	68.67	133.55	220.10	50.09
	0.3	16.96	45.82	89.44	147.66	66.97
	0.4	12.54	34.38	67.55	111.85	75.58
	0.5	9.82	27.53	54.63	90.86	80.88

* H: hinged end, C: clamped end

** $n=\infty$: circle cross-section

*** Deviation(%) = $|(C_{1(\beta=0.1)} - C_1) / C_{1(\beta=0.1)}| \times 100$

수 있다. 이는 앞에서 언급한 바와 같이 동일한 체적을 갖기 위해서는 β 값이 커질수록 세장한 구조가 되어 진동에 취약해지기 때문이며, 따라서 한정된 양의 재료를 이용하여 부재를 제작하는 경우 중실단면보다 중공단면으로 제작하는 것이 동적으로 유리한 구조임을 알 수 있다. 이는 동일한 동적강성을 갖는 경우에는 중공단면이 중실단면에 비해 재료의 사용량을 현저히 줄일 수 있다는 것을 의미하기도 한다.

Fig. 6은 회전-고정의 단부조건을 갖고, $n=\infty$, $\alpha=0.8$ 인 중공 보-기둥의 무차원 하중 p 에 따른 제 1 무차원 고유진동수 C_1 의 변화를 나타낸 것이다. p 값이 증가하면 C_1 값은 감소하며, 결국 $C_1=0$ 이 되는 p 값이 존재함을 알 수 있다. 이때의 p 값이 동적개념에 의해 산출되는 무차원 좌굴하중이며, 이 값 이내의 범위에서 보-기둥은 동적으로 안정된 상태에 놓인다. 예로서 그림에 나타낸 $\beta=0.2$ 인 보-기둥에서 $C_1=0$ 이 되는 $p=3.91$ 로 $p < 3.91$ 이면 동적 안정영역이며, $p \geq 3.91$ 이면 동적 불안정영역에 해당된다.

한편 Fig. 6에서는 Table 3에 나타난 β 의 영향을 그림으로 고찰하기 위하여 $\beta=0.1/0.15/0.2/0.25/0.3/0.35$ 의 단계별로 C_1 값의 변화를 나타내었다. β 값이 증가하면 C_1 값과 무차원 좌굴하중값은 크게 감소하며, 그 감소율은 작은 β 값에서 크게 나타난다. 중공단면이 중실단면에 비해 동적능력이 우수함을 다시 한 번 확인할 수 있으며, 이러한 결과를 이용하면 중공단면의 두께를 적절히 조절하여 중공단면부재 또는 중공단면부재를 이용한 구조물의 고유진동수를 효율적으로 제어할 수 있을 것으로 판단된다.

4. 결론

이 논문은 일정체적을 갖는 포물선형 중공 보-기둥의 자유진동에 관한 연구이다. 중공단면을 갖는

보-기둥의 진동형을 지배하는 상미분방정식을 동적 평형방정식으로부터 유도하고 이를 수치해석하여 대상 부재의 고유진동수를 산정하였다. 이 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 정3각형 단면($n=3$)이 가장 큰 C_i 값을 나타내며 정5각형($n=5$) 이상의 단면들에서는 C_i 값이 큰 차이를 보이지 않는다.

(2) 단면비 α 가 증가하면 무차원 고유진동수 C_i 는 증가하다가 감소하며, C_i 값이 최대가 되는 동적 최적단면비가 존재한다.

(3) 제 1무차원 고유진동수 C_1 이 "0"이 되는 α 값이 존재하며, 그 범위 이내에서 보-기둥은 동적 안정영역에 놓이게 된다.

(4) 두께비 β 가 증가하면 C_i 는 매우 크게 감소하며, 동일한 체적을 갖는 경우 중공단면이 중실단면에 비해 매우 큰 동적능력을 갖는다.

(5) 무차원 하중 p 가 증가하면 C_i 는 감소하며, C_1 이 "0"이 되는 p 값을 찾을 수 있다. 이때의 p 값이 무차원 좌굴하중값이며, 이 값 이내의 범위에서 보-기둥은 동적안정영역에 놓인다.

(6) 이 연구의 결과를 이용하면 다양한 조건을 갖는 중공 보-기둥의 동적 최적단면 및 동적 안정영역을 결정할 수 있다. 따라서 보다 다양한 변단면 형태를 갖는 중공 보-기둥의 동적 최적단면 및 동적 안정영역에 대한 후속연구가 이루어져야 할 것이다.

후 기

이 논문은 2009년 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구(KRF-2009-353-D00020)의 일부이며, 재단당국에

감사드립니다.

참 고 문 헌

(1) Craig, R. R., 1981, Structural Dynamics, An Introduction to Computer Methods, John Wiley & sons, Inc., pp. 381~445.

(2) Lee, T. E., Lee, B. K., Lee, J. Y. and Yoon, H. M., 2008, In-plane Free Vibration Analysis of Paraboli Arches with Hollow Section, Transactions of the Korea Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 18, No. 2, pp. 215~223.

(3) Hikami, Y., 1982, Wind Tunnel Test Methods and Facilities for Bridge Aerodynamic Stability Investigation, IHI Report, Vol. 6, pp. 47~52.

(4) Haftka, R. T., Grüdal, Z. and Kamat, M. P., 1990, Elements of Structural Optimization, Kluwer Academic Publisher, Netherlands.

(5) Lee, B. K. and Wilson, J. F., 1989, Free Vibrations of Arches with Variable Curvature, Journal of Sound and Vibration, Vol. 136, pp. 75~89.

(6) Clough, R. W. and Penzien, J., 1975, Dynamics of Structures, McGraw-Hill.

(7) Mo, J. M., 1992, Free Vibrations of Tapered Columns under Axial Loads, Wonkwang University, Korea.

(8) Al-Khafaji, A. W. and Tooley, J. R., 1986, Numerical Methods in Engineering Practice, Holt, Rinehart and Winston, Inc.

(9) Lee, T. E., Yoon, H. M., Park, C. E. and Jeong, K. S., 2010, Free Vibrations of Beam-columns with Squared Hollow Section, CD of Conference on Korean Society of Steel Construction, pp. 223~224.