DOI : 10.5050/KSNVE.2011.21.4.315

미분방정식 $m\ddot{x}+kx=f(t)$의 역사적 유도배경

Historical Background for Derivation of the Differential Equation $m\ddot{x}+kx=f(t)$

박 보 용†

Bo Yong Park

(2010년 12월 9일 접수 ; 2011년 3월 23일 심사완료)

Key Words : Motion(운동), Vis Viva(living forces), Energy(에너지), Pendulum Condition(진자조건), Eigenvalues (고유치), Galileo(갈리레오), Descartes(데카르트), Huygens(하위헌스), Hooke(훅크), Newton(뉴턴), Leibniz(라이프니츠), Johann Bernoulli(요한 베르누이), Taylor(테일러), Euler(오일러)

ABSTRACT

This paper presents a historical study on the derivation of the differential equation of motion for the single-degree-of-freedom m-k system with the harmonic excitation. It was Euler for the first time in the history of vibration theory who tackled the equation of motion for that system analytically, then gave the solution of the free vibration and described the resonance phenomena of the forced vibration in his famous paper E126 of 1739. As a result of the chronological progress in mechanics like pendulum condition from Galileo to Euler, the author asserts two conjectures that Euler could apply to obtain the equation of motion at that time.

1. 서 론

Euler는 1739년 그의 논문, 'De novo genere oscillationvm'[1]에서 공진현상을 이용한 'automaton (automatic mechanism)'의 제작 가능성을 제시하였다. 공진현상은 1546년 Fracastoro가 발견한 이후, Beeckman과 Galileo 시대에는 이미 알려져 있었으나, 이에 대한 해석적인 유도와 물리적 의미의 전개는 Euler가 처음이었다. 즉, 오늘날의 1-자유도 m-k 진동시스템에 조화함수형의 외력이 가해지는 수학적 모델링으로 자유진동과 강제 진동 등이 해석되었다.

낙하물체가 등가속운동법칙을 따른다는 사실을 수학적으로 전개하고 실험으로 증명한 Galileo[2]와 운동법칙을 기계론적 세계관[3]으로 묘사한 Descartes는 17세기 모든 물리적 현상이 결국 역학 원리로 귀결될 수 있음을 선도하였고, 가속도, 운동량, 힘, 질량 등의 개념 논쟁의 단초를 제공하였다.

Galileo와 Descartes 이후, 약 100여년간 Huygens의 에너지이론과 진자이론, Hooke의 탄성법칙, Leibniz의 'Vis viva' 보존이론, Newton의 운동법칙, Jakob Bernoulli의 곡률과 굽힘모멘트 간의 이론, Taylor의 'Vibrating String' 상 곡률, 가속도, 힘 간의 이론과 '진자조건', Hermann의 동역학 방정식의 표현, Johann Bernoulli의 탄성체 충돌이론[4]과 그리고 Euler가 힘(또는 가속도)을 공간종속으로부터 시간종속으로 해석을 전환하고, 그 해석 방법을 Newton의 기하학에서 Leibniz의 해석학으로 탈바꿈 시킨 그의 '동역학의 새로운 원리'[5]등에 의하여, Ancient's Inferno와 Apollo's arrow으로 묘사된 과학의 발전[6]은, 역학적 문제 해석에 함수이론과 미적분 계산 방법이 적용되는 '과학적 혁명(scientific

† 교신저자; 정회원, 인천대학교 기계시스템공학부
E-mail : bypark@incheon.ac.kr
Tel : (032)835-8415, Fax : (032)835-0772

revolution)'을 초래시켰다.

참고문헌 (1)(이하 E126)에서 유도된 미분방정식을 현대적 표현[7,8]으로 바꾸면, 댐핑이 없으며, 질량(m)과 탄성(k)으로 구성된 1-자유도 진동시스템이 조화함수형의 외력($\hat{F}\sin\omega t$)에 의하여 강제진동 거동을 보이는,

$$m\ddot{x} + kx = \hat{F}\sin\omega t \tag{1a}$$

또는

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \hat{F}/m\ \sin\omega t \tag{1b}$$

여기서, $\omega_n = \sqrt{k/m}\ \ [rad/s]$
가 된다.

18세기 중엽부터 시작된 선형시스템 거동 해석의 전형적 표현인 식 (1a,b)는 진동학 기초의 서두에 항상 식의 유도와 해법 및 물리적 의미 등으로 소개되고 있다.

이 논문의 연구배경 및 목적은, Newton의 운동의 제 2법칙이 Euler에 의하여 18세기 중엽 해석적으로 수립되기 전, 식 (1a)의 유도과정에 대한 역사적 조명에 있다. 즉, 다음의 제 2장에서는 Euler가 참고문헌 (1)에서, 식 (1a)와 등가 동형인 식 (2) 또는 식 (5a,b) (이하, 'Euler의 진동방정식'이라 칭함)의 유도과정을 우선 요약하여 제시하고, 제 3장에는 식 (1a)와 식 (5a)의 구성요소인 가속도힘, 탄성복원력과 조화함수형의 외력 등의 개념 구성에 관하여, Galileo에서 Euler까지, 1638~1750년 사이의 관련된 역학 사건들을 17~18세기 대상 Geometers 별로, 시대적으로 추적한다. 이로부터 제 4장에서는 'Euler의 진동방정식' 유도과정에 대한 시대적 관련성을 추정하며, 제 5장에서는 'Euler의 진동방정식'의 검토를 추가한다. 끝으로 제 6장에서는 제 2장~제 5장으로부터의 중요 연구고찰 결과들을 요약 제시한다.

2. 'Euler의 진동방정식'의 유도과정 요약

• E126의 §.15에서 유도된 정현 함수 외력에 대한 진동 시스템의 운동 미분방정식은,

$$2adds + \frac{sdt^2}{b} + \frac{a\,dt^2}{g}\sin .A\,\frac{t}{a} = 0 \tag{2}$$

이었다.

• 식 (2)는, 예로 단진자 운동에서 단진자길이가 a, 운동궤적의 공간적 위치가 s인 경우, 궤적상의 단진자 속도 v는

- Galileo이래 속도측정 기본 척도인 낙하거리 ν와, 낙하속도 v와의 관계인 $v \propto \sqrt{\nu}$ 와

- 18세기 중엽까지 표현된 물리적 양의 일반적인 기하학적 계산표현[9,10]인, 선(lines)과 비(ratios)로서, 단진자의 주기(시간) $t \propto \sqrt{a}$ 를 고려하여, 시간을 비로 표시하면, $dt/\sqrt{a}$ 가 되고, $v = ds/dt \propto \sqrt{\nu}$ 는

$$\sqrt{\nu} = \frac{ds}{dt/\sqrt{a}} \tag{3a}$$

으로 유도되며, 미분량 $d\nu$는

$$d\nu = \frac{2adsdds}{dt^2} \tag{3b}$$

가 된다.

• Euler는 Mechanica[10], §.207에서 $d\nu$와, 무게 또는 질량 A인 물체에 가해지는 힘 p와의 관계를 $d\nu = pds/A$로 전개하였다. $\nu = (ds/dt)^2$으로부터 $(d\nu/ds) \propto (d^2s/dt^2)$로 변환됨은 정역학적 평형관계로 고려된 운동의 공간개념이 동역학적 시간개념으로 전환될 수 있음을 보이며, $d\nu = p\cdot ds/A$는 바로 오늘날의 $F = ma$가 된다.

• p/A는 결국 미소길이 ds에 인가되는 '가속도 강도'[10]로 정의할 수가 있고, 18세기 중반 이전의 동역학 분야의 문제들이었던, 현의 진동, 체인의 진동 및 탄성막대의 진동 등에서 취급된 반복적인 주기함수형의 변위 s에 비례되는 탄성복원력 s/b(b는 s와 비로 계산되는 기준길이, 즉, s/b는 복원력에 관련된 가속도의 크기[9])와 외력 y/g(g는 중력가속도로 외력 y/g는 중력가속도의 y배)에 따른 가속도들에 의한 가속도성 $d\nu$는 방향성을 고려하면,

$$d\nu = -\left(\frac{s}{b} + \frac{y}{g}\right)ds \tag{4}$$

가 된다.

• 운동 시 식 (3b)와 식 (4)는 평형관계이므로

$$\frac{2adsdds}{dt^2} = -\left(\frac{s}{b} + \frac{y}{g}\right)ds$$

이며, 비$(\frac{A}{a}, A=1)$로 표시된 주기함수형 외력 $y=a\sin.\frac{A}{a}t$를 대입하여 방정식 왼쪽으로 정리하면 식 (2)에 도달한다.

• 그러나, 식 (2)를 현대적 기술로 수정, 정리하면, '2계 비제차 선형 미분방정식'인

$$2a\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{1}{b}s=-\frac{a}{g}\sin\frac{t}{a} \tag{5a}$$

또는

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{1}{2ab}s=-\frac{1}{2g}\sin\frac{t}{a} \tag{5b}$$

으로 되며, 등가적으로 각각 식 (1a)와 (1b)로 표현될 수 있다.

• 식 (2) 또는 식 (5a)의 역사적 중요성을 요약하면 다음과 같다[9,11~13]:

- Newton의 Principia(1687)이후, 반세기만에, 운동묘사에 대하여 이전의 기하학적 해법에서 탈피하여 해석학적 해법을 응용,
- 운동해석에 있어 가속도를 시간의 변화량으로 표시,
- 조화함수(여기서는 sine 함수) 형의, 주기적 특성을 갖는 거리에 비례하는 탄성복원력과 시간에 따라 변화하는 외력을 갖는 진동시스템의 자유진동과 강제진동, 특히 공진 현상을 해석.

3. 'Euler의 진동방정식'과 관련된 역학 사건의 시대적 추적

• 1638년 Galileo의 낙하법칙이 출판[2]된 이후, 1750년 Eluer에 의하여 역학(mechanics)의 일반적이고 기초적인 원리가 점질량 역학[5]으로 완성되기까지, 식 (1a) 및 식 (5a)에 관련된 운동(motus) 및 역학의 발전 사건을 시대별로 요약하여 다음에 소개한다.

• Galileo Galilei(1564~1642)는 낙하물체의 운동법칙을 1604년 발견한 이후, 낙하속도 v와 낙하거리 ν간의 관계, $v\propto\sqrt{\nu}$ 및 낙하거리와 낙하시간 간의 관계 $\nu=\frac{1}{2}gt^2$임을 1638년[2] 출판하였다.

• R. Descartes(1596~1650)는 1644년[3] 운동의 법칙에 관하여 '힘의 고유척도'로서 'quantity of motion(운동량)' mv를 제안하였으며, '운동량의 보존'을 주장하였다.

• C. Huygens(1629~1695)는 1673년[13,14] 'law of impact', 'law of centrifugal force' 및 'law of pendulum'을 제시하였고, 속도 v와 변위 y간의 탄성체 에너지식, '$av^2_{\max}=y^2_{\max}$'을 유도하였다.

• R. Hooke(1635~1703)는 1675년, 1678년과 1679년에 'Hooke's law of spring' 즉, 'linear law relating tensio to vis in elastic bodies', $F=-kx$를 발견하였다[15,16].

• I. Newton(1642~1727)은 1664~1670년 간, 미분계산 상 '$fluxion\ \dot{x}$' 및 $\dot{x}$의 적분계산 상 '$fluent\ x$'를 발견하였고, 1687년에는 그의 'Principia(Philosophiae naturalis principia mathematica)'를 통하여, 'Newton's laws of motion'을 제시하였으며, 특히 제 2법칙,

> 'Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam gua vis illa imprimitur.(참고문헌 (17), A change in motion is proportional to the motive force impressed and takes place along the straight line in which that force is impressed.)',

에서 'quantity of motion' 은 Newton의 질량에 대한 표현, 'quantity of matter'와 속도, 즉, momentum 'mv' 이며(참고문헌 (17) : p. 404, def.2), 'impressed force' F는 'action exerted on a body to change its state …' (참고문헌 (17) : p. 405. def.4)로서, 후세, 'a change in motion', 즉, $F=\Delta mv$인지, 또는 $F=\Delta mv/\Delta t$인지의 해석[18]의 배태가 되었다. Newton은 또한 Principia에서 유체의 입자가 평형위치의 앞과 뒤로 진동할 경우, 즉, 1차원 압력파의 진행이,

> 'If pulses are propagated through a fluid, the individual particles of the fluid, going and returning with a very short alternating motion, are always accelerated and retarded in accordance with the law of an oscillating pendulum(참고문헌 (17) : p. 769, Prop. 47, Theorem 37)',

일 경우, Hooke의 스프링성을 이용하되, 단진자의 기하학적 진동해석을 최초로 응용하여, 탄성압력파의 파형 및 압력을 단순 조화함수의 형태로 제시하였다.

• G. W. Leibniz(1646~1716)가 1675년 10월과 11월 사이 발견한 '미적분학의 기본원리',

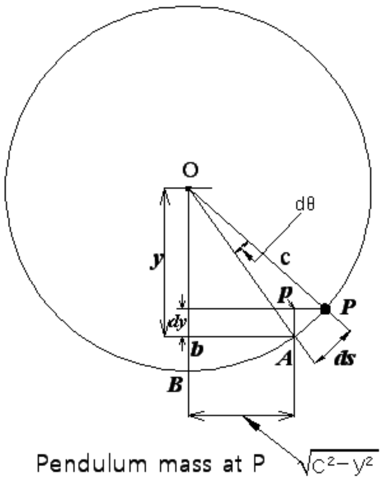
$$\frac{1}{2}\left(\int dy\right)^2 = \int\left(\int dy\right)dy,$$
$$\int xdy = xy - \int ydx \text{ [19]}$$

를 시작으로, 미분(differentialis)기호 d 및 적분(summatorius)기호 $\int$를 이용하는 수학 및 역학상의 Leibnizian calculus가 형성되었다. Leibniz는 같은 해, $\int xdx = \frac{1}{2}\cdot x^2$을 유도하였다. 또한, 그는 1686년 '힘의 고유척도' 로서 'vis viva mv^2'을 제안함과 동시에 'Kurzer Beweis eines merkwürdigen Fehlers des Descartes und… (A Brief Demonstration of a notable Error of Descartes and…)'로써 Descartes의 운동량 및 운동량 보존법칙을 두 가지 점-운동 중, 물체의 힘을 측정하는 정확한 방법과 우주에서 항상 보존되는 양이 mv인지? 또는 vis viva 인지? - 에서 비판함으로 'Vis Viva Controversy'가 이후 1740년대까지 60년간 Cartesian과 Leibnizian 간의 간헐적 논쟁의 불씨를 제공하였다[18]. 그리고, Leibniz는 1693년 sine 함수를 멱급수로 전개하였다[20].

• Jakob Bernoulli(1654~1705)는 1691~1694년간 선형 굽힘강성탄성보의 곡률이 굽힘력 또는 굽힘모멘트에 비례함을 발견하였다. 1691~1703년간에는 단위질량 당 물체의 가속도의 부호가 음이면 정적힘과 등량이며, 힘의 평형과 모멘트의 평형은 정역학 문제나 동역학 문제 해결에 필요함을 주장하고, 이를 1703년 발표하였다. 이 논문에는, 또한 Huygens 이후 등가, 응용 되어온 단진자진동을 복합진자진동 문제로 확장하여, 복합진자의 등가길이를 규명함과 동시에 질량관성모멘트도 계산됨으로써[21] Truesdell은 'The principle of moment of momentum'은 그에 의하였다고 추정(참고문헌 (22) : p. 252, Conjecture1.)하였다.

• P. Varignon(1654~1722)은 Newton, Leibniz와 Bernoulli일가의 친구로서, 특히, 역학적 거동에 대한 Newton의 기하학적 전개를 Leibniz의 해석적 언어로 변환하였다. 1700년에 Galileo의 낙하물체의 운동방정식을 동역학식으로 변형하여, $m_1x_1w_2t_2^2 = m_2x_2w_1t_1^2$, 여기서 m=질량, x=시간 t의 낙하거리, w=무게, 또는 거리와 시간을 미소단위로 $d^2x_1/d^2x_2 = (f_1/m_1)/(f_2/m_2)\cdot dt_1^2/dt_1^2$, 즉, 힘 $F = md^2x/dt^2$ 등의 관계식을 제시하였다[18]. 이것은 역시 1700년, 단위질량에 대하여 Varignon이 유도한 식, $\int fdx = 1/2\cdot v^2$ 으로도 $f = dv/dt$임을 알 수 있다.

• Johann Bernoulli(1667~1748)는 1728년 'Vibrating string(진동하는 현)'에 대한 미분 방정식, $\hat{a}d^2y/dz^2 = -y$를 발표하였다[23]. 'Taylor의 진자조건(참조 : Taylor편)', '미소진동', '정역학적 평형조건'과 18세기 초 대담히 적용하였던 'finite difference(유한차분)' 개념의 'infinitesimal(무한소)', 즉, 'differentials(미분)' 개념으로의 확장을 통하여 수립된 이 식으로 Bernoulli는 조화상수 $\hat{a}$로부터는 진자진동과의 등가로써 현의 1차 고유진동수를, 이 식을 적분하고, Fig. 1과 같은 기하학적 해석을 통하여 'elongated companion of the trochoid'[23]형태인 1차 진동모드, $y = c\sin(z/\sqrt{\hat{a}})$를 예측할 수 있었다[24]. Huygens 와 Newton 이래, 물체의 운동을 단진자의 거동으로 등가해석하였으며, Fig. 1에서 단진자가 그리는 원호부분과 단진자의 낙하시간과의 비례관계를, 18세기 초에는 반지름 c의 원호부분 $cdy/\sqrt{c^2-y^2}$ 으로부터, 물체의 운동거리 y와 시간 t간의 관계, $dt = cdy/\sqrt{c^2-y^2}$ 로 기하학적으로 유도하였고, 1728년 Johann Bernoulli가 처음으로 단진자운동이 sine 함수의 운동임을 알게 되었다[11]. 그러나, sine 함수는 여전히 원호 $\widehat{PB}$로 주어지는 선의 변화로 취급되었다[9~11,18]. 모멘텀, 일과 에너지의 개념이 혼미한 가운데, 1720년대부터, Paris Academy of Science에서는 다시금 '힘의 고유척도' 로서 'vis viva'에 대한 논쟁이, Cartesian과 Leibnizian 간 격렬히 재연되었다. Leibnizian의 대표주자로서 Johann Bernoulli는 탄성체 스프링의 충돌에 관한 의견을 1727년 발표하였고, 1742년에는 스프링힘이 강체속도의 자승에 비례한다는, 단위질량 당, $fdx = 1/2\cdot v^2$과 이로부터 그의 '동역학원리', $F = m\cdot dv/dt$임을 제시하고, 예로 연쇄진자(linked pendulum)에 관한 운동방정식, $\triangle 1/2\cdot m_iv_i^2 = \int F_idx_i$를 유도하였다[4,23].



$d\theta=\omega dt,\ ds=c d\theta$

$\triangle ObA \backsim PpA$

$ds : dy = c : \sqrt{c^2-y^2}$

$$ds=\frac{c\,dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$$

or $dt=\dfrac{1}{\omega}\dfrac{dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$; $\dfrac{dy}{dt}=\omega\cdot\sqrt{c^2-y^2}$

if substituted, $t\rightarrow z,\ \omega\rightarrow 1/\sqrt{\hat{a}}$

$$\frac{dy}{dz}=\frac{1}{\sqrt{\hat{a}}}\sqrt{c^2-y^2}$$

$$y=c\sin\left(\frac{z}{\sqrt{\hat{a}}}\right)$$

Fig. 1 Sine function and geometry

• J. Hermann(1678~1733)은 Jakob Bernoulli의 제자이며, Euler의 먼 친척으로, Newton의 'Principia' 이후 동역학에 관한 중요한 저술인 'Phoronomia, sive de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum libri duo'를 1716년에 발표하였다. Leibniz에 의하여 최고의 찬사를 받은 이 저술에서, Hermann은 Leibnizian calculus로 연속적 힘에 대한 Newton의 운동의 제 2법칙을 최초로 미분방정식형으로 제시하였다. Solicitation(구심력) G에 의한 시간 T사이의 운동은 질량 M과 속도V의 곱, MV로 표시, 즉, $G=MV:T$으로 제시한 후, 미소속도 dV와 미소시간 dT에 따른 G(weight or gravity applied to a variable mass M)의 변화를 $G=MdV:dT$, 또는 $dT=MdV:G$로 제안하였다. Hermann은 질량에 대한 개념과 질량의 동역학에서의 역할은 Newton의 의견에 따랐다. 즉, 질량에 대한 Hermann의 생각은,

> 'density … is the ratio which the quantity of matter in any body whatever has to the volume of that body',

이었다[18,25]. Hermann은 또한 계속해서, 단진자의 조화운동 $a\ddot{x}=-x$ 및 이의 적분 $av^2=c^2-x^2$도 그 당시 응용됐던 기하학적 방법으로 연구하였다[23].

• B. Taylor(1685~1731)는 선형성의 작은 진동으로 굽힘진동하는 현의 일부분이 그의 곡률에 비례하는 복원력에 의하여 진동한다고 고찰한 후, 이를 단진자의 운동으로 등가하여, 현의 진동주파수에 대한, Mersenne's law, $f=\dfrac{1}{2l}\cdot\sqrt{P/\rho}$를 처음으로 수학적 이론으로 해석하였다. 즉, 그는 1713년, 'De motu Nervi tensi'[21]에서 두가지 Lemma를 제안하였다. 굽힌 현의 곡률(κ)이 현의 굽힘 변위(y)에 비례한다는 Lemma Ⅰ과 현의 가속도($\ddot{y}$)가 y에 비례한다는 Lemma Ⅱ는, 각각 $\kappa=d^2y/dx^2=-\lambda^2y$와 $d^2y/dt^2=-\omega^2y$으로 표시될 수 있는데, 이들은 결국, 한편으로는 변위에 비례하는 복원력은 조화진동을 갖는 'Hooke's law', $F=-ky$를 뜻하며, 다른 한편으로는 단진자의 등시성과 평형축의 동시통과 특성을 나타내는 'Taylor의 진자조건', $aF=-my$ (예 : 선형화된 단진자의 복원모멘트 $M=-mgl\varphi=-mgy,\ F=M/l=-(g/l)\cdot my=-a^{-1}my$, $aF=-my$, 또는 선형화된 단진자의 운동방정식, $ml^2\ddot{\varphi}+mgl\varphi=0$은 $m\ddot{y}=-(g/l)\cdot my,\ aF=-my$)을 뜻한다.

• Daniel Bernoulli(1700~1782)는 1726년 St. Petersburg Academy의 발간 잡지인 'Commentarii Academiae Petropolitanae'에 'Examen principiorum mechanicae'으로서, 'vis viva'의 $1/2$이며, Coriolis의 운동에너지 $1/2\cdot mv^2$을 Galileo 시대부터 잘 알려진, 낙하속도 v와 시간 t의 관계, $v=gt$로부터 $dv=fdt$를 이용하여, $v=\int fdt$를 유도한 후, $dt=dx/v$를

대입하여, $\frac{1}{2}v^2 = \int f dx$으로 도출하였다[21].

• L. Euler(1707~1783)는 1727년, 'De oscillationibus annulorum elasticorum(On the oscillation of elastic rings, E831)'의 해석 과정 중, Hooke의 탄성법칙에 인장계수(modulus of extension)를 도입하여, Jakob Bernoulli의 굽힘법칙을, $M = Ek^2(1/R - 1/R_0)$, 여기서 M은 막대에 가해지는 굽힘모멘트, 인장계수 Ek^2은 현재의 굽힘강성계수 EI, R_0 및 R은 굽힘전후의 막대의 곡률 반지름, 으로 발전시켰다[26]. 1735년에는, Daniel Bernoulli가 같은 해 발견한 일단이 고정된 막대의 횡진동 방정식, $\hat{a}d^4y/dx^4 = y$를 '진자조건'의 정적평형식, $F + a^{-1}my = 0$을 응용하여 다시 유도한 후, 그 해를 경계조건을 적용하여 멱급수 형태로 기본모드에 대하여 해석하였다[13]. '진자조건'은 1730년대 Euler에 의하여 시스템화된 진동문제 해법의 대표적인 방법이었으나, 공간종속계의 방정식(예 : y, x)운용보다, 시간종속계의 방정식(예 : y, t)운용이 동역학적 관점에서 더 편리함이 인식됨에 따라 1740년대 이후, Euler는 그 응용을 포기하였다. 1736년에는, Newton의 'Principia', Hermann의 'Phoronomia' 이후, 종합적 역학 저술로서, 'Mechanica sive motus scientia analytice exposita(Mechanics or the science of motion analytically demonstrated, E15, E16)'를 발표하였다[10]. 속도척도로서 자유낙하거리를 응용하여 기하학적 해석과 수학적 해석을 취급한 이 저술은, 서문에서 밝힌 Euler 본인의 견해[27],

> For this reason I do not know if, besides Hermann's Phoronomia, there has publicly appeared a work in which the science of motion is treated on its own and enriched with distinct discoveries.,

보다는, 일반적으로 기하학적으로 제시된 Newton의 동역학을 미적분을 응용하여, 시간종속계의 수학적 해석형으로 최초로 기술된 역학저술로 인정되고 있다. 1693년 Leibniz가 sine 함수의 멱급수 전개가 가능하다고 제시한 이래, Euler는 1739년에서야 미분방정식의 해로 표시되는 멱급수가 역으로 sine 또는 cosine 함수로서도 표현될 수 있음을 알게 되었다. Euler는 1750년 'Decouverte d'um nouveau principe de mecanique(Discovery of a new principle in Mechanics, E177)'에서, '동역학의 새로운 원리(a new principle of dynamics)'로서 Newton의 운동의 제 2법칙을 점질량 역학의 관점에서 $2Md^2x = \pm Pdt^2$, 즉, 현재의 $P = Md^2x/dt^2$[12]로 제시하였다. 이것은 거리의 2차 미분량과 미소시간 간의 기본적인 관계로 가속운동을 나타내는 Euler의 식이다. Galileo의 낙하법칙 $\nu = 1/2 \cdot gt^2$에서, 거리 ν와 시간 t를 각각 d^2x와 dt^2으로 대치하면 유도되며, Varignon도 이미 1700년, 전술한 바와 같이, 이 관계를 고찰하였다. 미소거리 ν가 미소량(second difference) d^2x로 표시될 수 있음은, D'Alembert가 1743년 그의 저서, 'Traité de Dynamique'에서 자중 하, 점질량의 운동으로 기하학적으로 증명하였다[28].

4. 'Euler의 진동방정식' 유도과정의 추정

• **추정 1.(Conjecture 1.) : 가속도성 $d\nu$는 Galileo의 낙하법칙 $v = gt$에 근원을 갖는다.**

• Euler는 'Mechanica'에서 가속도성 $d\nu$를 $d\nu$= 가속도 · 이동거리요소(ds)로 정의하였다(참조 : 참고문헌 (10), Mechanica, §.213).

• 낙하속도 $v = gt$와 Descartes의 운동량 mv으로부터, '역적–운동량의 원리(impulse - momentum principle)', $Fdt = mdv$를 유도할 수 있으며, 18세기 초, 이 식은 Leibniz, Varignon, Johann Bernoulli, Hermann, Euler 및 D'Alembert에게 익숙했던 식, $Fdx = mvdv$ 보다 더 알려져 있었다[17].

• 식 $\int f dx = \frac{1}{2}v^2$은 1675년 Leibniz의 적분, $\int x dx = 1/2 \cdot x^2$이래, Huygens(1673), Varignon(1700), Daniel Bernoulli(1726) 및 Johann Bernoulli(1742) 등에 의하여 주장되고, 확인되었으며, 이 식이 $\ddot{x} = -ax$ 또는 $\ddot{x}/g = -x/l$의 적분으로 운동 x가 sine 파형임을 Newton, Hermann, Taylor 등도 인지하였다[18].

• Newton의 운동의 제 2법칙은, Varignon(1700)이 Galileo의 운동학을 동역학적으로 변환시켜 $F = md^2x/dt^2$, 또는 $f = dv/dt$를 유도한 것, Hermann(1716)이 Newton의 힘과 질량개념을 도입하여

$G=MdV:dT$를 제안한 것, 그리고 1720~1740년대 있었던 Paris Academy의 '힘의 정의' 또는 'vis viva 논쟁'이, 결국 '운동량의 변화는 작용력의 시간에 비례하며, vis viva의 변화는 힘이 작용하는 거리에 비례한다.'라는 사실로 정리됨에 따라, Euler(1750)가 Galileo의 낙하법칙을 응용하여, 점질량 역학식, $P=Md^2x/dt^2$으로 발전되었다(5,9,10,12,13,18,23,25).

• Johann Bernoulli의 제자인 Euler가 St. Petersburg Academy에 1727~1741년 체재할 시기에, Hermann은 1724~1731년, Daniel Bernoulli는 1725~1733년 역시 동일 academy에 체류하면서, 때로는 수학분야 해법을 공동 연구하였다.

• 1730년대 Euler는 역학(mechanics) 문제에 관하여, 17세기 응용되었던 기하학과 새로운 Leibniz의 해석학을 연결하는 작업을 시도하였다. 즉, 동시대 계속되는 'vis viva 논쟁'과 '움직이는 물체의 가속도 계산시 발생되는 2차 차분 d^2x의 상수 2에 대한 문제'(9,10,12,17,29)와 비교하여, 보다 더 운동을 명료하게 해석할 수 있는 Galileo의 낙하법칙과 Huygens 이래 운동의 등가해석에 응용된 단진자 운동으로 Euler는 가속도를 해석하였다고 추정된다. 즉, 속도척도로서는 자유낙하거리 ν를, 시간척도로서는 진자길이를 이용하였으며, 힘, 무게와 질량에 대한 개념은 혼용하여, 1736년 Mechanica에서는 $d\nu=pds/A$를, 1739년 (1)에서는 식 (3b)를 유도하였다.

• **추정 2.(conjecure 2.) : 가속도, $d\nu/ds$와 $-(s/b+y/g)$의 평형관계는 Taylor의 '진자조건'에 따른다.**

• 1670년대 Hooke의 탄성법칙, $F=-kx$가 발견된 후, 1690년대 Jakob Bernoulli가 탄성막대의 곡률이 굽힘력 또는 굽힘모멘트에 비례함을 증명함과 함께, 힘 및 모멘트의 평형조건 등을 이용하여, 정역학적 문제가 해결되었고, 1713년에 이르러서는 현의 진동수와 진동모드, 즉, 동역학 문제까지도 해결할 수 있는 Taylor의 '진자조건'이 도출될 수 있었다.

• 단진자의 운동방정식, $ml^2\ddot{\varphi}+mgl\varphi=0$은 '진자조건' $aF=-my$로, 또는 가속도의 비 $\ddot{x}/g$가 변위의 비 $-x/l$과 같은 $\ddot{x}/g=-x/l$로 표현되므로, Euler는 Hooke의 탄성법칙에 따라 등가 단진자의 가속도성 $d\nu$를 탄성가속도성 $-s/b\cdot ds$와 평형시키고, 다음에 외부가속도 y를 역시 비로서 $-y/g\cdot ds$로 추가하여, 식 (4)를 유도하였다고 추정된다.

• 탄성복원력에 의한 가속도는, 예로 Newton의 'Principia'에서 취급된 탄성유체의 단순 조화함수 형태(참고문헌 (17) : p. 767, Prop. 44, Theorem 35와 p. 769, Prop. 47, Theorem 37), 그리고 현의 진동과 단진자 운동방정식이 2계 미분방정식형이며, 그들 해가 바로 조화함수, sine 형태라는 것을 인식한 1728년의 Johann Bernoulli의 인식 등을 응용하였다고 추정된다. 즉, 1693년 Leibniz가 sine함수를 멱급수로 전개한 사실과, Euler가 1730년경에는 e함수의 미적분을 사용하고, 1735~1737년간에는 멱급수문제(E41, E46, E47, E55, E72)를 연구하였으며, 특히 1735년에는 탄성막대의 횡진동 방정식 $\hat{a}d^4y/dz^4=y$의 해로서, 이미 sine과 e함수로서의 표현이 미흡하다고 판단하여 그 해를 멱급수 형태로 제시하였던 사실 등을 시대적으로 종합적으로 비교한다면, Euler가 1739년에는 식 (2) 또는 식 (5a, b)와 같은 2계 미분방정식의 해가 sine 함수형임을 알고 있었으며, 탄성복원력(또는 가속도)과 외부가속도 y를 조화함수, sine형으로 수립한 Euler의 타당성을 추정할 수 있다(1,9,10,21,23,29).

5. 'Euler의 진동방정식'의 검토

• Euler는 'Euler의 진동방정식'을 두 부분으로 나누어 고찰하였다. 즉, E126의 §.23에서는 자유진동방정식, $2adds+s/b\,dt^2=0$의 해를 우선 시간에 대하여, $t=\sqrt{2ab}\cdot\cos^{-1}(s/c)$, 또는 공간운동으로, 명시적으로 처음으로(11) $s=C\cos A\cdot t/\sqrt{2ab}$로 제시하였다.

• §.29에서는 강제진동방정식, $2adds+s/b\,dt^2+a/g\cdot dt^2\cdot\sin A\cdot t/a=0$의 외부가속도인 sine 함수를 멱급수로 다음과 같이 전개 수정,

$$2adds+\frac{s}{b}dt^2+\frac{dt^2}{g}(t-\frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3a^2}+\frac{t^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a^4}-\frac{t^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdots a^6}+etc.) \tag{6}$$

한 후, 그 해 s를 t의 멱급수,

$$s=\alpha+\beta t+\gamma t^2+\delta t^3+\epsilon t^4+\zeta t^5+\eta t^6+etc. \tag{7}$$

으로 가정하고, §.30과 §.31에서는 계수 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 등을 계산하였다. 계속하여, §.33-§.38에서는 주파수비 $n=\sqrt{2b/a}=(\omega/\omega_n)$, 여기서, $\omega_n=\sqrt{1/2ab}$, $\omega=1/a$, 의 값 $n=1,2,3,4,5$에서, 시간 $t/\sqrt{a}$에 따른 s와 속도 $\sqrt{\nu}$를 계산한 값을 표로 제시하였다.

• §.39에서는 $n=1$의 공진현상에 대한 Euler의 검토의견이 다음과 같이 기술되었다:

> ‘…, quo erat $2b=a$: eo qoud spatium, im quo continetur quaeque oscillatio continou augetur, ac tandem in infinitum excrescit: qui effectus eo magis est admirandus, quod huic soli casui est proprius, atque a viribus finitis oriatur.’

즉, ‘여기서 $2b=a$ 인 경우, 시간에 따라, 진동은 한정없이 계속적으로 증가하여 무한대로 커진다: 유한한 크기의 힘에 따른 진동은 엄청난 크기로 현저하게 증대된다.’

그리고,

> ‘Ex hoc igitur casu, si quidem commode ad praxin reuocari posset, inuentio perpetui mobilis deriuari posse videtur: pendulum enim in cycloide oscillans iam ita est comparatum, vt impulsiones a grauitate oriundae versus situm aequilibrii, sint vt spatia percurrenda. Quare si tali pendulo istiusmodi automaton applicetur, qoud alteram vim a tempore pendentem producat, vis oscillationes tantopere augerntis portio tum ad automati intensionem renouandan, quoties opus est, tum ad resistentiam et frictionem superandam impendi posset, ita vt si oscillationes non increscant, tamen datae quantitatis perpetuo conseruentur.’

라 하였는데, 의역하면, ‘이런 결과는 특별한 경우에 발생되며 유한한 힘으로부터 일어나기 때문에, 이 효과는 무엇보다도 놀랄만하다. 그래서, 이 결과를 실제에 응용한다면, 영구운동(perpetual motion)의 발명으로 이어 질 수 있다. 사이클로이달 진자를 응용함으로써 동일한 주기를 갖는 ‘automaton(automatic machanism)’을 만들 수 있으며, 이 경우, 진동의 크기는 저항과 마찰을 충분하게 극복함으로써 계속적으로 증가하지는 않으며, 최소한 일정한 진폭을 영구히 유지할 수 있다’가 된다(참조 : 참고문헌 (12)).

• Euler는 강제진동의 해석에 있어, 주파수 변화에 따른 진폭의 특성(FRF, frequency response function)을 구체적으로 제시하지는 않았지만, 오늘날 알려진 공진현상의 중요성과 응용성을 오로지 진동진폭의 계산결과들로써 고찰 하였다. 이는 해석적으로 제시한 자유진동 해법과 더불어, 현대 진동학의 자유진동과 강제진동의 해법의 시효가 된다.

6. 결 론

1-자유도 m-k 진동계의 진동방정식, 식 (1a)는 진동학 기초의 서두에 소개되는 미분방정식으로서, 이 논문에서는 그 식의 역사적 유래에 대하여, Eluer의 논문, E126을 중심으로 고찰하였다.

고찰방법으로 식 (1a)의 구성 각항, 즉, $m\ddot{x}$, kx와 $\hat{F}\sin\omega t$가 역학적으로 상대적으로 어떻게 형성되었는가를, 17세기와 18세기의 관련 연구부분 등을 시대적으로 집중, 조명하였다.

• 그 결과들을 다음과 같이 요약한다:

(1) 18세기는, ‘운동(motus)’에 대한 정의와 해석방법에 관하여 Galileo, Descartes, Newton, Leibniz 등으로부터 시작된 17세기의 ‘과학적 혁명’이 결과를 맺는 시기라 할 수 있다. 즉, 한편으로는 운동(예 : quantity of motion, vis viva 등), 힘 및 가속도 등에 대한 정의, 원인과 결과(causes and effects)에 관하여 계속된 논쟁과 ‘일반화된 하나의 역학적 원리(a principle of mechanics)’로 제시하고자 하는 경쟁적 노력으로 역학(mechanics)이 자연스레 형이상학(metaphysics)에서 분리되면서, 그 해석도 기하학적 해석으로부터 함수도입과 미·적분법을 적용한 미분방정식의 수립 및 해법연구에 의하여 해석학적(rational, analytical) 해석으로 바뀌어졌다. 또한, 다른 한편으로는 공간적 정역학적 관찰이 시간적 동역학적 해석으로 발전하면서, 선형 시스템 거동해석의 고전적 방법의 제공이 가능하여 졌다.

(2) 진동현상은 탄성체의 일반적인 운동으로서, 그 개념은 과학적 혁명 중 일찍이 형성되었다. 당시

의 현 및 공기의 진동문제(예 : 주파수, 조화성분 및 파의 진행 등)는 Huygens 이후 일반화된 단진자 진동으로 등가해석하되, Taylor의 '진자조건'을 응용함으로써 진동주파수와 진동모드 등, 고유치의 공간적 해석이 가능하였다.

(3) 1730~1740년대 Euler는 기하학적 해석방법과 함수론적 연산방법의 통합으로써 역학문제들을 해결하려고 하였으며, 방정식의 수립에 있어, 속도척도로서는 자유낙하거리를, 시간척도로서는 진자길이를 사용하였고, 힘, 무게, 질량 등에 대하여는 무게 하나로 혼용하였다. 특히, 'Mechanica'에서는 동역학 문제를 처음으로 현재와 같은 시간 종속계의 수학적 해석으로 취급하였다.

(4) Euler는 식(2)를 유도함에 있어, 당시 논란 중이던 Newton의 $F=\Delta mv/\Delta t$를 적용하지 않고, $m\ddot{x}$에 관하여는 Leibniz, Varignon, Hermann등에 의하여 제기된 가속도를 Galileo의 낙하법칙을 응용하여 제4장의 추정 1.을 제시하였으며, kx와 $\hat{F}\sin\omega t$에 관하여는 각각 Hooke 및 Jakob Bernoulli 등의 탄성법칙과 Leibniz 및 Johann Bernoulli 등에게 이미 알려진 sine 형의 단진자 운동을 고려한 후, Taylor의 '진자조건'으로 추정 2.를 제시하였다고 고찰된다.

후 기

이 논문은 인천대학교 2008년도 지원과제인, '에너지 원리를 이용한 안정도 이론의 발달' 내용의 일부이다. 자료조사 및 의견교환에 협조를 하여 주신 TU Berlin 물리학과 관련 여러분에게 감사를 표합니다.

참 고 문 헌

(1) Euler, L., 1739, De Novo Genere Oscillationvm(On a New Kind of Oscillations), Comm. Acad. Sci. Petrop.11, E126, pp. 128~149.

(2) Galilei, G., 1638, Dialogues Concerning Two New Sciences(Discorsi e Dimostrazioni Mathematiche, intorno à due Nuoue Scienze), In Leida Appresso gli Elseviriri.

(3) Descartes, R., 1644, Principia Philosiphiae (Principles of Philosophy).

(4) Terrall, M., 2004, Vis Viva Revisited, Hist. Sci, xlii, pp. 189~209.

(5) Euler, L., 1750, De Couverte D'un Nouveau Principe de Mecanique(Discovery of a New Principle in Mechanics), (publ. 1752), Opera Omnia, Ser. 2, V. E177, pp. 81~108.

(6) Benvenuto, E., 1991, An Introduction to the History of Structural Mechanics, Vol. I : Statics and Resistance of Solids, Springer-Verlag.

(7) Hort, W., 1910, Technische Schwingungslehre, Verlag von Julius Springer.

(8) Routh, E. J., 1897, The Elementary Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies, 6th ed., Macmillan Co.(German ed. in 1898).

(9) Ravetz, J., 1961, The Representation of Physics Quantities in Eighteenth-century Mathematical Physics, Isis, LⅡ, pp. 7~20.

(10) Euler, L., 1736, Mechanica, Vol. 1,(Translated and Annotated by I. Bruce), E15, E16.

(11) Katz, V., 1998, A History of Mathematics an Introduction, 2.ed., Addison Wesley.

(12) Mikhailov, G. K., Schmidt. G., Sedov, L. I., 1984, Leonhard Euler und das Entstehen der Klassischen Mechanik, Z. Angew. Math. U. Mech., Bd. 64, H.2, pp. 73~82.

(13) Truesdell, C., 1960, The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies, Birkhäuser Verlag.

(14) Huygens, C., 1673, Horologivm Oscillatorivm.

(15) Chapman, A., 2005, England's Leonardo : Robert Hooke and the Seventeenth-century Scientific Revolution, IoP.

(16) Moyer, A. E., 1977, Robert Hooke's Ambiguous Presentation of 'Hooke's Law', Isis, 68, No. 242, pp. 266~275.

(17) Cohen, I. B., Whitman, A., 1999, Isaac Newton The Pricipia Mathematical Principles of Natural Philosophy A New Translation, Univ. California Press.

(18) Hankins, T. L., 1990, Jean d'Alembert Science and Enlightenment, Gordon and Breach.

(19) Burton, D. M., 2003, The History of Mathematics An Introduction, 5th ed., McGraw Hill.

(20) Boyer, C. B., Merzbach, U. C., 1991, A History of Mathematics, John Wiley & Sons.

(21) Szabó, I., 1987, Geschichte der Mechanischen

Prinzipien, Birkhäuser Verlag.

(22) Truesdell, C., 1968, Essays in the History of Mechanics, Springer-Verlag.

(23) Cannon, J. T., Dostrovsky, S., 1981, The Evolution of Dynamics : Vibration Theory from 1678 to 1742, Springer-Verlag.

(24) Park, B. Y., 2007, Evolution of Vibration Theory in the Eighteenth Century, J. of the Korea Management Engineers Society, Vol. 12, No. 3, pp. 29~48.

(25) Cohen, I. B., 1980, The Newtonian Revolution with Illustrations of the Transformation of Scientific Ideas, Cambridge University Press.

(26) Bogolyubov, N. N., et al., 2007, Euler and Modern Science, The Mathematical Association of America.

(27) Hepburn, B. S., 2007, Equilibrium and Explanation in 18th Century Mechanics, Diss., Univ. of Pittsburgh.

(28) Fraser, C. G., 1997, Calculus and Analytical Mechanics in the Age of Enlightenment, Variorum.

(29) Sandifer, C. E., 2007, The Early Mathematics of Leonhard Euler, The Mathematical Association of America.