

다항식 퍼지 대규모 시스템의 출력 제한 제어기 설계 : 제공합 접근 방법

Design of Output Feedback Controller for Polynomial Fuzzy Large-Scale System : Sum-of-Square Approach

김한솔* · 주영훈** · 박진배**

Han Sol Kim*, Young Hoon Joo**, and Jin Bae Park*

* 연세대학교 전기전자공학과

E-mail: {solsol, jbpark}@yonsei.ac.kr

** 군산대학교 제어로봇공학과

E-mail: yhjoo@kunsan.ac.kr

요 약

본 논문에서는 출력 제한 제어기를 이용해 다항식 퍼지 대규모 시스템을 안정화하는 방법을 제안한다. 이를 위해, 먼저, 대규모 시스템의 부분 시스템에 대해 퍼지 모델링을 한 후, 각각에 대해 출력 제한 제어기를 설계하여 대규모 시스템을 안정화하는 방법을 제안한다. 이때, 다항식 Lyapunov 함수를 적용하면 다항식 퍼지 대규모 시스템의 안정화 조건은 제공합 조건으로 주어지고, 이것은 MATLAB의 툴박스인 SOSTOOLS로 해석 가능하다. 이러한 과정을 거친 후에 얻어진 해에서 시스템을 안정화시키는 출력 제한 제어기의 이득을 구할 수 있다. 마지막으로, 제안된 기법의 적합성을 검증하기 위해 시뮬레이션 예제가 주어진다.

키워드 : 다항식 퍼지 시스템, 제공합 조건, 출력 제한 제어기, 대규모 시스템.

Abstract

This paper presents the stabilization method for polynomial fuzzy large-scale system by using output feedback controller. Each sub system of the large-scale system is transformed into polynomial fuzzy model, and then output feedback controller is designed to stabilize the large-scale system. Stabilization condition is derived as sum-of-square (SOS) condition by applying the polynomial Lyapunov function. This condition can be easily solved by SOSTOOLS which is the third party of the MATLAB. From these solutions, output feedback controller gain can be obtained by SOS condition. Finally, a simulation example is presented to illustrate the effectiveness and the suitability of the proposed method.

Key Words : Polynomial fuzzy system, Sum-of-Square(SOS) condition, output feedback controller, large-scale system.

1. 서 론

과학기술이 발전함에 따라 현대 사회에 등장한 많은 시스템들은 차수가 높아지고 시스템 내부의 여러 요소들이 상호 영향을 끼치는 사례가 많이 나타나고 있다. 이러한 시스템을 하나의 시스템으로 표현하여 모델링과 제어를 수행할 경우 계산량이 많아져 고가의 장비를 이용해야 하는 문제점이 있다. 예를 들면, 전력계통 시스템 같이 분산된 형태의 상호 결합 시스템으로 주어지거나 하나의 시스템으로 표현하는 것이

어려운 시스템도 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위해서 여러 개의 부분 시스템으로 이루어진 대규모 시스템을 모델링하고 제어하는 기법이 등장하였다. 이런 대규모 시스템은 일반적으로 비선형 시스템으로 주어지게 되며, 명료하고 효율적인 선형 시스템의 제어 기법을 적용할 수 없다는 단점이 있다. 이를 해결하기 위해 Takagi와 Sugeno[1]는 비선형 시스템을 퍼지 규칙의 결론부를 여러 동작점에서의 선형 시스템의 퍼지 조합으로 나타내는 Takagi-Sugeno (T-S) 퍼지 시스템을 제안하였다. T-S 퍼지시스템 자체는 비선형 시스템이지만, 퍼지 규칙의 결론부가 선형 시스템으로 주어지기 때문에 선형 제어 이론을 비선형 시스템에 사용할 수 있다는 이점이 있고, 그로 인해 수십 년간 많은 연구가 활발하게 진행되어 왔다[1-4].

하지만 Lyapunov 직접법[10]으로부터 얻어지는 T-S 퍼지 시스템의 안정도 조건은 만족해야 하는 공통의 양한정 행렬이 상수 행렬이기 때문에 이를 찾지 못하는 경우가 많이 있었다. 기존의 T-S 퍼지 시스템의 이러한 단점을 보완하고자 Tanaka [5]는 다항식 퍼지 시스템을 제안하였다. 다항식 퍼

접수일자 : 2011년 6월 22일

완료일자 : 2011년 10월 15일

+교신저자

감사의 글 : 본 논문은 2011년도 두뇌한국 21사업과 2010년도 지식경제부의 재원으로 한국에너지 기술평가원(KETEP)의 지원을 받아 수행한 연구과제입니다. (NO. 20104010100590)

지 시스템은 퍼지 규칙의 결론부 시스템의 행렬을 상수 행렬이 아닌 다항식으로 이루어진 행렬로 표현하는 퍼지 시스템이다. 또한 공통의 양한정 행렬을 상수 행렬이 아닌 다항식의 행렬로 표현함으로써 해석 가능 범위를 증가시킬 수 있다. 이런 이유로 다항식 퍼지 시스템에 대한 연구가 다양하게 진행되어 왔다. [5-6]. T-S 퍼지 시스템에서는 Tseng [3]등이 대규모 시스템에 대한 연구를 하였지만, 아직까지 다항식 퍼지 시스템에서는 이런 연구가 진행되지 않았다. 따라서 본 논문에서는 다항식 퍼지 모델의 단일 시스템에 국한된 연구를 확장하고자 이에 대한 대규모 시스템의 모델을 제시하고 그에 적합한 출력 제한 제어기 설계 기법을 제안한다. 제안하는 기법에서 안정화 조건은 다항식 Lyapunov 함수를 이용해 얻어지게 되고, 이 조건은 제곱합 조건이 된다. 제곱합 조건은 수치해석 적인 방법으로 쉽게 구할 수 있으며, 이는 컴퓨터 프로그램인 MATLAB의 툴박스인 SOSTOOLS[8]와 Sedumi[9]를 이용한다. 구해진 안정화 조건의 해에서, 전체 시스템을 안정화 시키는 출력 제한 제어기의 이득을 구할 수 있다. 마지막으로 제안하는 기법의 타당성을 검증하기 위해 컴퓨터 시뮬레이션 예제를 수행한다.

본 논문에서는 2장에서 대규모 시스템의 다항 퍼지 시스템 모델을 다루고, 3장에서 그에 적합한 제어기 설계를 다룬다. 4장에서 시뮬레이션 예제를 수행하고, 마지막으로 5장에서 결론을 내린다.

2. 다항식 퍼지 대규모 시스템 모델링

Sector nonlinearity[2]개념에 의해 비선형 대규모 시스템은 다항 퍼지 대규모 시스템으로 변환이 가능하다. 앞에서의 표기에서 s 는 다항 퍼지 대규모 시스템을 의미하며, N 은 부분 시스템의 수를 나타낸다. 즉, S_i ($i=1,2,\dots,N$). i 번 째 다항 퍼지 부분 시스템은 다음의 퍼지 IF-THEN 규칙으로 표현 가능하다.

i 번째 부분 시스템 규칙 k :

$$\begin{aligned} \text{IF } z_{i_1}(t) \text{ is } M_{i_{k1}} \text{ and } \dots \text{ and } z_{i_p}(t) \text{ is } M_{i_{kp}} \\ \text{THEN } \dot{x}_i(t) = A_{ik}(x_i(t))\hat{x}_i(x_i(t)) + B_{ik}(x_i(t))u_i(t) \\ + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ijk}(x_i(t))\hat{x}_j(x_j(t)) \end{aligned} \quad (1)$$

$$y_i(t) = C_i(x_i(t))\hat{x}_i(x_i(t)) \quad (2)$$

여기서, $x_i(t)$ 는 상태 벡터를, $z_{i_c}(t)$ ($c=1,2,\dots,p$)는 i 번 째 부분 시스템의 전체 변수를 나타내며, $M_{i_{kc}}$ ($k=1,2,\dots,r_i$)는 그에 상응하는 퍼지 집합이고, $A_{ik}(x_i(t)) \in R^{n_i \times n_i}$, $B_{ik}(x_i(t)) \in R^{n_i \times 1}$, $C_i(x_i(t)) \in R^{m_i \times n_i}$ 는 각각 $x_i(t)$ 의 다항식으로 이루어진 알고 있는 시스템, 입력, 그리고 출력 행렬이고, $A_{ijk}(x_i(t)) \in R^{n_i \times n_j}$ 는 i 번 째 부분 시스템에서 j 번 째 부분 시스템으로의 k 번 째 규칙에 해당하는 상호 결합

을 표현하는 행렬이다. 그리고 $\hat{x}_i(x_i(t))$ 는 각 행의 원소가 $x_i(t)$ 의 단항식으로 이루어진 열벡터이며, $u_i(t)$ 는 입력 벡터이다.

식 (1)로 표현되는 부분 시스템의 규칙에 싱글톤 퍼지화, 곱셈추론, 중심값-평균 비퍼지화를 수행하면 다음과 같이 비퍼지화된 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = \sum_{k=1}^{r_i} h_k(z_i(t)) \{ A_{ik}(x_i(t))\hat{x}_i(t) - B_{ik}(x_i(t))u_i(x_i(t)) \\ + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ijk}(x_i(t))\hat{x}_j(x_j(t)) \} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, $h_k(z_i(t))$ 는 정규화 된 가중치로서,

$$h_k(z_i(t)) = \frac{\Gamma_k(x_i(t))}{\sum_{w=1}^{r_i} \Gamma_w(z_i(t))},$$

이고, $\Gamma_w(z_i(t))$ 는 다음의 특성을 따른다.

$$\begin{aligned} \Gamma_w(z_i(t)) = \prod_{j=1}^{r_i} M_{i_{wj}}, \\ \Gamma_w(z_i(t)) \geq 0, \\ \sum_{w=1}^{r_i} \Gamma_w(z_i(t)) > 0. \quad i \end{aligned}$$

이러한 $\Gamma_w(z_i(t))$ 의 특성에 의해 $h_k(z_i(t))$ 는 다음과 같은 특성을 갖는다.

$$\begin{aligned} h_k(z_i(t)) \geq 0, \\ \sum_{k=1}^{r_i} h_k(z_i(t)) = 1. \end{aligned}$$

비퍼지화 된 대규모 시스템 (3)의 안정도 조건은 다항식 Lyapunov 함수에 의해 얻을 수 있으며, i 번 째 부분 시스템의 다항식 Lyapunov 함수는 다음과 같이 정의 내린다.

$$V_i(x_i(t)) = \hat{x}_i^T(x_i(t)) P_i(\tilde{x}_i(t)) \hat{x}_i(x_i(t)) \quad (4)$$

여기서, $P_i(\tilde{x}_i(t))$ 는 $\tilde{x}_i(t)$ 의 다항식으로 이루어진 양한정 행렬이다. $\tilde{x}_i(t)$ 에 대한 정의는 정리 1에서 다룬다.

3. 출력 제한 제어기 설계

이 장에서는 앞서 소개한 다항식 퍼지 대규모 시스템을 안정화시키기 위해 출력 제한 제어기를 설계한다. i 번 째 부분 시스템의 출력 제한 제어기는 다음과 같은 퍼지 규칙으로써 표현할 수 있다.

i 번 째 출력 제한 제어기 규칙 m :

$$\text{IF } z_{i_1}(t) \text{ is } M_{i_{m_1}} \text{ and } \dots \text{ and } z_{i_p}(t) \text{ is } M_{i_{m_p}} \\ \text{THEN } u_i(t) = -K_{i_m}(x_i(t))y_i(t) \quad (5)$$

여기서, $K_{i_m}(x_i(t)) \in R^{1 \times m_i}$ 는 $x_i(t)$ 의 다항식으로 이루어진 출력 궤환 제어기의 이득이고, $y_i(t)$ 는 i 번째 부분 시스템의 출력이다. 출력 궤환 제어기의 퍼지 규칙에 싱글톤 퍼지화, 곱셈 추론, 중심값-평균 비퍼지화를 적용하면 추론된 출력 궤환 제어기는 다음과 같다.

$$u_i(t) = - \sum_{m=1}^{r_i} h_m(z_i(t)) K_{i_m}(x_i(t)) y_i(t) \quad (6)$$

앞으로의 표기에서 시간 t 에 대한 표기는 명시하지 않도록 한다. 앞서 정의한 i 번째 부분 시스템 (3)에 출력 궤환 제어기 (6)을 연결하면, i 번째 페루프 부분 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{\hat{x}}_i = \sum_{k=1}^{r_i} \sum_{m=1}^{r_i} h_k(z_i) h_m(z_i) \left\{ A_{ik}(x_i) \hat{x}_i(x_i) - B_{ik}(x_i) K_{im}(x_i) y_i(x_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ijk}(x_i) \hat{x}_j(x_j) \right\} \quad (7)$$

식 (7)로 표현되는 페루프 부분 시스템 식에 $y_i = C_i(x_i) \hat{x}_i(x_i)$ 를 대입하면 다음의 최종적인 페루프 부분 시스템 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{\hat{x}}_i = \sum_{k=1}^{r_i} \sum_{m=1}^{r_i} h_k(z_i) h_m(z_i) \left\{ (A_{ik}(x_i) - B_{ik}(x_i) C_i(x_i)) \hat{x}_i(x_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ijk}(x_i) \hat{x}_j(x_j) \right\} \quad (8)$$

여기서, $c_i(x_i)$ 는 x_i 의 다항식으로 이루어진 출력 행렬이다.

다음의 보조 정리는 페루프 시스템 (8)을 전역적으로 접근 안정화시키며, 정리를 증명하기 위해 필요하다.

보조 정리 1[4]: 어떤 상수 $\epsilon > 0$ 과, 임의의 행렬 X 와 Y 에 대해서 다음의 부등식은 항상 성립한다.

$$X^T Y + Y^T X \leq \epsilon X^T X + \frac{1}{\epsilon} Y^T Y \quad (9)$$

정리 1: 부분 시스템 (8)로 이루어진 대규모 시스템은 모든 i 에 대해서 다음 제곱합 조건을 만족하는 행렬 $X_i(\tilde{x}_i)$ 와 $F_{im}(x_i)$ 이 존재하면 전역적으로 접근 안정화된다. 다음 조건에서 $\epsilon_{1i}(x_i) > 0$ 과 $\epsilon_{2ikm}(x_i) > 0$ 은 모든 x_i 의 값에 대해서 양수인 다항식이다.

$$v_1^T (X_i(\tilde{x}_i) - \epsilon_{1i}(x_i) I) v_1 \text{ is SOS} \quad (10)$$

$$-v_2^T \left(\begin{bmatrix} \alpha_{ikm}(x_i) + (N-1)I & X_i(\tilde{x}_i) \beta_{ik}^T(x_i) \\ \beta_{ik}(x_i) X_i(\tilde{x}_i) & -I \end{bmatrix} + \epsilon_{2ikm}(x_i) I \right) v_2 \text{ is SOS} \quad (k \leq m) \quad (11)$$

여기서, $\alpha_{ikm}(x_i) = X_i(\tilde{x}_i) G_{ikm}^T(x_i) T_i^T + T_i G_{ikm}(x_i) X_i(\tilde{x}_i) - \sum_{l \in L_i} (\partial X_i^{-1}(\tilde{x}_i) / \partial x_{il}) A_{ikl}^l(x_i) \hat{x}_l(x_l)$, $G_{ikm}(x_i) = A_{ik}(x_i) - B_{ik}(x_i) K_{im}(x_i) C_i(x_i)$, $A_{ikl}^l(x_i)$ 는 $A_{ik}(x_i)$ 의 l 번째 행 벡터이며, $L_i = \{l_1, l_2, \dots, l_{i_j}\}$ 는 $B_{ik}(x_i)$ 의 0으로 이루어진 행의 행 번호를 나타내며, $\tilde{x}_i = [x_{i_1} \dots x_{i_{j_i}}]$ 를 의미하고, $\beta_{ik}^T(x_i) = [A_{1ik}^T(x_i) T_1^T \dots A_{Nik}^T(x_i) T_N^T]$ 이고, v_1 과 v_2 는 x_i 로 구성되지 않은 임의의 열벡터이다. 또한, $T_i = \left[\frac{\partial \hat{x}_{ia}(x_i)}{\partial x_{ib}} \right]$, $a = (1, \dots, n_i)$ 는 행 번호, $b = (1, \dots, n_i)$ 는 열 번호를 의미한다. 즉, $T_i \in R^{n_i \times n_i}$ 이다.

이 때, 출력 궤환 제어기의 이득 $K_{im}(x_i)$ 는 양한정 다항식 행렬 $X_i(\tilde{x}_i)$ 와 다항식 행렬 $F_{im}(x_i)$ 과 다음의 관계를 갖는다.

$$K_{im}(x_i) C_i(x_i) X_i(\tilde{x}_i) = F_{im}(x_i) \quad (12)$$

증명 : 다음과 같이 주어지는 대규모 시스템에 대한 다항식 Lyapunov 함수 후보 $V(x)$ 를 고려하자:

$$V(x) = \sum_{i=1}^N \hat{x}_i^T(x_i) X_i^{-1}(\tilde{x}_i) \hat{x}_i(x_i) \quad (13)$$

식 (13)을 시간에 대해서 미분하면 다음과 같다.

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^N \left\{ \hat{x}_i^T(x_i) \dot{X}_i^{-1}(\tilde{x}_i) \hat{x}_i(x_i) + \hat{x}_i^T(x_i) X_i^{-1}(\tilde{x}_i) \dot{\hat{x}}_i(x_i) + \hat{x}_i^T(x_i) \dot{X}_i^{-1}(\tilde{x}_i) \hat{x}_i(x_i) \right\} < 0 \quad (14)$$

식 (14)는 다음과 같이 정리된다.

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^N \left\{ \hat{x}_i^T(x_i) T_i^T X_i^{-1}(\tilde{x}_i) \hat{x}_i(x_i) + \hat{x}_i^T(x_i) X_i^{-1}(\tilde{x}_i) T_i \dot{\hat{x}}_i(x_i) + \hat{x}_i^T(x_i) \left(\sum_{l=1}^{n_i} \frac{\partial \dot{X}_i^{-1}(\tilde{x}_i)}{\partial x_{il}} \hat{x}_l(x_l) \right) \hat{x}_i(x_i) \right\} < 0 \quad (15)$$

여기서 $l \in L_i$ 에 대해서 $B_{ik}^l(x_i) = 0$ 이기 때문에, \dot{x}_{il} 는 다음과 같이 정의된다.

$$\dot{x}_{il} = A_{ik}^l(x_i) \hat{x}_i(x_i) \quad (16)$$

식 (15)에 식 (16)과 페루프 부분 시스템 식 (8)을 대입하면, 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{r_i} \sum_{m=1}^{r_i} h_k(z_i) h_m(z_i) \{ (A_{ik}(x_i) \hat{x}_i(x_i) - B_{ik}(x_i) K_{im}(x_i) C_i(x_i) \hat{x}_i(x_i))^T T_i^T X_i^{-1} \hat{x}_i(x_i) \\ & + \hat{x}_i^T(x_i) X_i^{-1}(\tilde{x}_i) T_i^T (A_{ik}(x_i) \hat{x}_i(x_i) - B_{ik}(x_i) K_{im}(x_i) C_i(x_i) \hat{x}_i(x_i)) \\ & + \hat{x}_i^T(x_i) \left(\sum_{l \in L_i} \frac{\partial \dot{X}_i^{-1}(\tilde{x}_i)}{\partial x_{il}} A_{ik}^l(x_i) \hat{x}_i(x_i) \right) \hat{x}_i(x_i) \\ & + \sum_{j=1, j \neq i}^N (\hat{x}_j^T(x_j) A_{ijk}^T T_i^T X_i^{-1}(\tilde{x}_i) \hat{x}_i(x_i) + \hat{x}_i^T(x_i) X_i^{-1}(\tilde{x}_i) T_i A_{ijk} \hat{x}_j(x_j)) \} < 0 \end{aligned} \quad (17)$$

간단하게 표기하기 위해, $G_{ikm}(x_i) = A_{ik}(x_i) - B_{ik}(x_i) K_{im}(x_i) C_i(x_i)$ 로 치환하고, 보조정리 1을 식 (17)의 마지막 항에 적용하면 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) \leq & \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{r_i} \sum_{m=1}^{r_i} h_k(z_i) h_m(z_i) \{ \hat{x}_i^T(x_i) G_{ikm}^T(x_i) \\ & \times T_i^T X_i^{-1}(\tilde{x}_i) \hat{x}_i(x_i) + \hat{x}_i^T(x_i) X_i^{-1}(\tilde{x}_i) T_i \\ & \times G_{ikm}(x_i) \hat{x}_i(x_i) \\ & + \hat{x}_i^T(x_i) \left(\sum_{l \in L_i} \frac{\partial \dot{X}_i^{-1}(\tilde{x}_i)}{\partial x_{il}} A_{ik}^l(x_i) \hat{x}_i(x_i) \right) \hat{x}_i(x_i) \\ & + \hat{x}_i^T(x_i) (N-1) (X_i^{-1}(\tilde{x}_i))^2 \hat{x}_i(x_i) \\ & + \sum_{j=1, j \neq i}^N \hat{x}_j^T(x_j) A_{ijk}^T(x_i) T_i^T T_j A_{ijk}(x_i) \hat{x}_j(x_j) \} < 0 \end{aligned} \quad (18)$$

식 (18)의 모든 항에 공통으로 곱해지는 $\hat{x}_i^T(x_i)$ 와 $\hat{x}_i(x_i)$ 를 $\{ \cdot \}$ 의 밖으로 보내면, $\dot{V}(x)$ 는 다음의 조건이 만족되면 음수이다.

$$\begin{aligned} & G_{ikm}^T(x_i) T_i^T X_i^{-1}(\tilde{x}_i) + X_i^{-1}(\tilde{x}_i) T_i G_{ikm}(x_i) \\ & + \sum_{l \in L_i} \frac{\partial \dot{X}_i^{-1}(\tilde{x}_i)}{\partial x_{il}} A_{ik}^l(x_i) \hat{x}_i(x_i) + (N-1) (X_i^{-1}(\tilde{x}_i))^2 \\ & + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ijk}^T(x_i) T_j^T T_j A_{ijk}(x_i) < 0 \end{aligned} \quad (19)$$

윗 식의 좌우에 $X_i(\tilde{x}_i)$ 를 곱하고, 마지막 항을 $\beta_{ik}^T(x_i) = [A_{1ik}^T(x_i) T_1^T \cdots A_{Nik}^T(x_i) T_N^T]$ 를 이용해 정리하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & X_i(\tilde{x}_i) G_{ikm}^T(x_i) T_i^T + T_i G_{ikm}(x_i) X_i(\tilde{x}_i) \\ & - \sum_{l \in L_i} \frac{\partial X_i(\tilde{x}_i)}{\partial x_{il}} A_{ik}^l(x_i) \hat{x}_i(x_i) \\ & + (N-1) I + X_i(\tilde{x}_i) \beta_{ik}^T(x_i) \beta_{ik}(x_i) X_i(\tilde{x}_i) < 0 \end{aligned} \quad (20)$$

식 (20)에 슈어 보수(Shur complements)를 취하면 최종적으로 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{ikm}(x_i) + (N-1)I & X_i(\tilde{x}_i) \beta_{ik}^T(x_i) \\ \beta_{ik}(x_i) X_i(\tilde{x}_i) & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{imk}(x_i) + (N-1)I & X_i(\tilde{x}_i) \beta_{im}^T(x_i) \\ \beta_{im}(x_i) X_i(\tilde{x}_i) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

식 (21)의 행렬 부등식을 만족하는 $X_i(\tilde{x}_i)$ 와 $F_{im}(x_i)$ 에 대해서 $V(x)$ 의 시간 t 에 대한 미분 $\dot{V}(x)$ 은 x_i 의 궤적에 따라서 항상 음수이며, 식 (10)의 조건에 의해 $V(x) > 0$ 을 만족한다. 따라서 Lyapunov의 직접법에 의해 정리 1을 만족하는 시스템은 안정하다. 여기서 식 (21)의 행렬 부등식의 조건은 식 (11)의 제곱합 조건과 동치이다.

4. 시뮬레이션 예제

이 장에서는 안정하지 않은 임의의 비선형 시스템 방정식을 다항식 퍼지 대규모 시스템으로 모델링 하고, 출력 제환 제어기를 제안된 기법에 의해 설계하는 과정을 보이고, 안정화된 결과를 도식한다.

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = 0.1x_{11}^3 - x_{12} + u_1 \\ \dot{x}_{12} = \sin x_{11} - x_{11}^2 x_{12} + 3x_{21} + u_1 \\ \dot{x}_{21} = x_{11} x_{12} + x_{21}^2 + u_2 \end{cases} \quad (22)$$

여기서 각 상태 변수의 초기값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= [x_{11}(0), x_{12}(0), x_{21}(0)]^T = [1, 1, 1]^T \\ \mathbf{y}_1 &= x_{11} + 1.7x_{12}, \quad \mathbf{y}_2 = x_{21} \end{aligned} \quad (23)$$

식 (22)와 (23)으로 표현되는 비선형 시스템은 식 (8)의 다항식 퍼지 대규모 시스템으로 모델링 가능하며, 이때 각 행렬과 소속 함수는 다음과 같다.

부분 시스템 1:

$$\begin{aligned} A_{11}(x_1) &= \begin{bmatrix} 0.1x_{11}^2 & -1 \\ 1 & -x_{11}^2 \end{bmatrix}, \\ A_{12}(x_1) &= \begin{bmatrix} 0.1x_{11}^2 & -1 \\ -0.2172 & -x_{11}^2 \end{bmatrix}, \\ A_{121}(x_1) &= A_{122}(x_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \\ B_{11}(x_1) &= B_{12}(x_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C_1(x_1) &= [1 \quad 1.74]. \end{aligned}$$

부분 시스템 2:

$$\begin{aligned} A_{21}(x_2) &= A_{22}(x_2) = [x_{21}], \\ A_{211}(x_2) &= A_{212}(x_2) = [0 \quad x_{11}], \\ B_{21}(x_2) &= B_{22}(x_2) = [1], \\ C_2(x_2) &= [1], \\ \hat{x}_1(x_1) &= \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_2(x_2) = x_{21}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{11}(z_1) &= \frac{\sin x_{11} + 0.2172x_{11}}{1.2172x_{11}}, \quad h_{12}(z_1) = \frac{x_{11} - \sin x_{11}}{1.2172x_{11}} \\ h_{21}(z_2) &= \frac{x_{21} + 2}{4}, \quad h_{22}(z_2) = \frac{-x_{21} + 2}{4} \end{aligned} \quad (24)$$

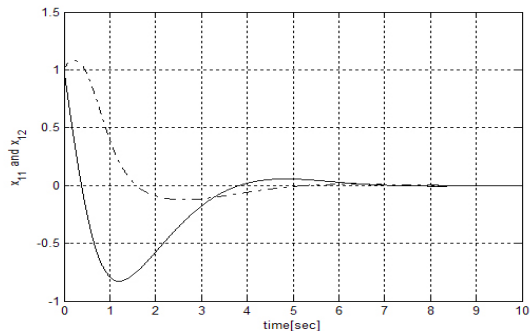
식 (24)에 정리 1을 적용하면, 출력 궤환 제어기의 이득은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K_{11} &= 0.4963 + 0.1181x_{11}^2 + 0.1402x_{12}^2 \\ K_{12} &= 0.0412 + 0.1180x_{11}^2 + 0.1402x_{12}^2 \\ K_{21} &= 4.515 + 1.336x_{21}^2 \end{aligned}$$

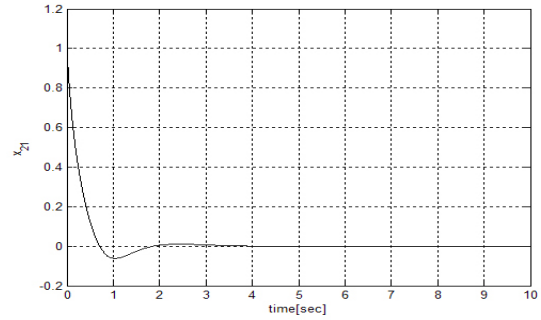
그림 1은 대규모 시스템 (22)의 상태 응답 그래프를 나타낸다. 그림에서 각 시스템의 상태가 시간이 지날수록 0으로 수렴하는 것을 알 수 있다. 따라서 본 논문에서 제안된 다항식 퍼지 대규모 시스템을 안정화 시키는 출력 궤환 제어기 설계 기법이 적합하다는 것을 알 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 대규모 비선형 시스템을 다항식 퍼지 대규모 시스템으로 모델링 한 후, 그에 적합한 출력 궤환 제어기를 설계하는 방법을 제안하였다. 다항식 Lyapunov 함수에 의해 페루프 시스템의 안정화 조건은 제곱합 조건으로 주어졌다. 주어진 제곱합 조건은 컴퓨터 프로그램에 의해 수치해석적인 기법으로 쉽게 해석이 가능하다. 구해진 제곱합 조건에 의해 시스템을 안정화 시키는 출력 궤환 제어기의 이득을 구했다. 제안된 기법의 타당성을 검증하고자 시뮬레이션 예제를 수행하였다.



(a)



(b)

그림 1. 페루프 시스템 (22)의 상태 응답 그래프. (a) 부분 시스템 1 (x_{11} 단선, x_{12} 점선)의 상태 응답 그래프, (b) 부분 시스템 2 (x_{21})의 상태 응답 그래프

Fig. 1. State responses of the closed-loop system (22). (a) State response of the sub-system 1 (x_{11} solid line, x_{12} dotted line). (b) State response of the sub-system 2 (x_{21}).

참고 문헌

- [1] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," *IEEE Trans. Syst., Man, and Cybern.*, Vol. SMC-15, No. 1, pp. 116-132, 1985
- [2] K. Tanaka and H. O. Wang, "Fuzzy control systems design and analysis," New York: Wiley, 2001
- [3] C. S. Tseng, " H^∞ decentralized fuzzy model reference tracking control design for nonlinear interconnected systems," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, Vol. 9, No. 6, pp. 795-809, 2001
- [4] G. B. Koo, J. B. Park, Y. H. Joo, and S. J. Kim, "Decentralized fuzzy controller for nonlinear interconnected systems with missing measurements," *Fuzzy systems, FUZZ-IEEE 2009. IEEE International Conference on.*, pp. 240-244, 2009
- [5] K. Tanaka, H. Yoshida, H. Ohtake, and H. O. Wang, "A Sum-of-squares approach to modeling and control of nonlinear dynamical systems with polynomial fuzzy systems," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, Vol. 17, No. 4, pp. 911-922, 2009
- [6] A. Sala and C. Ario, "Polynomial fuzzy models for nonlinear control: a Taylor series approach," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, Vol. 17, No. 6, pp. 1284-1295, 2009
- [7] M. Narimani and H. K. Lam, "SOS-based stability analysis of polynomial fuzzy-model-based control systems via polynomial membership functions," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, Vol. 18, No. 5, pp. 862-871, 2010
- [8] S. Prajna, A. Parachristodoulou, P. Seiler, and P. A. Parrilo, "SOSTOOLS: sum-of squares optimization toolbox for MATLAB," California Inst. Technol.,

Pasadena, 2009

- [9] J. F. Sturm, "Using SEDUMI 1.02, a Matlab toolbox for optimizations over symmetric cones," *Optimization Meth. Software*, Vol. 11-12, pp. 625-653, 1999
- [10] H. K. Khalil, "*Nonlinear Systems*," Macmillan Co., New York, 1992
-

저 자 소 개



김 한 솔 (Han Sol Kim)

2011년: 한양대학교 전자컴퓨터공학부 졸업.
(공학사)
2011년~현재: 연세대학교 전기전자공학과 석사과정

관심분야 : 지능제어, 지능형 로봇, 인간-로봇 상호작용
Phone : 02-2123-2773
Fax : 02-362-4539
E-mail : solsol@yonsei.ac.kr



주 영 훈 (Young Hoon Joo)

2011년 21권 3호 참조



박 진 배 (Jin Bae Park)

2011년 21권 3호 참조