논문 2011-48SC-5-9

이산 불확실 특이시스템의 변수종속 차수축소 강인 H_∞ 필터링

(Reduced-order Parameter-dependent Robust H_∞ Filtering for Discrete Uncertain Singular Systems)

김 종 해*

(Jong Hae Kim)

요 약

본 논문에서는 폴리토픽 불확실성을 가지는 이산시간 변수종속 특이시스템에 대한 저차(low order)의 변수종속 차수축소 강인 H_∞ 필터 설계기법을 제안한다. 먼저, 변수종속 특이시스템에 대한 유계 실수정리(bounded real lemma)를 변수종속 리아푸노프 (Lyapunov) 함수로부터 유도한다. 유계 실수정리로부터 폴리토픽 기법과 새로운 차수축소 기법을 이용하여 저차의 강인 H_∞ 필터 설계방법을 볼록최적화가 가능한 선형행렬부등식 접근방법을 이용하여 제시한다. 따라서 제안하는 변수종속 차수축소 강인 H_∞ 필터 설계방법은 미리 정한 차수의 H_∞ 필터를 제공한다. 수치예제를 통하여 제시한 저차의 필터 설계방법의 타당성을 보인다.

Abstract

In this paper, we present a reduced-order parameter-dependent robust H_∞ filter design method for discrete-time singular systems with polytopic uncertainties. A BRL(bounded real lemma) for parameter-dependent singular systems is derived from a parameter-dependent Lyapunov function. On the basis of the obtained BRL, low order robust H_∞ filter design method is presented by polytopic approach, new reduced-order method, and LMI(linear matrix inequality) technique. Finally, a numerical example is presented to illustrated the feasibility of the proposed method.

Keywords : Reduced-order filter, H_∞ filter, parameter-dependence, discrete singular systems, LMI

I. 서 론

제어시스템이나 신호처리에서의 근본적인 문제중의 하나가 동적 시스템의 추정(estimation) 문제이다. 이러한 추정문제에서 가장 각광받은 필터 설계방법이 칼만 필터이다[1]. 칼만 필터는 외부 잡음의 형태를 알고 있다는 가정하에서 설계하고 있으므로 시스템 모델에 불확실성이 존재하는 경우에는 적용하기 힘들다는 단점이 있다. 필터설계에 불확실성을 다루고 강인성을 가지기 위하여 필터링 오차 시스템이 미리 설정한 값보다 작은 H_∞ 노옴(norm)을 가지도록 설계하는 강인 H_∞ 필터[2-6]에 대한 연구결과들이 나오고 있다.

상태공간 모델은 매우 유용하지만 상태 변수가 모든 물리적 의미를 포함하지는 못한다. 따라서, 특이 현상은 선형 동적시스템의 자연스러운 형태이고, 물리적 변수들 사이에 존재하는 대수 제약조건을 표현하는 이론적인 면이나 실용적인 면의 관점에서 동적 시스템의 중요한 종류중의 하나이다[7,8]. 또한, 기존의 상태공간 모델을 가지고는 해결하기 어려운 특이시스템에 대한 해석과 설계방법은 특이시스템의 특별한 성질로 인하여 전기회로, 전력시스템, 대규모 시스템, 특이 섭동이론, 제약적 기계시스템 등에 광범위하게 적용되어지기 때문에 최근 특이시스템에 대한 필터링 문제의 연구가 활발히 진행

* 정회원, 선문대학교 전자공학과
(Department of Electronic Eng., Sun Moon University)
접수일자: 2011년5월6일, 수정완료일: 2011년7월21일

되고 있다.

한편, 주어진 시스템의 차수보다 작은 차수축소 필터의 설계문제에 대한 연구가 활발히 진행되어 왔다. 특별히 행렬부등식 접근방법을 이용하는 필터 설계방법은 Grigoriadis 등[9]이 제시하였다. 선형행렬부등식과 연결된 비볼록 계수(non-convex rank) 제약조건을 이용하여 차수축소 H_∞ 필터링 문제를 다루었지만 필터가 존재할 조건이 비선형행렬부등식으로 주어졌기 때문에 해를 구하기 쉽지 않았다. Rawson 등[10]은 비선형 이산시간 시변 시스템에 대한 차수축소 H_∞ 필터 설계 기법을 비선형 차분방정식의 해를 구하는 과정을 통하여 제시하였다. 이러한 차수축소 필터 설계기법은 Xu와 Chen[11]이 확률(stochastic) 시스템으로 확장하였다. Darouach 등[12]과 Syrmos[13]은 특이시스템에 대한 차수축소 강인 관측기 설계방법을 각각 제시하였다. 그러나 H_∞ 성능을 다루지 않았다. 이러한 성능지수를 고려한 Xu와 Lam[14]은 연속시간과 이산시간 특이시스템에 대하여 필터링 오차 특이시스템이 정규적(regular)이고 코잘(causal) 및 안정성을 만족하는 차수축소 H_∞ 필터 설계 알고리듬을 제시하였다. 제안하는 필터 설계 알고리듬은 비특이시스템의 차수축소 필터 설계방법을 제안한 Grigoriadis 등[9]의 결과를 특이시스템으로 확장하였다. 하지만, 비선형행렬부등식으로 주어지는 필터의 존재조건 때문에 해를 구하기 위한 제약조건이 있다.

따라서, 본 논문에서는 저차의 차수를 가지는 차수축소 강인 H_∞ 필터를 설계하기 위해서 새로운 변수를 도입한다. 필터의 차수를 미리 설정하면 한 번에 저차의 강인 H_∞ 필터를 쉽게 설계할 수 있는 있는 알고리듬을 제시한다. 또한 다루는 시스템도 변수종속 특이시스템으로 확장하여 기존의 특이시스템의 필터 설계문제도 포함하는 일반적인 알고리듬을 제시하고자 한다. 제안하는 필터 설계 알고리듬은 기존의 차수축소 기법과는 달리 간단한 변수의 설정만으로 구할 수 있다는 장점이 있다.

본 논문에서 사용하는 표기는 일반적인 기호를 사용한다. I, 0과 $\boldsymbol{R}^r$은 적절한 차원을 가지는 단위행렬, 영행렬과 $r\times 1$ 차원을 가지는 실수 벡터를 각각 의미한다. $X_{(n\times n)}$는 X가 $n\times n$ 차원을 가지는 행렬이고, $*$는 대칭행렬(symmetric matrix)의 주 대각선 아래에 놓이는 요소이다. 그리고 $\langle X\rangle$는 $X+X^T$를 의미하고 $diag()$은 블록 대각행렬이다.

Ⅱ. 문제 설정

이산시간 변수종속 불확실 특이시스템

$$\begin{aligned} &Ex(k+1)=A(\theta)x(k)+B(\theta)w(k)\\ &y(k)=C(\theta)x(k)+D(\theta)w(k)\\ &z(k)=L(\theta)x(k)\end{aligned} \tag{1}$$

을 다룬다. 여기서, $x(k)\in\boldsymbol{R}^n$는 상태변수, $y(k)\in\boldsymbol{R}^m$는 측정 출력, $z(k)\in\boldsymbol{R}^p$는 측정신호, $w(k)\in\boldsymbol{R}^q$는 $l_2[0,\infty)$에 속하는 외란입력신호, E는 $rank(E)=r\le n$을 만족하는 특이행렬이고, 모든 시스템 행렬은 적절한 차원을 가진다. θ는 시불변이고, 시스템 행렬은 모르지만

$$\begin{aligned} &\Omega(\theta)=(A(\theta),B(\theta),C(\theta),D(\theta),L(\theta))\in\Delta\\ &\Delta=\left\{\Omega(\theta):\ \Omega(\theta)=\sum_{i=1}^{N}\theta_i\Omega_i;\ \sum_{i=1}^{N}\theta_i=1,\ \theta_i\ge 0\right\}\end{aligned} \tag{2}$$

와 같이 N개의 꼭지점(vertices)에 의하여 표현되는 볼록 유한 다면 정의역(polyhedral domain)에 속한다고 가정한다. 여기서, $\Omega_i=(A_i,B_i,C_i,D_i,L_i)$이다.

본 논문의 목적은 변수종속 불확실 특이시스템 (1)을 위한 $z(k)$를 추정하는 차수축소 강인 H_∞ 필터인

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1)&=A_r(\theta)\hat{x}(k)+B_r(\theta)y(k)\\ \hat{z}(k)&=C_r(\theta)\hat{x}(k)+D_r(\theta)y(k)\end{aligned} \tag{3}$$

을 설계하는 것이다. 여기서, $\hat{x}(k)\in\boldsymbol{R}^{\hat{n}}(0\le\hat{n}\le n)$는 필터 상태변수이고 $\hat{z}(k)\in\boldsymbol{R}^p$는 $z(k)$의 추정치이다. 또한, $A_r(\theta)_{(\hat{n}\times\hat{n})}$, $B_r(\theta)_{(\hat{n}\times q)}$, $C_r(\theta)_{(p\times\hat{n})}$와 $D_r(\theta)_{(p\times q)}$는 결정해야 할 필터변수이다.

참조 1. 주어진 시스템보다 저차의 차수($\hat{n}\le n$)를 가지는 변수종속 강인 H_∞ 필터 (3)에서, $\hat{n}<n$이면 미리 정한 $\hat{n}$ 차수를 가지는 필터를 설계할 수 있으며, $n=\hat{n}$이면 완전 차수(full-order) H_∞ 필터가 된다. 또한, $A_r(\theta)=0$, $B_r(\theta)=0$, $C_r(\theta)=0$가 되면, 필터 (3)은 $\hat{z}(k)=D_r(\theta)y(k)$와 같이 영의 차수(zero-order)를 가지는 정적 필터(static filter)가 된다. 따라서, 미리 설정한 차수를 가지는 저차의 변수종속 강인 H_∞ 필터를 쉽게 설계하도록 하는 것이 본 논문의 목적중의 하나이다.

정의 1.[7] 특이시스템 $Ex(k+1)=Ax(k)$에 대하여, $\det(zE-A)$이 항등적으로 영이 아니면 정규적(regular)이라 정의하고 $rank(E)=\deg(\det(zE-A))$이면 코잘(causal)이라 한다. 정규적이고 $\det(zE-A)=0$의 모든

근이 단위원내에 존재하면 안정하다고 정의한다.

보조 상태벡터를 $\tilde{x}(k)=[x(k)^T \quad \hat{x}(k)^T]^T$로 두고, 추정 오차를 $\tilde{z}(k)=z(k)-\hat{z}(k)$로 정의하면, 필터링 오차 특이시스템은

$$\begin{aligned}\tilde{E}\tilde{x}(k+1) &= \tilde{A}_\theta\tilde{x}(k)+\tilde{B}_\theta w(k)\\ \tilde{z}(k) &= \tilde{C}_\theta\tilde{x}(k)+\tilde{D}_\theta w(k)\end{aligned} \tag{4}$$

와 같고, 여기서 변수들은

$$\tilde{E}=\begin{bmatrix}E & 0\\ 0 & I\end{bmatrix},\quad \tilde{A}_\theta=\begin{bmatrix}A(\theta) & 0\\ B_r(\theta)C(\theta) & A_r(\theta)\end{bmatrix},\quad \tilde{B}_\theta=\begin{bmatrix}B(\theta)\\ B_r(\theta)D(\theta)\end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_\theta=[L(\theta)-D_r(\theta)C(\theta) \quad -C_r(\theta)],\quad \tilde{D}_\theta=-D_r(\theta)D(\theta)$$

으로 정의한다. 식 (3)의 형태를 가지는 차수축소 강인 H_∞ 필터의 목적은 필터링 오차 특이시스템 (4)가 정규적이고 코잘이며 안정하고, $x(t)$의 초기조건이 영인 경우에 대하여 성능지수

$$J_H=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\tilde{z}(k)^T\tilde{z}(k)-\gamma^2 w(k)^T w(k)\right]<0 \tag{5}$$

를 만족하는 것이다.

Ⅲ. 변수종속 차수축소 강인 H_∞ 필터

본 절에서는 필터링 오차 특이시스템이 안정하고 H_∞ 성능지수 (5)를 만족하는 유계 실수정리를 구한다. 그리고 저차의 변수종속 강인 H_∞ 필터가 존재할 조건과 변수종속 차수축소 필터 설계방법을 구하고자 하는 모든 변수의 측면에서 볼록최적화(convex optimization)가 가능한 선형행렬부등식으로 나타낸다. 정리 1에서는 필터링 오차 특이시스템 (4)에 대한 유계 실수정리를 제안하고, 정리 2에서는 변수종속 차수축소 강인 H_∞ 필터 설계방법을 제시한다.

정리 1. 주어진 $\gamma>0$에 대하여, 변수종속 필터링 오차 특이시스템 (4)가 정규적이고 코잘이며 안정하고 식 (5)의 성능지수를 만족하기 위해서는 아래의 행렬부등식

$$\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}<\tilde{A}_\theta^T\tilde{R}\tilde{Z}(\theta)^T>\\ -\tilde{E}^TP(\theta)\tilde{E}\end{pmatrix} & \tilde{Z}(\theta)\tilde{R}^T\tilde{B}_\theta^T & \tilde{C}_\theta & \tilde{A}_\theta^TP(\theta)\\ * & -\gamma^2 I & \tilde{D}_\theta^T & \tilde{B}_\theta^TP(\theta)\\ * & * & -I & 0\\ * & * & * & -P(\theta)\end{bmatrix}<0 \tag{6}$$

을 만족하는 양의 정부호 행렬(positive-definite matrices) $P(\theta)$와 행렬 $\tilde{Z}(\theta)$가 존재하는 것이다. 여기서, $\tilde{R}$는 $\tilde{E}^T\tilde{R}=0$을 만족하는 행렬이다.

증명: 선형행렬부등식 (6)은

$$\begin{bmatrix}<\tilde{A}_\theta^T\tilde{R}\tilde{Z}(\theta)^T>-\tilde{E}^TP(\theta)\tilde{E} & \tilde{A}_\theta^TP(\theta)\\ * & -P(\theta)\end{bmatrix}<0 \tag{7}$$

을 의미한다. 또한, 식 (7)은 Xu와 Lam[15]의 정리 1과 유사한 증명과정을 통하여 정규적이고 코잘 및 안정성을 보일 수 있다. 식 (2)를 만족하는 불확실 변수 θ에 대하여, 적절한 리아푸노프 함수(Lyapunov function)를

$$V(\tilde{x}(k))=\tilde{x}(k)^T\tilde{E}^TP(\theta)\tilde{E}\tilde{x}(k) \tag{8}$$

과 같이 설정하고 $V(\tilde{x}(k))$의 전방향 차분(forward difference)을 구하면

$$\begin{aligned}\Delta V(\tilde{x}(k)) &= V(\tilde{x}(k+1))-V(\tilde{x}(k))\\ &=(\tilde{A}_\theta\tilde{x}(k)+\tilde{B}_\theta w(k))^TP(\theta)(\tilde{A}_\theta\tilde{x}(k)+\tilde{B}_\theta w(k))\\ &\quad-\tilde{x}(k)^T\tilde{E}^TP(\theta)\tilde{E}\tilde{x}(k)\end{aligned} \tag{9}$$

이다. 또한 $\tilde{E}^T\tilde{R}=0$이므로

$$2\tilde{x}(k+1)^T\tilde{E}^T\tilde{R}Z(\theta)^T=0 \tag{10}$$

이 된다. 또한, $\tilde{x}(k)$의 초기조건이 영이면

$$\begin{aligned}J_H &\le \sum_{k=0}^{\infty}\left[\tilde{z}(k)^T\tilde{z}(k)-\gamma^2w(k)^Tw(k)\right]+V(x(\infty))-V(x(0))\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\tilde{z}(k)^T\tilde{z}(k)-\gamma^2w(k)^Tw(k)+\Delta V(x(k))\right]\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}\tilde{x}(k)\\ w(k)\end{bmatrix}^T\Xi\begin{bmatrix}\tilde{x}(k)\\ w(k)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{11}$$

과 같다. 여기서, 변수 Ξ는

$$\Xi=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}<\tilde{A}_\theta^T\tilde{R}\tilde{Z}(\theta)^T>\\ -\tilde{E}^TP(\theta)\tilde{E}\\ +\tilde{A}_\theta^TP(\theta)\tilde{A}_\theta+\tilde{C}_\theta^T\tilde{C}_\theta\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\tilde{Z}(\theta)\tilde{R}^T\tilde{B}_\theta\\ +\tilde{A}_\theta^TP(\theta)\tilde{B}_\theta\\ +\tilde{C}_\theta^T\tilde{D}_\theta\end{pmatrix}\\ * & -\gamma^2I+\tilde{B}_\theta^TP(\theta)\tilde{B}_\theta+\tilde{D}_\theta^T\tilde{D}_\theta\end{bmatrix}$$

로 정의한다. 슈어 여수정리(Schur complement)[16]를 이용하면 식 (6)은 $\Xi<0$과 $J_H<0$을 보장한다. ■

제안한 정리 1은 불확실 변수 θ에 대하여 비선형행렬부등식으로 표현된다. 따라서 정리 2에서는 모든 변수

의 측면에서 볼록최적화가 가능한 선형행렬부등식으로 변형하고 차수축소를 위한 새로운 변수를 소개하여 본 논문의 목적인 새로운 차수축소 강인 H_∞ 필터 설계기법을 제시한다. 즉, 무한 차원(infinite dimensional) 행렬부등식 조건 (6)을 폴리토픽(polytopic) 접근방법을 이용하여 유한 차원(finite dimensional) 선형행렬부등식 조건으로 변형하고 차수축소 강인 H_∞ 필터가 존재할 조건을 모든 변수의 측면에서 선형행렬부등식으로 표현하고자 한다.

정리 2. 변수 불확실성 특이시스템 (4)에 대하여, 아래의 선형행렬부등식

$$\text{(i)}\quad \Phi_{ii}-\Lambda_{ii}<0,\quad 1\le i\le N \tag{12}$$

$$\text{(ii)}\quad \Phi_{ij}+\Phi_{ji}-\Lambda_{ij}-\Lambda_{ij}^T<0,\quad 1\le i<j\le N \tag{13}$$

$$\text{(iii)}\quad \Lambda=\begin{bmatrix}\Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \cdots & \Lambda_{1N}\\ * & \Lambda_{22} & \cdots & \Lambda_{2N}\\ * & * & \ddots & \vdots\\ * & * & * & \Lambda_{NN}\end{bmatrix}<0 \tag{14}$$

를 만족하는 양의 정부호 행렬 $P_{1i(n\times n)}$, $P_{2i(n\times \hat{n})}$, $P_{3i(\hat{n}\times \hat{n})}$, 양의 상수 ρ, 행렬 $F_{1(\hat{n}\times n)}$, $F_{2(\hat{n}\times \hat{n})}$, $X_{1(n\times n)}$, $Z_{i(n\times \hat{n})}$, $\overline{A}_{ri(\hat{n}\times \hat{n})}$, $\overline{B}_{ri(\hat{n}\times q)}$, $\overline{C}_{ri(p\times \hat{n})}$, $\overline{D}_{ri(p\times q)}$와 Λ_{ij}가 존재하면, 변수종속 특이시스템이 정규적, 코잘, 안정성 및 H_∞ 성능지수 (5)를 만족하는 저차의 차수($\hat{n}\le n$)를 가지는 변수종속 강인 H_∞ 필터를

$$A_{ri}=\overline{A}_{ri}F_2^{-1},\ B_{ri}=\overline{B}_{ri},\ C_{ri}=\overline{C_{ri}}F_2^{-1},\ D_{ri}=\overline{D_{ri}} \tag{15}$$

로부터 구할 수 있다. 여기서, $R\in \boldsymbol{R}^{n\times \hat{n}}$는 $rank(R)=n-r$과 $E^TR=0$을 만족하고 $\rho=\gamma^2$이며 Φ_{ij}는 아래와 같이 정의한다.

$$\Phi_{ij}=\begin{bmatrix}\Psi_1 & \Psi_2\\ * & \Psi_3\end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\Psi_1=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}<A_j^TRZ_i^T>\\ -E^TP_{1i}E\end{pmatrix}-E^TP_{2i} & Z_iR^TB_j & L_j^T-C_j^T\overline{D}_{ri}^T\\ * & -P_{3i} & 0 & -\overline{C}_{ri}^T\\ * & * & -\rho I & -D_j^T\overline{D}_{ri}^T\\ * & * & * & -I\end{bmatrix}$$

$$\Psi_2=\begin{bmatrix}A_j^TX_1^T+C_j^T\overline{B}_{ri}^T\Gamma^T & A_j^TF_1^T+C_j^T\overline{B}_{ri}^T\\ \overline{A}_{ri}^T\Gamma^T & \overline{A}_{ri}^T\\ B_j^TX_1^T+D_j^T\overline{B}_{ri}^T\Gamma^T & B_j^TF_1^T+D_j^T\overline{B}_{ri}^T\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Psi_3=\begin{bmatrix}P_{1i}-<X_1> & P_{2i}-F_1^T-\Gamma F_2\\ * & P_{3i}-<F_2>\end{bmatrix}.$$

증명: 차수축소를 위한 중요한 변수 설정과 보수성(conservatism)을 줄이기 위하여 Oliverira 등[17]이 사용한 슬랙변수(slack variable) H를 이용하면 식 (6)은

$$\overline{\Phi}(\theta)=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}<\widetilde{A_\theta}^T\widetilde{R}\widetilde{Z}(\theta)^T>\\ -\widetilde{E}^TP(\theta)\widetilde{E}\end{pmatrix} & \widetilde{Z}(\theta)\widetilde{R}^T\widetilde{B_\theta}^T & \widetilde{C}_\theta & \widetilde{A_\theta}^TH\\ * & -\gamma^2I & \widetilde{D_\theta}^T & \widetilde{B_\theta}^TH\\ * & * & -I & 0\\ * & * & * & P(\theta)-<H>\end{bmatrix}<0 \tag{17}$$

과 같다. 여기서, 슬랙변수 H를

$$H=\begin{bmatrix}X_1 & \Gamma X_2\\ X_3 & X_4\end{bmatrix},\ \Gamma=\begin{bmatrix}I_{(\hat{n}\times\hat{n})}\\ 0_{((n-\hat{n})\times\hat{n})}\end{bmatrix} \tag{18}$$

로 정의한다. 여기서, 변수들의 차원은 $X_{1(n\times n)}$, $\Gamma_{(n\times\hat{n})}$, $X_{2(\hat{n}\times\hat{n})}$, $X_{3(\hat{n}\times n)}$, $X_{4(\hat{n}\times\hat{n})}$과 같다. 행렬부등식 (17)로부터 $H+H^T>0$임을 알 수 있다. 따라서 $X_4+X_4^T>0$이고 X_4는 역행렬이 존재한다. 변수들을

$$J=\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & X_2X_4^{-1}\end{bmatrix},\ F_1=X_2X_4^{-1}X_3,\ F_2=X_2X_4^{-T}X_2^T \tag{19}$$

$$\begin{bmatrix}P_1(\theta) & P_2(\theta)\\ * & P_4(\theta)\end{bmatrix}=JP(\theta)J^T,\ \widetilde{R}=\begin{bmatrix}R & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \widetilde{Z}(\theta)=\begin{bmatrix}Z(\theta) & I\\ 0 & I\end{bmatrix}$$

로 정의하고, 필터변수들을 포함한 새로운 필터변수를

$$\overline{A}_r(\theta)=X_2A_r(\theta)X_4^{-T}X_2^T,\quad \overline{B}_r(\theta)=X_2B_r(\theta) \tag{20}$$

$$\overline{C}_r(\theta)=C_r(\theta)X_4^{-T}X_2^T,\quad \overline{D}_r(\theta)=D_r(\theta)$$

으로 두고 $V=diag(J,I,I,J)$를 이용하여 식 (19)와 (20)의 변수 및 식 (17)의 합동변환(congruence transformation)을 아래와 같이 하면

$$V\overline{\Phi}(\theta)V^T=\widetilde{\Phi}(\theta) \tag{21}$$

로 된다. 여기서, $\widetilde{\Phi}(\theta)$는 아래와 같다.

$$\widetilde{\Phi}(\theta)=\begin{bmatrix}\widetilde{\Phi}_1(\theta) & \widetilde{\Phi}_2(\theta)\\ * & \widetilde{\Phi}_3(\theta)\end{bmatrix} \tag{22}$$

$$\widetilde{\Phi}_1(\theta) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} < A(\theta)^T R Z(\theta)^{R>} \\ - E^T P_1(\theta) E \end{pmatrix} - E^T P_2(\theta) & Z(\theta) R^T B(\theta) & L(\theta)^T - C(\theta)^T \overline{D_r}(\theta)^T \\ * & -P_3(\theta) & 0 & -\overline{C_r}(\theta)^T \\ * & * & -\rho I & -D(\theta)^T \overline{D_r}(\theta)^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\Phi}_2(\theta) = \begin{bmatrix} A(\theta)^T X_1^T + C(\theta)^T \overline{B_r}(\theta)^T \Gamma^T & A(\theta)^T F_1^T + C(\theta)^T \overline{B_r}(\theta)^T \\ \overline{A_r}(\theta)^T \Gamma^T & \overline{A_r}(\theta)^T \\ B(\theta)^T X_1^T + D(\theta)^T \overline{B_r}(\theta)^T \Gamma^T & B(\theta)^T F_1^T + D(\theta)^T \overline{B_r}(\theta)^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\Phi}_3(\theta) = \begin{bmatrix} P_1(\theta) - < X_1 > & P_2(\theta) - F_1^T - \Gamma F_2 \\ * & P_3(\theta) - < F_2 > \end{bmatrix}.$$

무한차원을 가지는 행렬부등식 (22)를 유한차원을 가지는 선형행렬부등식으로 변형하기 위하여 Gao 등[18]이 사용한 전개방법과 유사하게 이용하면

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi}(\theta) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\theta_i\theta_j\Phi_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{s}\theta_i^2\Phi_{ii} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\theta_i\theta_j(\Phi_{ij}+\Phi_{ji}) \\ &\le \sum_{i=1}^{N}\theta_i^2\Lambda_{ii} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\theta_i\theta_j(\Lambda_{ij}+\Lambda_{ij}^T) = \nu^T\Lambda\nu \end{aligned} \tag{23}$$

을 얻고, $\zeta = [\theta_1 I \quad \theta_2 I \quad \cdots \quad \theta_N I]^T$이다. 따라서 $\widetilde{\Phi}(\theta) < 0$은 식 (12)-(14)를 보장하고 필터 변수인 식 (20)은 식 (15)에 의하여 구할 수 있다. ■

참조 2. 정리 2에서 저차의 차수축소 필터를 설계를 위한 Γ의 설정이 매우 중요하다. $n=\hat{n}$인 $\Gamma = I_{(n\times n)}$로 설정하면 정리 2의 차수축소 H_∞ 필터는 완전 차수(full order) 필터를 설계할 수 있다. 또한, $\hat{n}(<n)$의 선택에 따라 저차의 필터를 정리 2에서 직접 설계 가능하다. 또한, 구하려는 변수의 견지에서 필터가 존재할 조건인 정리 2에서 최소의 H_∞ 노옴을 구하기 위해서는

$$\textit{minimize } \rho \textit{ subject to LMI } (12)\text{-}(14) \tag{24}$$

와 같은 최적화 문제로 변경할 수 있다. 또한, 정리 2에서 변수종속 필터가 아닌 공통 필터(common filter)를 얻기 위해서는 식 (3)의 필터 형태를

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A_r\hat{x}(k) + B_r y(k) \\ \hat{z}(k) &= C_r\hat{x}(k) + D_r y(k) \end{aligned} \tag{25}$$

으로 두면 직접 얻을 수 있다. 또한, 시스템 행렬이 변수종속이 아니라 실수 행렬이면, 즉 $A(\theta)$, $B(\theta)$, $C(\theta)$, $D(\theta)$와 $L(\theta)$가 θ의 함수가 아닌 상수 행렬일 경우에, 식 (16)의 선형행렬부등식 조건으로부터 직접 차수축소 H_∞ 필터를 설계할 수 있다.

Ⅳ. 예 제

제안한 변수 종속 특이시스템에 대한 차수축소 변수종속 강인 H_∞ 필터 설계 알고리듬인 정리 2의 타당성을 보여주기 위하여 Zhang 등[18]의 비특이시스템 예제에서 특이시스템 행렬을 가지며 2개의 꼭지점(vertices)을 가지는 불확실 특이시스템으로 변형한

$$\begin{aligned} &E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 1+\delta \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &C = [-100 \quad 10],\ D = [0 \quad 1],\ L = [1 \quad 0] \end{aligned} \tag{26}$$

을 다룬다. 여기서, $|\delta| \le 0.45$일 때, $E^T R = 0$을 만족하는 행렬 R은 완전차수인 2차 필터를 위해서 $R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$으로, 1차 필터를 위해서는 $R = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$와 같이 잡을 수 있다. 최소의 H_∞ 노옴을 구하기 위해서 식 (24)를 이용하면, 변수종속 2차 강인 H_∞ 필터($\hat{n}=2$)와 H_∞ 노옴은

$$\begin{aligned} &A_{r1} = \begin{bmatrix} 0.0324 & 0.0000 \\ 0.1834 & 0.0000 \end{bmatrix},\ A_{r2} = \begin{bmatrix} -0.0001 & -0.0000 \\ 0.0142 & 0.0000 \end{bmatrix} \\ &B_{r1} = 10^{-10} \times \begin{bmatrix} 0.0876 \\ 0.5259 \end{bmatrix},\ B_{r2} = 10^{-10} \times \begin{bmatrix} 0.0440 \\ 0.3803 \end{bmatrix} \\ &C_{r1} = [0.3112 \quad 0.0000],\ C_{r2} = [-1.3192 \quad -0.0002] \\ &D_{r1} = -0.0085,\ D_{r2} = -0.0094,\ \gamma = 0.15407 \end{aligned} \tag{27}$$

이고, 변수종속 1차 강인 H_∞ 필터($\hat{n}=1$)와 H_∞ 노옴은

$$\begin{aligned} &A_{r1} = 0.0134,\ A_{r2} = -0.0036,\ B_{r1} = 1.2873 \times 10^{-10} \\ &B_{r2} = 5.8816 \times 10^{-11},\ C_{r1} = -0.1782,\ C_{r2} = -7.9037 \end{aligned} \tag{28}$$

$D_{r1} = -0.0085,\ D_{r2} = -0.0094,\ \gamma = 0.15408$

이며, 영의 차수를 가지는 정적필터와 H_∞ 노옴은

$$D_{r1} = -0.0085,\ D_{r2} = -0.0094,\ \gamma = 0.15410 \tag{29}$$

로 구해진다. 필터의 차수가 작아지면 γ의 값은 커짐을 알 수 있다. 참조 2에서 언급한 식 (25)와 같은 공통 필터를 이용하면, 2차 강인 H_∞ 필터($\hat{n}=2$)와 H_∞ 노옴은

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} -0.0680 - 0.0000 \\ -0.4083 - 0.0000 \end{bmatrix}\hat{x}(k) + 10^{-3}\begin{bmatrix} 0.0835 \\ 0.5011 \end{bmatrix} y(k) \\ \hat{z}(k) &= [-8.3220 \quad 0.0000]\hat{x}(k) - 0.0079 y(k) \\ \gamma &= 0.9242 \end{aligned} \tag{30}$$

이고, 1차 H_∞ 필터($\hat{n}=1$)와 H_∞ 노옴은

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= -0.0680\hat{x}(k)+8.3639\times10^{-5}y(k)\\ \hat{z}(k) &= -8.3026\hat{x}(k)-0.0079y(k)\\ \gamma &= 0.9244\end{aligned} \tag{31}$$

이며, 영의 차수를 가지는 정적필터와 H_∞ 노옴은

$$\begin{aligned}\hat{z}(k) &= -0.0086y(k)\\ \gamma &= 1.0003\end{aligned} \tag{32}$$

와 같다. 표 1에서 알 수 있듯이 γ의 값이 공통 필터보다 변수종속 필터에서 훨씬 작은 값을 가지므로 변수종속 필터의 H_∞ 성능이 우수함을 알 수 있고, 저차의 필터가 될수록 H_∞ 노옴은 커짐을 알 수 있다. 따라서, 제안한 필터 설계 알고리듬은 $\hat{n}(<n)$을 설정하면 저차의 강인 H_∞ 필터를 설계 가능할 뿐 아니라 영차의 정적 H_∞ 필터도 설계할 수 있다.

V. 결 론

본 논문에서는 불확실성을 가지는 변수종속 특이시스템에 대한 저차의 차수를 가지는 차수축소 변수종속 H_∞ 필터 설계기법을 모든 변수의 견지에서 볼록최적화가 가능한 선형행렬부등식 접근방법을 이용하여 제안하였다. 저차의 강인 H_∞ 필터를 설계하기 위하여 필터의 차수를 미리 선정하면, 선정한 차수의 강인 H_∞ 필터를 구할 수 있었다. 기존 방법의 복잡한 수식과정을 없애기 위하여 간단한 변수를 도입하였고, 또한 영의 차수를 가지는 정적 H_∞ 필터 설계도 가능하였다. 마지막으로 예제를 통하여 제안한 필터의 설계 알고리듬의 타당성을 확인하였다.

표 1. 차수에 따른 공통필터와 변수종속 필터의 γ 값
Table 1. The values of γ in common filters and parameter-dependent filters according to the selected orders.

형태 / 차수	공통 필터	변수종속 필터
2	0.9242	0.15407
1	0.9244	0.15408
0	1.0003	0.15410

참 고 문 헌

[1] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Optimal Filtering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1979.
[2] A. Elsayed and M. Grimble, "A new approach to H_∞ design for optimal digital linear filters," *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, vol. 6, pp. 233-251, 1989.
[3] H. Gao, J. Lam, P. Shi, and C. Wang, "New approach to mixed H_2/H_∞ filtering for polytopic discrete-time systems," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52, pp. 1631-1640, 2004.
[4] H. Gao, J. Lam, P. Shi, and C. Wang, "Parameter-dependent filter design with guaranteed H_∞ performance," *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, vol. 152, pp. 531-537, 2005.
[5] Y. Chen, Z. Zhou, C. Zeng, and Q. Zhang, "H_∞ filtering for descriptor systems," *International Journal of Control, Automation, and Systems*, vol. 4, pp. 697-704, 2006.
[6] C. M. Lee and I. K. Fong, "H_∞ optimal singular and normal filter design for uncertain singular systems," *IET Control Theory and Applications*, vol. 1, pp. 119-126, 2007.
[7] L. Dai, *Singular Control Systems*, Berlin, Springer-Verlag, 1989.
[8] S. Xu and J. Lam, *Robust Control and Filtering of Singular Systems*, Berlin, Springer-Verlag, 2006.
[9] K. M. Grigoriadis and J. T. Watson, "Reduced-order H_∞ and L_2-L_∞ filtering via linear matrix inequalities," *IEEE Transactions on Aerospace Electron Systems*, vol. 33, pp. 1326-1338, 1997.
[10] J. L. Rawson, C. S. Hsu, and H. Rho, "Reduced order H_∞ filters for discrete linear systems," *Proceedings of Conference on Decision and Control*, San Diego, CA, USA, pp. 3311-3316, 1997.
[11] S. Xu and T. Chen, "Reduced-order H_∞ filtering for stochastic systems," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, pp. 2998-3007, 2002.
[12] M. Darouach. M. Zasadzinski, and M. Hayar, "Reduced-order observer design for descriptor systems with unknown inputs," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, pp. 1068-1072, 1996.
[13] V L. Syrmos "Observer design for descriptor systems with unmeasurable disturbances," *Proceedings of Conference on Decision and Control*, Tucson, Arizona, USA, pp. 981-982, 1992.
[14] S. Xu and J. Lam, "Reduced-order H_∞ filtering

for singular systems," *Systems and Control Letters*, vol. 56, pp.48-57, 2007.

[15] S. Xu and J. Lam, "Robust stability and stabilization of discrete singular systems: an equivalent characterization," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, pp. 568-574, 2004.

[16] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Philadelphia, PA, SIAM, 1994.

[17] M. C. de Oliverira, J. Bernussou, and C. Geromel, "A new discrete-time robust stability condition," *Systems and Control Letters*, vol. 37, pp. 261-265, 1999.

[18] J. Zhang, Y. Xia, and P. Shi, "Parameter -dependent robust H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems," *Automatica*, vol. 45, pp. 506-565, 2009.

저 자 소 개

김 종 해(정회원)
1993년 경북대학교 전자공학과 졸업.
1995년 경북대학교 대학원 전자공학과 공학석사.
1998년 경북대학교 대학원 전자공학과 공학박사.
1998년~2002년 경북대학교 센서기술연구소 전임연구원.
2000년~2001년 일본 오사카대학 컴퓨터제어기계공학과 객원연구원.
2010년~2011년 미국 조지아텍 방문연구원
2002년~현재 선문대학교 전자공학과 부교수
<주관심분야 : 강인 제어 및 강인 필터링, 특이시스템 해석 및 설계, 산업응용제어, 신호처리 등.>