

유연도 매트릭스를 사용한 기하학적 비선형 해석방법

Geometrically Non-linear Analysis Method by Curvature Based Flexibility Matrix

김진섭¹⁾

권민호^{2)*}

Kim, Jin Sup

Kwon, Min Ho

Abstract

The latest study for formulation of finite element method and computation techniques has progressed widely. The classical method in the formulation of frame elements for geometrically nonlinear analysis derives the geometric stiffness directly from the governing differential equation for bending with axial force. From the computational viewpoint of this paper, the most common approach is the finite element method. Commonly, the formulation of frame elements for geometrically nonlinear structures is based on appropriate interpolation functions for the transverse and axial displacements of the member. The formulation of flexibility-based elements, on the other hand, is based on interpolation functions for the internal forces. In this paper, a new method is used to suppose that interpolation functions for the displacements from the curvatures is Lagrangian interpolation. This paper derives flexibility matrix from that displacement functions and is considered the application of it. Using the flexibility matrix, this paper apply the program considered geometrically nonlinear analysis to common problems.

Keywords : Geometrically nonlinear, Flexibility matrix, Curvature

1. 서론

구조물의 기하학적 비선형 문제를 해석하기 위하여 유한요소의 정식화(Backlund, 1974) 및 전산화(Bathe, 1996) 등에 대하여 최근의 연구들이 광범위하게 진행되고 있다.

일반적으로 기하비선형 구조물에 대한 프레임 요소의 정식화는 횡변위 및 축방향 변위형상함수에 근거하고 있다. 변위형상함수를 기초로 하는 강성도법과는 다르게 유연도법에 의한 유한요소의 정식화는 내력형상함수를 기초로 한다. 내력형상함수는 요소의 길이와 요소의 횡변위의 지배를 받는다. 유연도법을 기반으로 한 공식화는 지배방정식을 구성하는 변위와 변형률의 적합관계로부터 유도된다. 횡변위의 형상을 가정하여 요소의 횡변위를 결정하면, 이 횡변위로부터 변형율을 계산하고, 수치적분을 통하여 유연도 행렬을 유도할 수 있다. 기하비선형을 고려하면 구조물이 변형을 일으킨 상태에서 평형방정식을 만들 수 있고, 변형이 일어난 상태에서의 힘의 평형은 내

력형상함수에 의해 만족된다. 이것은 기하학적 비선형 상태에서 횡방향 변위가 포함된 것을 의미한다. 유연도법을 기반으로 둔 공식화에서는 변위영역의 형상함수가 정해지지 않았기 때문에 본 연구에서는 라그랑지언 보간법에 의한 곡률로부터 횡방향 변위를 유도하는 새로운 방법을 사용하였다.

최근의 유연도법을 이용한 연구들(Spacone, 1996)은 비선형 해석 영역에서 적은 요소로도 전체와 국부 응답에서의 정확한 예측이 가능함을 보여 주었다. 하지만, 이 연구들은 미소변형과 선형으로 가정한 요소평형상태에 기반한 기하학적 선형 구조물에 대한 것들이었다. 그러나 변형후의 요소의 평형상태에 기반한 기하학적 비선형 문제에 대한 학문적 연구는 충분하지 않다. 또한, 유연도법을 이용한 기하비선형 문제를 정식화하기 위한 연구가 이루어지고 있지만, 강성도법을 기반으로 한 비선형 유한요소 해석프로그램에서 구동하기에는 어려움이 있다. 유연도 기반의 유한요소 프로그램을 강성도법의 해석프로그램에서도 구동이 가능하도록 알고리즘 및 프로그램의 개

1) 정회원, 경상대학교 토목공학과 박사과정

2) 교신저자, 정회원, 경상대학교 토목공학과 공학연구원 부교수

* Corresponding author : kwnm@gnu.ac.kr 055-751-5382

• 본 논문에 대한 토의를 2011년 4월 30일까지 학회로 보내주시면 2011년 5월호에 토론결과를 게재하겠습니다.

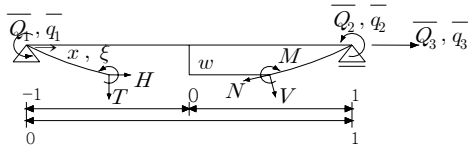


Fig. 1 Equilibrium in deformed configuration

발분야에 대한 학문적 연구가 필요하다.

본 논문의 목적은 Spacone(1996)의 이론을 확장시켜 기하학적 비선형 거동을 예측할 수 있는 유연도법 개발에 있다. 적용대상 구조물은 탄성재료인 선형 평면 프레임 구조물로 제한하였다. 평면구조의 유한요소모델은 Euler-Bernoulli보의 해석이론에 기초를 두고 있으며, Euler-Bernoulli 기본가정에 따라서 전단변형은 무시한다.

2. 기하학적 비선형 유연도법

2.1 지배방정식

본 연구의 기하학적 비선형 해석을 위한 평면구조의 유한요소 모델인 Euler-Bernoulli보의 지배변수는 횡방향 및 축방향 변위이다. 변위행렬 $\mathbf{U}(x)$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{U}(x) = [w(x) \ u(x)]^T \quad (1)$$

여기서, $u(x)$: 축방향 변위
 $w(x)$: 횡방향 변위

모멘트에 의한 변형과 축력에 대한 변형을 고려하여 변형을 행렬 $\mathbf{d}(x)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\mathbf{d}(x) = [\kappa(x) \ \varepsilon(x)]^T$$

$$[\kappa(x) \ \varepsilon(x)]^T = [-w''(x) \ u'(x) + \frac{1}{2}(w'(x))^2]^T \quad (2)$$

여기서, $\varepsilon(x)$: 축방향 변형을
 $\kappa(x)$: 곡률

가상의 축방향 변형률은 축방향 변위의 변분값의 증가량과 횡방향 변위의 변분값과 횡방향 변위의 변분값의 증가량의 곱의 합으로 표현된다. 이 가상의 축방향 변형률

식이 비선형 방정식의 기본식이 된다.

$$\delta \varepsilon = \delta u' + w' \delta w' \quad (3)$$

기하학적 비선형 유연도법의 정식화를 위하여 변형후의 평형상태를 가정하면 Fig. 1과 같다.

절점력 $\bar{\mathbf{Q}}$ 과 절점변위 $\bar{\mathbf{q}}$, 내력행 $\mathbf{D}(x)$ 을 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{Q}} = \{\bar{Q}_1 \ \bar{Q}_2 \ \bar{Q}_3\}^T \quad (4)$$

$$\bar{\mathbf{q}} = \{\bar{q}_1 \ \bar{q}_2 \ \bar{q}_3\}^T \quad (5)$$

$$\mathbf{D}(x) = [M(x) \ N(x)]^T \quad (6)$$

변형후의 평형상태로부터 절점력과 내력행렬과의 관계를 하중형상함수를 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{b}[x, w(x)] \bar{\mathbf{Q}} \quad (7)$$

여기서, $\mathbf{b}[x, w(x)] = \begin{bmatrix} x-1 & x & -w(x) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$:

하중형상함수, $x = (\xi + 1)/2$

전단변형은 무시하였으므로, 전단력은 평형관계로부터 다음과 같이 결정된다.

$$V = -Hw' + T \quad (8)$$

변위에 의존하는 하중보간함수 $\mathbf{b}[x, w(x)]$ 는 이차방정식 형태의 구조해석모델링의 경우에서와 같이 축력은 요소에서 일정하다는 가정을 포함하고 있다. 따라서 식(2)를 만족하는 적합조건식은 다음과 같다.

$$\int_L \delta \mathbf{D}(x) \mathbf{d}(x) dx = 0 \quad (9)$$

Fig. 1에서 강체회전을 제거시킨 프레임 요소는 두 개의 회전변위와 하나의 축변위를 절점변위로 가진다. 이 세 개의 절점변위를 적합조건식인 식(9)에 적용하여 적합방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$\int_L \delta N \left[u'(x) + \frac{1}{2} [w'(x)]^2 - \varepsilon(x) \right] dx = 0 \quad (10)$$

적합방정식에서 경계조건을 만족하는 항별로 적분식을 분리하면, 축력에 대한 변위 \bar{q}_3 에 대한 적합방정식은 다음과 같다.

$$\bar{q}_1 = \int_L (x-1) \kappa(x) dx = 0 \quad (11)$$

$$\bar{q}_2 = \int_L x \kappa(x) dx = 0 \quad (12)$$

$$\bar{q}_3 = \int_L \varepsilon(x) dx - \int_L \frac{1}{2} \kappa(x) w(x) dx = 0 \quad (13)$$

같은 방법으로 경계조건을 고려하여 기본식인 식(3)을 유연도법에 의한 적합방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{q}} = \int_L \mathbf{b}^{*T} [x, w(x)] \mathbf{d}(x) dx = 0 \quad (14)$$

여기서, $\mathbf{b}^*[x, w(x)] = \begin{bmatrix} x-1 & x & -w(x)/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$:
내력형상함수

2.2 유연도 매트릭스의 유도

기하학적 비선형의 유연도법의 해석에 있어서, 유연도 행렬 \mathbf{F} 는 횡변위인 $w(x)$ 에 의존하는 $\mathbf{b}(x), \mathbf{b}^*(x)$ 에 의해 결정된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{Q}} = \int_L \left[\mathbf{b}^{*T}(x) \frac{\partial \mathbf{d}(x)}{\partial \mathbf{Q}} + \frac{\partial \mathbf{b}^{*T}(x)}{\partial \mathbf{Q}} \mathbf{d}(x) \right] dx \\ &= \int_L \left[\mathbf{b}^{*T}(x) \frac{\partial \mathbf{d}(x)}{\partial \mathbf{D}(x)} \frac{\partial \mathbf{D}(x)}{\partial \mathbf{Q}} + \frac{\partial \mathbf{b}^{*T}(x)}{\partial w(x)} \mathbf{d}(x) \frac{\partial w(x)}{\partial \mathbf{Q}} \right] dx \\ &= \int_L \left[\mathbf{b}^{*T}(x) \mathbf{f} \mathbf{b}(x) + \frac{\partial \mathbf{b}^{*T}(x)}{\partial w(x)} \mathbf{f} \frac{\partial w(x)}{\partial \mathbf{Q}} \right] dx \\ &+ \int_L \frac{\partial \mathbf{b}^{*T}(x)}{\partial w(x)} \mathbf{d}(x) \frac{\partial w(x)}{\partial \mathbf{Q}} dx \end{aligned} \quad (15)$$

여기서, $\mathbf{f} = \mathbf{k}^{-1}$: 단면 유연도 매트릭스

식(15)을 구성하는 세 가지 요소로는 첫 번째, 고정된 횡변위 $w(x)$ 에 대해 요소의 절점력 $\bar{\mathbf{Q}}$ 의 변화로 인한 절점변위 $\bar{\mathbf{q}}$ 의 직접적인 변화이다. 두 번째와 세 번째는 절점력 $\bar{\mathbf{Q}}$ 의 변화로부터 바뀌게 되는 횡변위 $w(x)$ 의 변화로 인한 $\bar{\mathbf{q}}$ 값의 변화이다. 식(15)에서 유연도 행렬을 구하기 위해서, 적분식에 포함된 각각의 값들을 미리 계산하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial w} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{b}^*}{\partial w} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

식(16)에 따라서 식(15)에 사용되는 각 항으로 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{b}(x)}{\partial w(x)} \bar{\mathbf{Q}} \frac{\partial w(x)}{\partial \bar{\mathbf{Q}}} = -\bar{Q}_3 \begin{bmatrix} \frac{\partial w(x)}{\partial Q_1} & \frac{\partial w(x)}{\partial Q_2} & \frac{\partial w(x)}{\partial Q_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{b}^*(x)}{\partial w(x)} \mathbf{d}(x) \frac{\partial w(x)}{\partial \bar{\mathbf{Q}}} \\ &= -\frac{1}{2} \kappa(x) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial w(x)}{\partial Q_1} & \frac{\partial w(x)}{\partial Q_2} & \frac{\partial w(x)}{\partial Q_3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{여기서, } \frac{\partial w(x)}{\partial \bar{\mathbf{Q}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w(x)}{\partial Q_1} & \frac{\partial w(x)}{\partial Q_2} & \frac{\partial w(x)}{\partial Q_3} \end{bmatrix}$$

식 (17), (18)을 결정하면 유연도 행렬이 구해진다. 이 두 식은 처짐의 하중에 대한 미분값이며, 따라서 단면에서의 횡변위가 구해지면 이 두 식은 결정된다. 단면의 횡변위를 결정하기 위하여 횡변위의 형상함수를 곡률변위보간법으로 유도하였다. 곡률변위보간법에 대한 자세한 설명은 2.3절에 나타내었다.

2.3 곡률변위보간법

곡률변위보간법은 물리학적 비선형과 기하학적 선형 유연도 해석(Neuenhofer and Filippou, 1997)을 바탕으로 하고 있다. 지금부터 변형률 행렬 $\mathbf{d}(x)$ 에서 나타내는 변형률은 각각의 적분점의 변형률이며, 각 적분점은

가우스(Gauss)점과 상대적인 위치를 같이한다.

$$\kappa(x) = \sum_{j=1}^n l_j(x) \kappa_j, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (19)$$

여기서, $l_j(\xi)$: 라그랑지언(Lagrangian) 다항식

라그랑지언 다항식의 값은 다음과 같은 라그랑지언 보간함수 공식으로부터 간단하게 얻을 수 있다.

$$l_j(x) = \frac{\prod_{i=1, i \neq j}^n (x - x_i)}{\prod_{i=1, i \neq j}^n (x_j - x_i)} \quad (20)$$

여기서, $l_j(x_i) = \delta_{ij}$

식(19)으로부터 구한 곡률식은 운동관계식의 조건으로 횡변위에 대한 2차 미분값이므로, 횡변위를 구하기 위해서 곡률식을 두 번 적분한다. 이때, 횡변위에 대한 식은 적분상수를 제외하고는 라그랑지언 다항식만이 이중적분에 묶이게 되므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} w(x) &= -L^2 \left[\iint \sum_{j=1}^n l_j(x) \kappa_j dx + c_1 x + c_2 \right] \\ &= -L^2 \left[\sum_{j=1}^n \tilde{l}_j(x) \kappa_j + c_1 x + c_2 \right] \end{aligned} \quad (21)$$

여기서, $\tilde{l}_j(x) = \iint l_j(x) dx$

Fig. 1의 경계조건으로부터 지점에서의 처짐은 영(零)이다. 이 조건을 사용하여 두 개의 적분상수를 계산할 수 있다. 계산된 두 개의 적분상수를 식(21)에 대입하여 곡률에 관한 간단한 식으로 정리할 수 있다.

$$c_2 = 0, \quad c_1 = - \sum_{j=1}^n \tilde{l}_j(x=1) \kappa_j \quad (22)$$

$$w(x) = -L^2 \sum_{j=1}^n [\tilde{l}_j(x) - \tilde{l}_j(x=1)x] \kappa_j \quad (23)$$

식(20)에 포함된 라그랑지언 다항식의 폐쇄적인 형식은 수학적 적분법의 적용이 어렵다. 따라서 컴퓨터를 사용한 수치적분을 적용하기 위하여 적분이 편리한 형태로 변형하여야 한다. 본 연구에서는 기존에 많이 사용하고 있는 식(24)와 같은 다항식을 적용하였다.

$$\begin{aligned} & [l_1(x) \ l_2(x) \ \dots \ l_{n-1}(x) \ l_n(x)] \\ & = [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^{n-2} \ x^n] \mathbf{G}^{-1} \end{aligned} \quad (24)$$

여기서, \mathbf{G}^{-1} : Vandermode matrix

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

식(24)은 적분점인 x_i 의 값에 의해서 구할 수 있다. 식(23), (24)로부터, 변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} w(x) &= -L^2 \left[\frac{1}{2}(x^2 - x) \frac{1}{6}(x^3 - x) \dots \frac{1}{n(n+1)}(x^{n+1} - x) \right] \\ & \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot [\kappa_1 \ \kappa_2 \ \dots \ \kappa_n]^T \\ & = -L^2 \sum_{j=1}^n \bar{l}_j(x) \kappa_j = \bar{\mathbf{I}}(x) \boldsymbol{\kappa} \end{aligned} \quad (25)$$

여기서, $\bar{\mathbf{I}}(x) =$

$$\left[\frac{1}{2}(x^2 - x) \ \frac{1}{6}(x^3 - x) \ \dots \ \frac{1}{n(n+1)}(x^{n+1} - x) \right] \mathbf{G}^{-1} \quad (26)$$

식(26)은 식(22)의 적분상수 c_1 을 포함하고 있는 라그랑지언 다항식의 n번째이다. 식(25)에 포함된 곡률식은 표준점 단면에서 구해지는 곡률값 행렬의 κ_j 의 열이다. 그러므로 처짐에 관한 식(25)는 곡률변위보간법을 따르고 있다.

$$\boldsymbol{\kappa} = [\kappa_1 \ \dots \ \kappa_n]^T \quad (27)$$

$$\mathbf{w} = [w_1 \ \dots \ w_n]^T \quad (28)$$

$$w_i = w(x = x_i) = -L^2 \sum_{j=1}^n \bar{l}_{ij}^* \kappa_j \quad (29)$$

여기서, $l_{ij}^* = \bar{I}_j(x_i) = \mathbf{I}^*$ $i, j = 1, 2, \dots, n$ (30)

식(30)는 x_i 가 위치하는 곳에서의 j 번째 라그랑지언 다항식이 적분된 값이다. 여기서 \mathbf{I}^* 행렬은 곡률변위보간 법에서의 영향행렬이다.

선형상태에서 $\kappa = M/EI$ 인 관계를 이용하면 식(7)의 하중형상함수와 식(29)을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w_i = -\frac{L^2}{EI} \sum_{j=1}^n l_{ij}^* \mathbf{b}_1 [x_j, w_j] \bar{\mathbf{Q}}$$

$$= -\frac{L^2}{EI} \sum_{j=1}^n l_{ij}^* [x_j - 1 \quad x_j \quad -w_j] \bar{\mathbf{Q}} \quad (31)$$

식(31)의 $\mathbf{b}_1[x_j, w_j]$ 는 식(7)의 하중형상함수의 첫 번째 행이다. 각 요소의 값을 세부적으로 정리하기 위하여 식(31), (32)을 이용하면 식(31)는 식(33)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{x} = [x_1 \dots x_n]^T \quad (32)$$

$$\bar{\mathbf{x}} = [x_1 - 1 \dots x_n - 1]^T \quad (33)$$

$$\mathbf{A}(\bar{\mathbf{Q}}_1)\mathbf{w} = \bar{\mathbf{Q}}_2 \mathbf{a}_2 + \bar{\mathbf{Q}}_3 \mathbf{a}_3 \quad (34)$$

여기서, $\mathbf{A}(\bar{\mathbf{Q}}_1) = \mathbf{I} - \bar{\mathbf{Q}}_1 \frac{L^2}{EI} \mathbf{I}^*$ (35)

$$\mathbf{a}_2 = -\frac{L^2}{EI} \mathbf{I}^* \mathbf{x} \quad (36)$$

$$\mathbf{a}_3 = -\frac{L^2}{EI} \mathbf{I}^* \bar{\mathbf{x}} \quad (37)$$

$\mathbf{I} = n \times n$ 항등행렬

적분점에서 구해지는 식(15)의 $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{Q}}$ 함수는 일반화된 식으로 다음과 같은 행렬로 나타낸다.

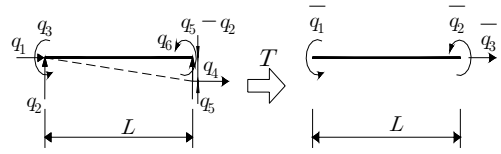


Fig. 2 Elimination of rigid body modes

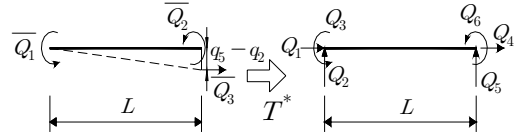


Fig. 3 Inclusion of rigid body modes

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \bar{\mathbf{Q}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial \bar{Q}_1} & \frac{\partial w_1}{\partial \bar{Q}_2} & \frac{\partial w_1}{\partial \bar{Q}_3} & \dots & \frac{\partial w_1}{\partial \bar{Q}_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial w_n}{\partial \bar{Q}_1} & \frac{\partial w_n}{\partial \bar{Q}_2} & \frac{\partial w_n}{\partial \bar{Q}_3} & \dots & \frac{\partial w_n}{\partial \bar{Q}_n} \end{bmatrix} \quad (38)$$

식(38)에서의 행렬의 값들은 식(34)의 방정식으로 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \bar{\mathbf{Q}}_1} = -\mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \bar{\mathbf{Q}}_1} \mathbf{w} \quad (39)$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \bar{\mathbf{Q}}_2} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a}_2 \quad (40)$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \bar{\mathbf{Q}}_3} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a}_3 \quad (41)$$

식(39), (40), (41)의 값으로 식(17), (18)이 결정된다. 이 두 식의 값들을 유도식에 대입하여 방정식을 풀면, 유연도행렬을 구할 수 있다.

2.4 강제회전

유연도 기반의 요소는 강제회전을 제거하여 유도한다. 따라서 Fig. 2와 3에서와 같이 강성도기반의 강제회전을 포함한 변위 q 와 강제회전을 제거한 \bar{q} 가 필요하며, 이 두 가지 표현의 전환매트릭스는 다음과 같다.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} & 1 & 0 & \frac{-1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{-1}{L} & 1 \\ -1 & \frac{(q_5 - q_2)}{2L} & 0 & 1 & \frac{-(q_5 - q_2)}{2L} & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{q} \quad (43)$$

요소의 절점력도 강체회전을 포함한 \mathbf{Q} 와 강체회전을 제거한 $\bar{\mathbf{Q}}$ 가 필요하며, 이 두 가지 표현의 변환매트릭스는 다음과 같다.

$$\mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} & 1 & 0 & \frac{-1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{-1}{L} & 1 \\ -1 & \frac{(q_5 - q_2)}{L} & 0 & 1 & \frac{-(q_5 - q_2)}{L} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (44)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^* \cdot \bar{\mathbf{Q}} \quad (45)$$

위의 두 식에 사용된 변환 매트릭스로 6×6 의 강성매트릭스를 구하면 다음과 같다.

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}^{*T} + \mathbf{T}_3 \quad (46)$$

$$\text{여기서, } \mathbf{T}_3 = \frac{Q_3}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.5 적용성 검토

2.5.1 정해식 유도

Fig. 4와 같은 단순보의 한쪽 끝단에 모멘트가 작용하고 있다. 단순보의 지점에서는 모멘트의 합과 전단력은 영(零)이라는 조건을 적용하여 평형방정식을 세우면 다음과 같다.

$$Qdx + Pdy + M - \left(M + \frac{dM}{dx} dx \right) = 0 \quad (47)$$

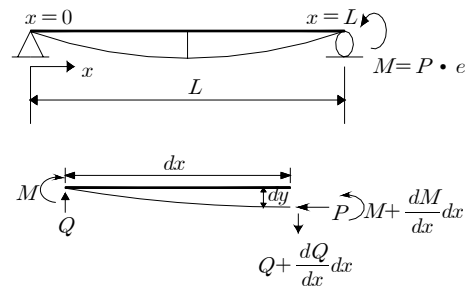


Fig. 4 Exact solution

$$-Q + \left(Q + \frac{dQ}{dx} dx \right) = 0 \quad (48)$$

식(47), (48)로부터 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\frac{d^2 M}{dx^2} - P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (49)$$

식(49)는 모멘트와 횡변위의 이차미분관계를 적용하면 다음과 같은 방정식으로 나타낸다.

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (50)$$

횡변위에 관한 식을 길이에 대한 4차미분값이므로 횡변위의 함수를 다음과 같은 식으로 가정한다.

$$y = A \sin(kx) + B \cos(kx) + Cx + D \quad (51)$$

$$\text{여기서, } k^2 = \frac{P}{EI}$$

단순보의 지점조건을 고려하여 상수값을 결정하고 가정한 횡변위함수에 대입하여 식을 정리하면, 모멘트가 작용하고 있는 단순보의 내력모멘트의 정해식(Carol and Murcia, 1989)이 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} M(x) &= -EIy'' = EIAk^2 \sin(kL) \\ &= \frac{Pe}{EI} \csc(kL) \cdot \sin(kx) = \frac{Pe}{EI} \frac{\sin(kx)}{\sin(kL)} \end{aligned} \quad (52)$$

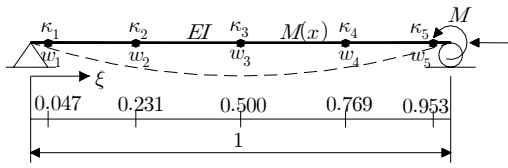


Fig. 5 Example structure with five gauss point curvature sampling

$$\psi = L \sqrt{\frac{P}{EI}} = kL \text{로 두고 정리하면 다음과 같다.}$$

$$M(x) = \frac{Pe}{EI} \frac{\sin(\psi x)}{\sin(\psi)} \quad (53)$$

2.5.2 적용성 검토

적용성 검토를 위하여 Fig. 5 와 같은 단순보를 선택하였다. 단순보의 오른쪽 롤러지점에 축력(P)과 굽힘모멘트($M = P/100$)를 작용시켰다. 본 연구에서 제안한 곡률변위보간법을 사용한 유연도법을 사용하여 계산한 단면력과 정해를 비교하여 적용성을 검증하였다. 계산에 사용된 재료물성은 $EI = 1$, $L = 1$ 이다.

1) 결과비교

곡률변위보간법으로 유도한 보의 처짐에 대한 식의 적용성을 평가하였다. 기하학적 비선형이 고려된 정도를 평가하기 위하여, 내력모멘트에 대한 축력비의 그래프를 비교하였다. 또한, 강성도법과의 비교를 위하여 ABAQUS 프로그램을 사용하여 정해와 비교하였다. 구조물에 축력과 모멘트가 일정한 비로 작용할 경우 축력이 클수록, 사용한 적분점의 개수에 민감하게 반응하였다. 축력을 점차 증가시켜 축력 $P = 8EI/L^2$ 이고 굽힘모멘트가 $M = P/100$ 인 경우까지 비교적 정확한 값을 나타내었다.

2) 결과고찰

Fig. 6 의 그래프는 곡률변위보간법을 사용한 유연도법을 적용하여 계산한 결과이다. 비교인자는 사용하는 적분점의 개수로 적분점의 개수가 늘어날수록 점점 더 정해에 근접하였다. 이것은 적분점의 개수가 늘어날수록 그래프 상에서 정해와의 오차거리가 점차 줄어드는 것으로 알 수 있다. 따라서 유연도법에서는 적분점의 개수를 늘릴 때 마다 점점 더 정해에 근접한다. 적분점의 개수를 늘리는 것이 어떤 방향성을 가지는 것이 아니라, 근사적분법인 수치적분법을 사용하기 때문에 점점 더 정해에 가까워지

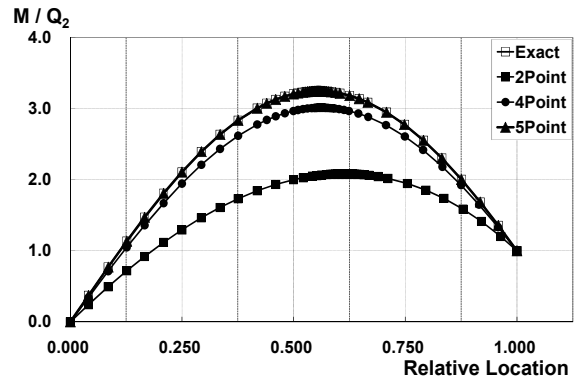


Fig. 6 Bending moment from $P=8$ by flexibility method

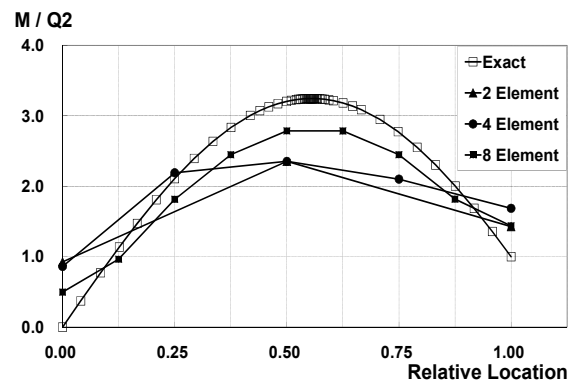


Fig. 7 Bending moment from $P=8$ by stiffness method(ABAQUS)

는 것으로 판단해야 한다. 적분점이 3개이상일 경우 정해와의 오차가 미소한 값을 나타내었다.

Fig. 7의 그래프는 강성도법에 기반을 둔 구조해석프로그램인 ABAQUS의 기하비선형 해석틀을 사용하여 해석한 결과이다. 비교인자는 사용하는 요소의 개수이며 요소의 수를 변화시켜 가면서 각 절점에서의 내력모멘트와 축력의 비를 그래프로 나타내었다. 강성도법에서는 사용하는 요소의 절점에서만 값을 구할 수 있으나 본 연구에 사용한 구조해석프로그램인 ABAQUS에서는 내력모멘트를 적분점에서 계산하고 있다. ABAQUS에서 Gauss-Lobatto적분점을 사용한다. Gauss-Lobatto 적분점의 첫 번째 적분점의 위치는 "0"이 아니다. 하지만 본 연구에서 검토하고자 하는 요소수의 개수에 따른 오차의 경향을 파악하는 데는 그 영향이 작다. 요소의 개수가 적으면 기형적인 형상을 나타내고 있다. 요소의 수를 증가시키는데 있어서 충분히 적절한 요소를 사용하여야만 비슷한 값을 나타낸다.

두 가지 경우에서의 결과를 비교하면, 유연도법에서는 적은 수의 요소만으로도 요소내의 전구간에 대한 내력모

Table 1 Geometrically nonlinear flexibility based element state determination algorithm

step	Algorithm
1. Elimination of rigid body mode	$\bar{q}_{t-1} = T_i^T \cdot q_{t-1}$
2. Displacement increments	$\Delta \bar{q}_t = F_{i-1} \cdot \bar{R}_{i-1}$ $\bar{q}_t = \bar{q}_{t-1} + \Delta \bar{q}_t$
3. Nodal force increments	$\Delta \bar{Q}_i = F_{i-1}^{-1} \cdot r_{i-1}$
4. Nodal force	$\bar{Q}_i = \bar{Q}_{i-1} + \Delta \bar{Q}_i$
5. Displacement	$w(x) = f(\bar{Q}_i)$ $\partial w_i / \partial \bar{Q}_i$
6. Element flexibility	$F_i = \int b^{*T} \cdot f \cdot b \, dx + \dots$
7. Internal force	$D_i(x) = b[x, w_i(x)] \cdot \bar{Q}_i$
8. Derformation	$d_i(x) = k^{-1} \cdot D_i(x)$
9. Nodal Displacement	$q_i^*(x) = \int_L b^{*T} \cdot d_i(x) \, dx$
10. Displacement residuals	$r_i = \bar{q}_t - q_i^*$
11. logic T/F GOTO step 3.	$r_i = 0$
12. Find resisting force	$\bar{Q}_t = F_i^{-1} \cdot \bar{q}_t$
13. Force residuals	$\bar{R}_i = \bar{Q}_1 - \bar{Q}_t$
14. logic T/F GOTO step 2.	$\bar{R}_i = 0$
15. Inclusion of rigid body modes	$Q = T_i \cdot \bar{Q}_i$ $K = T_{3i} + T_i F_i^{-1} T_i^T$

멘트를 구할 수 있지만 강성도법은 구하고자 하는 구간에 대한 적절한 요소길이를 사용해야 정확한 결과값과 구간에 대한 내력모멘트를 결정할 수 있다. 이러한 유연도법의 특징은 구조물의 최대 휨모멘트발생점의 정확한 위치를 파악할 수 방법이 될 수 있다. 또한 유연도법의 수치적 분값은 사용하는 표본점의 수가 적음에도 정해에 가까운 값을 보여주었고 요소수가 적기 때문에 해석시간이 짧았다. 또한 값의 정확도가 강성도법을 사용했을 때와 비교하여 거의 비슷하거나 일부는 보다 더 정확하였다. 따라서 본 논문에서 제안된 곡률변위보간법을 사용하여 유도해 낸 유연도 매트릭스를 비선형 평면 탄성재료구조물의 유한요소해석에 적용이 가능하다고 판단된다.

3. 구조물의 비선형 유연도 해석

3.1 알고리즘

유한요소 해석 알고리즘(Crisfield, 1991)을 참고하여 유연도법을 적용한 기하학적 비선형 해석에 대한 알고리

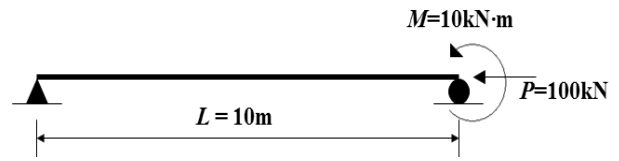


Fig. 8 Example(simple beam)

즘을 Table 1에 나타내었다.

제안된 요소는 직접적분법에 바탕을 둔 일반적인 유한요소 프로그램에 적용할 수 있다. 직접적분법에 의한 일반적인 강성도법의 해석은, 입력값은 변위의 형태이고, 이 입력된 변위에 대하여 강성매트릭스와 수렴하중을 계산하지만, 유연도법에서는 하중의 작용으로 인한 수렴변위를 찾는다. 따라서 유연도법을 사용하여 기하학적 비선형의 변위를 계산할 수 있다면 이 계산된 변위를 일반적인 유한요소 프로그램에 입력값으로 적용 가능하다. 이 때 계산된 수렴하중은 기하비선형이 고려된 반력값이 되고, 유연도 행렬의 역행렬을 계산하면 기하비선형의 강성행렬이 된다.

3.2 계산예

3.2.1 단순보

제안된 방법으로 실제와 가까운 선형의 평면 프레임 구조물을 해석해 보았다. 계산에 사용된 구조물은 Fig. 8과 같은 정정구조의 단순보이고 하중조건은 해석에서의 하중조건과 같은 형태로 우측단에 임의의 압축력 ($P = 100kN$)과 임의의 굽힘모멘트 ($M = 10kN \cdot m$)가 작용하고 있다. 구조물의 재료물성치는 다음과 같다.

탄성계수: $E = 2.0 \times 10^5 MPa$

단면적: $A = 6.0 \times 10^4 mm^2$

단면2차모멘트: $I = 4.5 \times 10^8 mm^4$

지간의 길이: $L = 10m$ 이다.

1) 좌측단의 회전변위(Fig. 9)

2) 우측단의 회전변위(Fig. 10)

3) 우측단위 축방향 변위(Fig. 11)

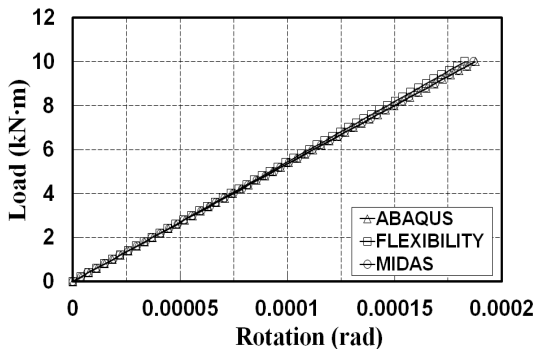


Fig. 9 Rotational displacement of hinge-support

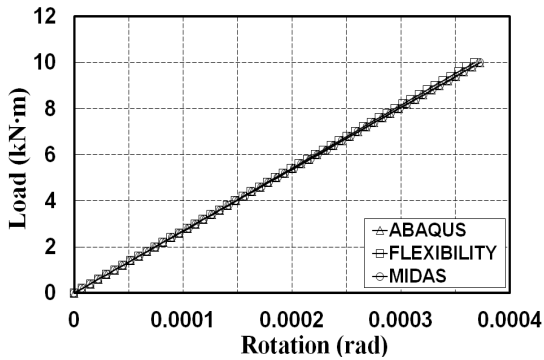


Fig. 10 Rotational displacement of roller-support

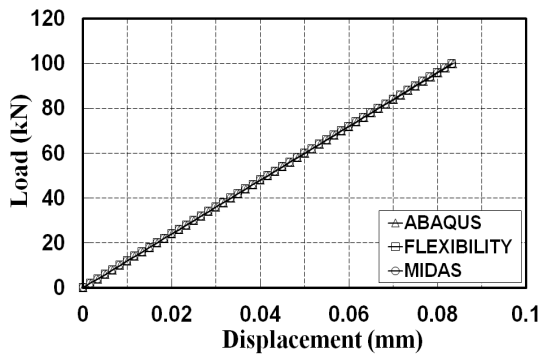


Fig. 11 Horizontal displacement of roller-support

3.2.2 캔틸레버보

계산에 사용된 구조물의 Fig. 12와 같은 정정구조물인 캔틸레버보이고 하중조건은 우측자유단에 임의의 압축력 ($P = 100kN$)과 임의의 굽힘모멘트 ($M = 10kN \cdot m$)이 작용하고 있다. 재료물성치는 다음과 같다.

탄성계수: $E = 2.0 \times 10^5 MPa$

단면적: $A = 6.0 \times 10^4 mm^2$

단면2차모멘트: $I = 4.5 \times 10^8 mm^4$

지간의 길이: $L = 2m$

1) 자유단의 회전변위 (Fig. 13)

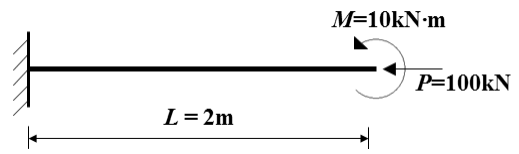


Fig. 12 Example (cantilever beam)

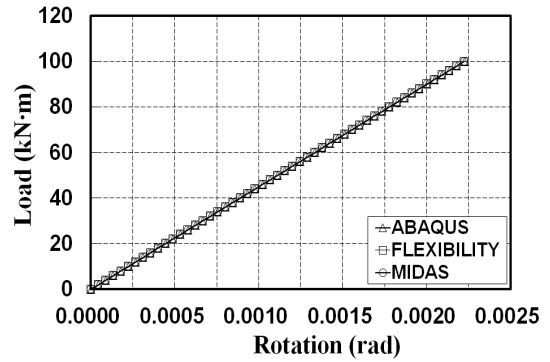


Fig. 13 Rotational displacement of free-support

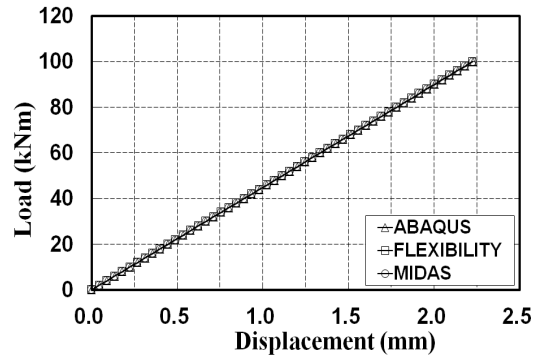


Fig. 14 Vertical displacement of free-support

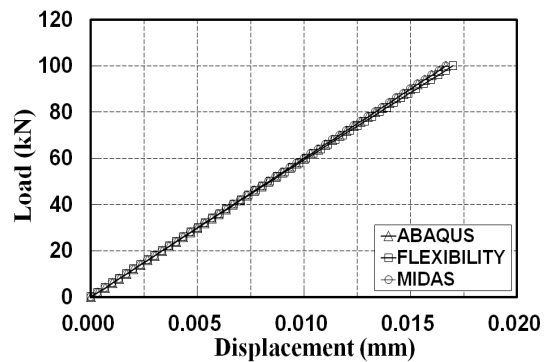


Fig. 15 Horizontal displacement of free-support

2) 자유단의 수직변위 (Fig. 14)

3) 자유단의 축방향 변위 (Fig. 15)

3.3 결과분석

각 예제의 비교를 위하여 강성도법은 유한요소 8개를 적용한 MIDAS-CIVIL과 ABAQUS의 해석값을 사용하였다. 비선형 효과를 고려하기 위하여 MIDAS-CIVIL에서는 $P-\Delta$ 효과를 적용하였고, ABAQUS에서는 비선형 해석틀을 사용하였다.

단순보에서 양지점의 회전변위의 결과값은 강성도법인 MIDAS-CIVIL과 ABAQUS에서는 두 값이 거의 일치하고 유연도법은 약간 작게 나타났다. 하지만 축방향 변위는 유연도법이 더 크게 해석 되었다.

캔틸레버보에서 자유단의 회전변위와 수직변위는 세가지 경우에서 거의 일치하는 값을 나타내고 있다. 하지만 축변위에서는 MIDAS-CIVIL과 ABAQUS의 해석값은 비슷한 결과를 나타내고 있지만 유연도법의 해석결과는 약간 큰 값을 나타내고 있다.

각 예제의 하중-변위 결과값 그래프에서 다수의 요소를 사용한 강성도법의 경우와 하나의 요소를 사용한 유연도법의 경우에서 거의 일치하는 결과값을 보여주고 있다. 강성도법에서는 사용하는 요소의 수를 늘려서 더 정확한 값을 구할 수 있지만, 유연도법에서는 하나의 요소에서 고려하는 적분점을 조정하여 정확한 해를 구할 수 있다.

4. 결론

강성도법에서는 사용하는 요소의 수를 결정하여 해석의 정확도를 결정하지만, 유연도법에서는 사용하는 요소의 수는 하나이고 적분점의 수를 조정하여 해석의 정확도를 결정할 수 있다.

유연도 행렬을 구하기 위하여 단순보요소의 횡변위를 유도하는 곡률변위보간법을 사용하였다. 곡률변위보간법은 내력형상함수의 한 요소인 횡변위에 대한 형상함수를 라그랑지언 다항식으로 가정하여 유도하는 방법이다. 단순보요소에서 횡변위에 대한 적용성을 검토하였다. 유도한 매트릭스를 적용하여 프로그램을 개발할 수 있는 알고리즘을 제안 하였고, 제안된 알고리즘으로 프로그램을 개발하였다. 개발된 프로그램으로 일반적인 정정 구조물에 대하여 해석해 보았고, 그 결과를 강성도법의 결과와 비교하였다. 본 연구에서 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

- 1) 곡률변위보간법을 사용하여 유도한 유연도 매트릭

스를 비선형 평면 탄성 재료구조물의 유한요소해석에 적용이 가능하다고 판단된다.

- 2) 많은 수의 요소를 사용해야하는 강성도법과는 다르게 유연도법에서는 하나의 요소를 사용하여도 정해에 근접한 정밀도를 보여 주었다.
- 3) 유연도법을 사용한 기하학적 비선형 알고리즘을 제안하였다.
- 4) 제안된 유연도법 알고리즘에 근거한 기하학적 비선형 해석 프로그램을 개발하였다.

감사의 글

본 연구는 국토해양부 도시철도표준화2단계연구개발사업의 연구비지원에 의해 수행되었습니다.

참고문헌

1. 권민호, 장준호, “철근콘크리트 기둥의 3차원 비선형 유한요소 해석”, No.3., 콘크리트학회 논문집, Vol. 16, 2004.
2. 박순웅, 박문호, 권민호, “Timoshenko보 이론 및 층상화 단면모델을 이용한 RC기둥의 비선형 유한요소 해석”, No.4A, 대한토목학회 논문집, Vol. 26, 2006.
3. 장준호, 박문호, 이해경, 박순웅, “재료 및 기하학적 비선형을 고려한 브레이싱된 강뱀대구조물의 최적설계”, No. 3, 한국강구조학회 논문집, Vol. 12, 2000.
4. Backlund, J., “Large deflection analysis of elasto-plastic beams and frames”, int. J. Mech. Sci, 18, pp.269-277, 1974.
5. Bathe, K. J., “Finite element procedures”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J, 1996.
6. Carol, I. and Murcia, J., “Nonlinear time-dependent analysis of planar frames using an ‘exact’ formulation-I: Theory”, Comp. and Struct., 33, pp.79-87, 1989.
7. Crisfield, M. A., “Non-linear finite element analysis of solids and structures”, John Wiley and Sons, Chichester, u.k, 1991.
8. Neuenhofer, A. and Filippou, F. C., “Evaluation of nonlinear frame finite-element models”, J. Struct. Engrg., ASCE, 123, pp.958-966, 1997.
9. Neuenhofer, A. and Filippou, F. C., “Geometrically Nonlinear Flexibility-Based Frame Finite Element”, J. Struct. Engrg., ASCE, 123, pp.704-711, 1998.
10. Spacone, E., Ciampi, V. and Filippou, F.C., “Mixed formulation of nonlinear beam finite element”, Comp. and Struct., 58, pp.71-83, 1996.
11. Tonti, E., “The reason for analogies between physical theories”, Appl. Math. Model:37-50, 1997.
12. Zienkiwicz, O. C. and Taylor, R. T., “The finite element method: basic formulation and linear problem.”, 4th Ed., Mcgraw-Hill Inc., London, England, Vol. 1, 1989.

(접수일자 : 2010년 10월 25일)
(수정일자 : 2010년 12월 1일)
(심사완료일자 : 2010년 12월 8일)

요 지

유연도법 기반의 공식화에서는 변위영역의 형상함수를 라그랑지언(Lagrangian)보간법에 의한 곡률로부터 횡방향 변위를 유도한다. 곡률변위보간법으로 유도한 매트릭스를 사용한 기하학적 비선형 해석방법과 강성도법을 기반으로 한 비선형 기존의 유한요소 해석 프로그램의 결과를 비교하여 적용이 가능함을 확인하였고, Spacone의 이론을 확장시켜 기하학적 비선형 거동을 예측할 수 있는 유연도법의 알고리즘을 제안하였다. 예제를 통하여 실제 문제에 대한 기하학적 비선형 해석을 수행하였다.

핵심 용어 : 기하학적 비선형, 유연도 행렬, 곡률변위보간법
