

# 재료비선형 전달행렬법에 의한 연속보의 해석

## An Analysis of Continuous Beam by Material Non-linear Transfer Matrix Method

서현수<sup>1)</sup>      김진섭<sup>2)</sup>      권민호<sup>3)\*</sup>  
 Seo, Hyun Su      Kim, Jin Sup      Kwon, Min Ho

### Abstract

This study is to develop nonlinear analysis algorithm for transfer matrix method, which can be applied to continuous beam analysis. Gauss-Lobatto integral rule is adopted and the transfer matrix is derived from stiffness matrix. In the transfer matrix method, the system equation has a constant number of unknowns regardless of number of D.O.F. Therefore, the transfer matrix method has computational efficiencies not only in linear elastic analysis but also in nonlinear analysis. To verify the developed method, the analysis results of several examples are compared with commercial code in moment-curvature, moment-displacement and load-displacement relation.

**Keywords** : Transfer matrix method, Material nonlinear, Stiffness matrix, Finite element method

### 1. 서론

전달행렬법은 유한요소해석법과는 달리 행렬의 연속적 곱셈을 주체로한 방법이다. 이 전달행렬은 구조요소의 물리적 조건을 만족하는 미분방정식의 일반해 혹은 유한요소의 강성행렬로부터 유도될 수 있다. 전달행렬법에 의한 해석은 구조물 좌단의 자유도를 우단까지 전달하고, 우단의 경계조건을 이용해서 좌단의 자유도를 결정하고, 다시 좌에서 우로 구조물 각 부재의 벡터량을 구해 나가는 방법이다. 기존의 유한요소해석법에서는 각 절점의 자유도가 발생할 때마다 최소한 그 자유도의 수만큼의 미지값을 가지게 되고, 그 미지값의 수만큼 방정식을 만들어 연립하여 풀어야 하지만 전달행렬해석법에서는 절점의 자유도 수에 상관없이 일정한 미지값만을 가지게 되어 연산속도가 빠를 뿐만 아니라 간단한 수계산으로도 해석할 수 있다. Fig. 1은 유한요소법과 전달행렬법을 비교하여 도식화 하였다. 유한요소법에서는 변위의 적합관계로부터 곡률을 구하고, 구한 곡률로부터 휨모멘트의 계산은 구성관계를 사용한다. 또, 휨모멘트와 하중은 적분식으로 약화된 평형관계를 사용하여 해석을 수행한다. 전달행렬법

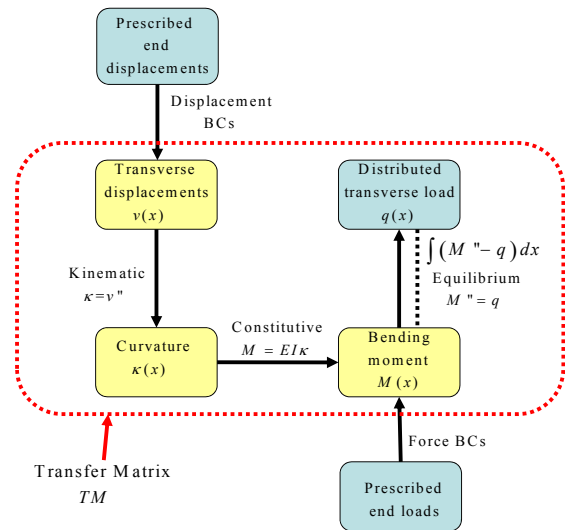


Fig. 1 Transfer matrix method Diagram

은 이러한 과정들을 전달행렬을 사용하여 계산하게 된다.

이러한 전달행렬법은 탄성지반에 놓인 변단면의 원형 탱크해석(하대환, 1996) 등 여러 연구가 이루어져 왔지만 최근까지의 연구는 선형탄성 이론에 기반한 연구였다. 따라서 구조물의 정확한 거동을 예측할 수 있는 비선형 전달행렬법에 대한 연구가 필요하다.

1) 정회원, (재)한국건설시험연구소 기술연구소 선임연구원  
 2) 정회원, 경상대학교 토목공학과 박사과정  
 3) 교신저자, 정회원, 경상대학교 토목공학과 공학연구원 부교수

\* Corresponding author : kwonm@gnu.ac.kr 055-751-5382  
 • 본 논문에 대한 토의를 2011년 2월 28일까지 학회로 보내주시면 2011년 3월호에 토론결과를 게재하겠습니다.

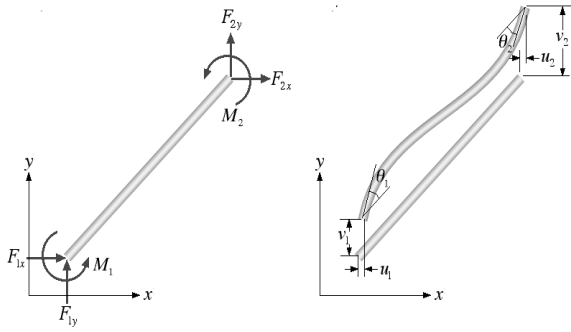


Fig. 2 Element force and deformation

그러므로 본 연구에서 재료비선형을 고려한 구조물의 비선형거동을 예측할 수 있는 비선형 전달행렬 구조해석법을 개발하였다.

## 2. 재료비선형 전달행렬 유도

연속보에서 재료비선형 해석을 하기 위해 기존의 선형 이론으로 유도된 전달행렬과는 다르게, 재료비선형을 고려한 전달행렬을 유도하는 것이 필요하다. 기존의 연구에서는 일정한 선형 탄성계수를 가진 강성행렬로부터 전달행렬을 유도 하였지만 본 연구에서는 단면의 변형에 따라 변화하는 비선형 탄성계수를 포함한 강성행렬로부터 전달행렬을 유도하였다. 또한 강성행렬을 전달행렬법에 적합한 형태로 분할하여 유도 하였다.

### 2.1 선형 강성행렬

선형상태의 강성행렬은  $x$ 축 방향의 힘과 변위,  $y$ 축 방향의 힘과 변위, 회전방향의 모멘트와 회전변위가 발생되는 유한요소의 뼈대 구조물의 강성행렬을 이용하였다(참조 Fig. 2). 그 강성행렬을 Hermitia 다항식  $N$ 의 함수로 표현하면 Eqs. (1)과 (2)와 같고 선형강성행렬일 때는 Eq. (3)과 같이 일정한 강성계수를 갖는다.

$$\mathbf{K} = \int_L \mathbf{B}^T(x) \mathbf{k} \mathbf{B}(x) dx \quad (1)$$

$$\mathbf{B}(x) = \begin{bmatrix} N'_{u1} & 0 & 0 & N'_{u2} & 0 & 0 \\ 0 & N''_{v1} & N''_{\theta1} & 0 & N''_{v2} & N''_{\theta2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서,  $N'$ 는  $N$ 다항식을  $x$ 에 대해서 일차 미분한 것이고,  $N''$ 는 이차 미분한 것이다. Hermitia 다항식  $N$ 은 다음과 같다.

축방향에 대한 함수식,

$$N_{u1}(x) = 1 - \xi, \quad N_{u2}(x) = \xi$$

축의 직각 방향에 대한 함수식,

$$N_{v1}(x) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \quad N_{v2}(x) = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

회전 방향에 대한 함수식,

$$N_{\theta1}(x) = L\xi(1 - \xi)^2, \quad N_{\theta2}(x) = L(\xi^3 - \xi^2)이다.$$

### 2.2 재료비선형 강성행렬

재료비선형을 고려하기 위해서  $\mathbf{k}$ 행렬을 단면상태에 따라 변화하는 단면변형에 관한 식으로 나타내어야 하며  $\mathbf{k}$ 행렬이  $2 \times 2$ 행렬이기 때문에  $6 \times 2$ 행렬인  $\mathbf{B}$ 행렬을  $2 \times 2$ 행렬로 행렬분할 하여야 한다.  $\mathbf{k}$ 행렬과 행렬분할 된  $\mathbf{B}$ 행렬은 Eqs. (4)와 (5)와 같으며, 이 두 식을 Eq. (1)에 대입하면 행렬 분할 된 재료비선형 강성행렬  $\mathbf{K}$ 를 Eq. (6)과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{k}(x) = \begin{bmatrix} EA(\mathbf{d}(x)) & 0 \\ 0 & EI(\mathbf{d}(x)) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{B}(x) = \begin{bmatrix} B_{ii} & B_{ij} \\ B_{ji} & B_{jj} \end{bmatrix} \quad (5)$$

여기서,

$$B_{ii} = \{N'_{u1} \quad 0 \quad 0\}, \quad B_{ij} = \{N'_{u2} \quad 0 \quad 0\}$$

$$B_{ji} = \{0 \quad N''_{v1} \quad N''_{\theta1}\}, \quad B_{jj} = \{0 \quad N''_{v2} \quad N''_{\theta2}\}$$

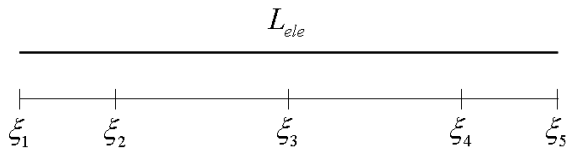


Fig. 3 Gauss-Lobatto integration point

$$\mathbf{K} = \int_L \mathbf{B}^T(x) \mathbf{k}(x) \mathbf{B}(x) dx = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서,

$$K_{ii} = \int_L (B_{ii}^T EA(\mathbf{d}(x)) B_{ii} + B_{ji}^T EI(\mathbf{d}(x)) B_{ji}) dx$$

$$K_{ij} = \int_L (B_{ii}^T EA(\mathbf{d}(x)) B_{ij} + B_{ji}^T EI(\mathbf{d}(x)) B_{jj}) dx$$

$$K_{ji} = \int_L (B_{ij}^T EA(\mathbf{d}(x)) B_{ii} + B_{jj}^T EI(\mathbf{d}(x)) B_{ji}) dx$$

$$K_{jj} = \int_L (B_{ij}^T EA(\mathbf{d}(x)) B_{ij} + B_{jj}^T EI(\mathbf{d}(x)) B_{jj}) dx$$

### 2.3 재료비선형 강성행렬의 적분법

재료비선형 강성행렬 적분시 사용된 적분법은 수치 적분으로서 하나의 요소에서 양 끝단의 절점과 중앙점의 위치를 이용하는 Gauss-Lobatto 적분법을 사용하였다. 이 적분법은 요소의 양 끝단 절점을 사용하기 때문에 각 절점의 단면상태 즉, 각 절점의 곡률과 모멘트를 쉽게 구할 수 있는 장점이 있다. 적분점의 위치(참조 Fig. 3)에 따라 중량값과  $J$ 값들은  $w_1 = 0.1$ ,  $w_2 = 0.5444$ ,  $w_3 = 0.7111$ ,  $w_4 = w_2$ ,  $w_5 = w_1$ ,  $J = L_{ele}/2$ 이다. Eq. (6)을 Gauss-Lobatto 적분법에 의해 수치적분 하면 Eq. (7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{K}_{ele} = \sum_{nIP=1}^5 \mathbf{B}^T(\xi_{nIP}) \mathbf{k}(\xi_{nIP}) \mathbf{B}(\xi_{nIP}) J w_{nIP} \quad (7)$$

### 2.4 재료비선형 전달행렬

유도된 뼈대구조물의 강성행렬로부터 전달행렬로 전환하는 것은 유한요소법중의 강성행렬도법에서 절점력, 강성행렬 및 절점변위 행렬을 행렬분할하여 구할 수 있다. 전달행렬은 어떤 부재의 임의의 절점 벡터량(절점력 및 절점변위)이 다른 절점의 벡터량으로 표현될 수 있기 때

문에 Eq. (8)을 행렬분할 하여  $d_j$ 와  $p_j$ 를 정리하면 Eq. (9)와 같다. Eq. (10)에서 우측의 끝항은 임의절점의 벡터량을 나타내고 좌측항은 임의절점의 벡터량에 의하여 임의절점의 벡터량에 대응하는 절점으로 전달된 벡터량을 나타낸다. 여기서 임의절점의 벡터량을 전달시키기 위해서 쓰인 행렬을 전달행렬(TM)이라 하며, 위 식의 전달행렬의 2행 2열 항에서 음의 부호가 쓰인 것은 전달되는 힘에서 힘의 평형조건을 만족시켜주기 위해서 쓰였다.

$$\begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \end{Bmatrix} \quad (8)$$

여기서,

$$p_i = \{F_{1x} \ F_{1y} \ M_1\}^T, \quad p_j = \{F_{2x} \ F_{2y} \ M_2\}^T$$

$$d_i = \{u_1 \ v_1 \ \theta_1\}^T, \quad d_j = \{u_2 \ v_2 \ \theta_2\}^T$$

$$d_j = K_{ij}^{-1} p_i - K_{ij}^{-1} K_{ii} d_i \quad (9)$$

$$p_j = K_{ji} d_i + K_{jj} K_{ij}^{-1} p_i - K_{jj} K_{ij}^{-1} K_{ii} d_i$$

$$\begin{Bmatrix} d_j \\ p_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{ij}^{-1} K_{ii} & K_{ij}^{-1} \\ K_{ji} - K_{jj} K_{ij}^{-1} K_{ii} & -K_{jj} K_{ij}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ p_i \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$V_j = TM V_i \quad (11)$$

여기서,

$$TM = \begin{bmatrix} -K_{ij}^{-1} K_{ii} & K_{ij}^{-1} \\ K_{ji} - K_{jj} K_{ij}^{-1} K_{ii} & -K_{jj} K_{ij}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$V_i = \{u_i \ v_i \ \theta_i \ F_{ix} \ F_{iy} \ M_i\}^T$$

$$V_j = \{u_j \ v_j \ \theta_j \ F_{jx} \ F_{jy} \ M_j\}^T$$

### 3. 전달행렬법

전달행렬법은 절점의 벡터량과 전달행렬의 연속적인 곱셈으로 미지값을 포함한 연립방정식의 해를 구하여 각 절점의 벡터량 즉, 변위와 힘들을 구하는 방법이다. 본 연

구에서는 미지값인 변위와 힘들을 경계조건에 따른 적합 관계와 힘의 평형관계로 산출하도록 한다.

### 3.1 경계조건행렬

연속보의 경계조건은 고정단, 힌지, 로울러, 자유단으로 분류할 수 있고, 각 경계조건에 따른 경계조건행렬을 미지값을 포함하는 경계조건행렬과 지점 처짐 등으로 주어지는 상수 경계조건행렬로 다음과 같이 세 가지씩 결정할 수 있다.  $n$ 은 해당 절점의 번호이고,  $b$ 는 연립방정식으로부터 구해야 될 미지값들이며,  $r$ 은 지점의 횡방향, 수직방향, 회전 처짐값들로 주어지는 상수값이다. 해당 지점에서 지점처짐이 발생되지 않는다면 값은 영(零)으로 둔다.

고정단 일 때,

$$BC_n = \{0 \ 0 \ 0 \ b_n^H \ b_n^P \ b_n^M\}^T$$

$$A_n = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, R_n = \{r_n^u \ r_n^v \ r_n^\theta\}^T \quad (12)$$

힌지일 때,

$$BC_n = \{0 \ 0 \ 0 \ b_n^H \ b_n^P \ 0\}^T$$

$$A_n = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, R_n = \{r_n^u \ r_n^v\}^T \quad (13)$$

로울러일 때,

$$BC_n = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ b_n^P \ 0\}^T$$

$$A_n = \{0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}, R_n = \{r_n^v\}^T \quad (14)$$

자유단일 때,

$$BC_n = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$$

$$A_n = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}, R_n = \{0\}^T \quad (15)$$

### 3.2 전달행렬법

Fig. 4와 같이 연속된 구조물이 있을 때, 임의절점은 좌측 벡터량과 우측 벡터량을 가지고 있다. 좌측 벡터량은 그 이전 절점의 우측 벡터량에 전달행렬을 곱한 벡터량이 되고, 우측 벡터량은 그 절점의 좌측 벡터량에 하중벡터

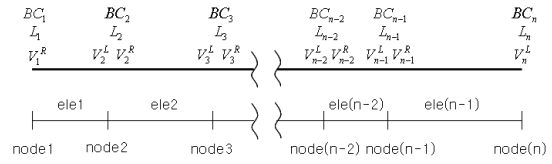


Fig. 4 Nodal and element vectors

와 경계조건행렬을 더한 벡터량이 된다.

하중벡터는 해당 절점의 수평, 수직, 모멘트 하중으로 Eq. (16)과 같다.

$$L_n = \{0 \ 0 \ 0 \ L_n^H \ L_n^P \ L_n^M\}^T \quad (16)$$

첫 번째 절점의 벡터량은 좌측벡터량을 가질 수 없으므로 첫 번째 절점의 우측 벡터량은 하중 벡터량과 경계조건벡터량의 합으로만 계산된다. 그러므로 첫 번째 절점의 경계조건 벡터량은 경계조건에서 발생하는 모든 미지값을 포함하는 벡터량이 되어야 한다. 첫 번째 절점이 고정단, 힌지, 로울러, 자유단일 때 각각 경계조건 벡터량을 Eq. (17)과 같이 나타낸다. 각 절점의 좌, 우측 벡터량은 Eq. (18)과 같이 구한다. 마지막 절점의 벡터량은 힘의 평형조건을 만족시키기 위해 Eq. (19)와 같이 경계조건이 달라진다.

$$BC_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_1^H \\ b_1^P \\ b_1^M \end{Bmatrix} \text{ or } \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1^\theta \\ b_1^H \\ b_1^P \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ or } \begin{Bmatrix} b_1^u \\ 0 \\ b_1^\theta \\ 0 \\ b_1^P \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ or } \begin{Bmatrix} b_1^u \\ b_1^v \\ b_1^\theta \\ b_1^H \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} V_1^R &= L_1 + BC_1 & V_2^L &= TM_1 V_1^R \\ V_2^R &= L_2 + BC_2 & V_3^L &= TM_2 V_2^R \\ V_3^R &= L_3 + BC_3 & V_4^L &= TM_3 V_3^R \\ & & & \vdots \\ V_{n-2}^R &= L_{n-2} + BC_{n-2} & & \\ V_{n-1}^L &= TM_{n-2} V_{n-2}^R & & \\ V_{n-1}^R &= L_{n-1} + BC_{n-1} & & \\ V_n^L &= TM_{n-1} V_{n-1}^R & & \end{aligned} \quad (18)$$

$$A_{end} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$R_{end} = \{0 \ 0 \ 0\}^T$$

다음은 각 절점에서 적합조건과 평형조건을 만족시켜 주는 연립방정식을 만들어 각 경계조건의 미지값을 구해야 하며, Eq. (20)에서는 각 절점의 적합조건을 만족시켜 주는 식을 만들며, Eq. (21)에서는 평형조건을 만족시켜 주는 3개의 식을 만든다. Eqs. (20), (21)에서 만들어진 식으로 연립하여 경계조건행렬의 각 미지수를 구하여 다시 Eq. (18)에 대입하면 각 절점의 좌측, 우측 벡터량을 구할 수 있다. 연립방정식의 기지, 미지, 하중행렬로 인한 상수항으로 재정리 하면 Eq. (22)와 같다.

$$\begin{aligned} A_2 V_2^L &= R_2 \\ A_3 V_3^L &= R_3 \\ A_3 V_3^L &= R_3 \\ \vdots \\ A_{n-1} V_{n-1}^L &= R_{n-1} \end{aligned} \quad (20)$$

$$A_{end} V_{end}^L = R_{end} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} & k'_{13} & \cdots \\ k'_{21} & & & \\ k'_{31} & & & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

## 4. 재료비선형 해석법

### 4.1 할선법

비선형 해석법에는 Newton-Raphson법, 할선법, 접선법, 초기강성도법 등이 있는데 비교적 수렴의 속도와 정확성이 유리한 할선법을 사용하기로 하였다. 강성행렬은 적분점에서의 단면변형을 구하여 그에 따라 경신하도록 하였다. 할선법은 원점에서 그 구성식이 만나는 점을 이어 기울기를 경신하면서 해에 수렴해 나가는 방식이다. 수렴속도는 Newton-Raphson법 보다는 다소 느리지만 해의 정확성에서는 유리한 장점이 있다.

### 4.2 항복모멘트와 소성모멘트

재료비선형 해석시 소성상태를 결정하기 위해서 소성모멘트를 결정한다. 소성모멘트는 단면의 형상에 따라 달라진다. 소성모멘트( $M_p$ )는 항복응력( $\sigma_y$ )과 소성계수

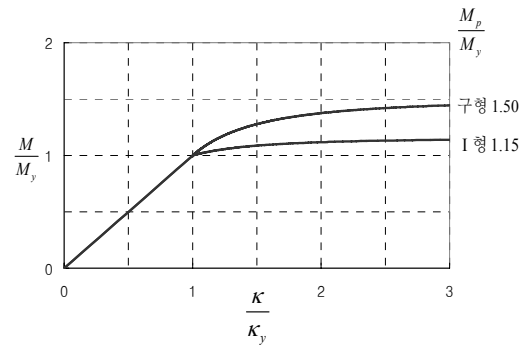


Fig. 5 Moment-curvature relation at the yield point

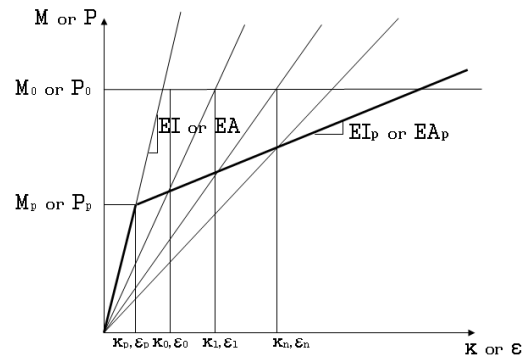


Fig. 6 Solution strategy

( $Z$ )의 곱과 같다.

$$M_p = \sigma_y Z \quad (23)$$

구조물의 부재가 항복한 후에는 경화가 시작되어 모멘트-곡률의 그래프가 달라지게 된다. 부재가 항복한 후에 소성에 이르기까지 모멘트-곡률의 그래프를 단면형상에 따라 나타내면 Fig. 5와 같다.

### 4.3 강성행렬과 전달행렬의 개선

본 연구의 부재의 구성식은 항복후에 선형강성의 1%에 해당하는 강성으로 직선변화를 하는 bi-linear관계식으로 가정하였다. 구성식에 따라 비선형 해석 과정을 Fig. 6과 같이 나타내었다.

$d(x)$ 는 각 적분점에 대해서  $B(x)$  행렬과  $q$ 행렬의 곱으로 구하였다. 값에 따라 각 적분점에서  $EI$ 와  $EA$ 를 개선시켜, Eq. (7)과 같이 적분한다. Eq. (7)에서 구한 강성행렬을 Eqs. (6), (11)을 이용하여 전달행렬을 다시 구하면 개선된 재료비선형 전달행렬을 다시 구할 수 있다.

전달행렬에 의한 연속보의 재료비선형 해석과정을

Table 1 Analysis procces(continuous beam)

Order	Process	Equation
①	Input Geometry, load condition, material property	
②	Load increments	
③	Element Process	$el = el + 1$
④	Compute stiffness	Eq. (4)
⑤	Compute stiffness matrix	Eq. (7)
⑥	Compute transfer matrix	Eq. (11)
⑦	Move to next element	goto ③
⑧	Boundary Nodal Process Start	$n = n + 1$
⑨	Compute unknown vector	Eqs. (18), (19)
⑩	Derive linear system	Eqs. (20), (21)
⑪	Solve next node	goto ⑧
⑫	Solve linear system	Eq. (22)
⑬	Nodal Process	$n = n + 1$
⑭	Compute unknown vector	Eqs. (18), (19)
⑮	Solve next node	goto ⑬
⑯	Check convergence	O.K goto ②
⑰	Update section deformation	Eq. (26) goto ③

Table 1에서와 같이 나타내었다. 여기서, 수렴값은 전체 구조물에서 에너지로 구하였으며 이전의 에너지와의 차이가 허용오차에 근사하면 수렴한 것으로 보았다. 에너지는 각 절점의 힘과 변위의 곱으로 구하였다.

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} V_n^R [1] \\ V_n^R [2] \\ V_n^R [3] \\ V_{n+1}^L [1] \\ V_{n+1}^L [2] \\ V_{n+1}^L [3] \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{d}(\xi_{nIP}) = \mathbf{B}(\xi_{nIP})\mathbf{q} \quad (24)$$

$$s = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^3 V_k [i] \times V_k [i+3] \quad (25)$$

$$conver = s_{before} - s \quad (26)$$

여기서,  $V[i]$ 는 절점벡터량의  $i$ 행 값이다.

## 5. 수치예 및 결과분석

본 연구에서 개발된 재료비선형 전달행렬법과 유한요소 비선형해석 프로그램인 FEAP과 ABAQUS와 해석결

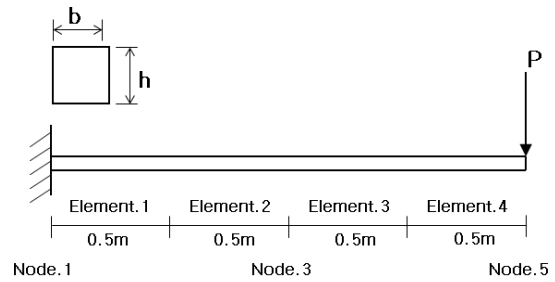


Fig. 7 Cantilever system

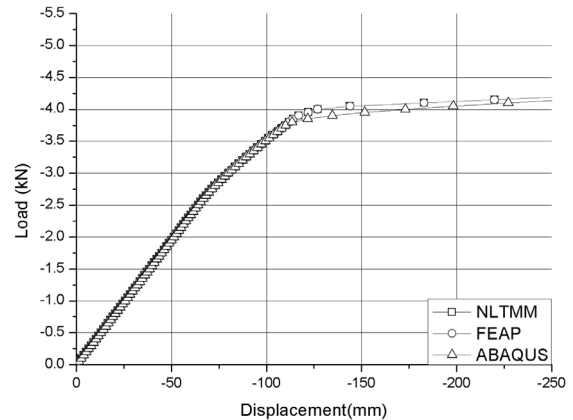


Fig. 8 Load-displacement relation(at node 5)

과를 비교해 보았다. 예제는, 4개의 요소로 이루어져 있으며 구형 단면인 캔틸레버보와 14개의 요소로 이루어져 있으며 I형 단면인 3경간 연속보를 채택하였다.

### 5.1 외팔보

Fig. 7과 같은 외팔보에 적용하였으며 단면은 구형 단면으로  $b=h=50\text{mm}$ 이며, 탄성계수는  $200\text{GPa}$ , 소성탄성계수는  $20\text{GPa}$ , 휨강성은  $104.1667\text{kN} \cdot \text{m}^2$ , 항복응력은  $240\text{MPa}$ , 항복모멘트는  $5.0\text{kN} \cdot \text{m}$ , 소성모멘트는  $7.5\text{kN} \cdot \text{m}$ , 하중재하 총 시간과 증분 시간은 각각 1.0, 0.01, 하중 총 재하량은  $5.0\text{kN}$ 이다.

Fig. 8에서  $2.5\text{kN}$ 의 하중일 때 항복이 시작되어 경화구간이 된다는 것을 알 수 있다. 경화구간에서는 곡선의 기울기가 선형의 해석과 비슷한 정도이거나 완만하지만  $3.75\text{kN}$ 의 하중이 가해지는 소성이 시작되고 부터는 급격한 기울기의 변화를 가져온다는 것을 알 수 있다. Fig. 9에서는 모든 하중이 가해지기까지 3번 절점에서는 항복이 되지 않고 선형관계를 계속 이어 가지만 Fig. 10에서 보듯이 1번 절점에서는 항복모멘트를 거쳐 소성모멘트에 이르러 이후에는 곡률의 큰 변화가 발생된다는 것을 알 수 있다.

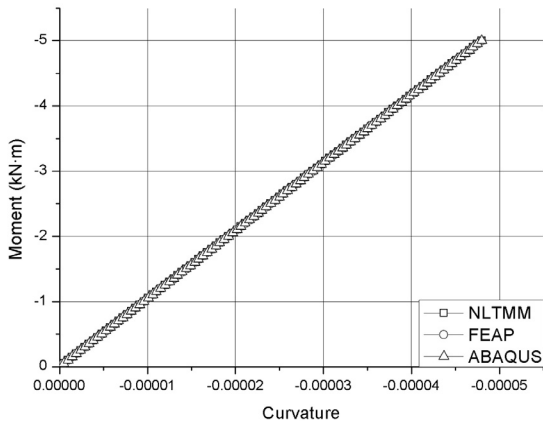


Fig. 9 Moment-curvature relation(at node 3)

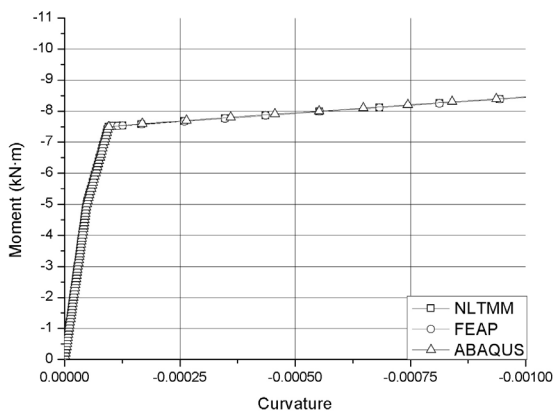


Fig. 10 Moment-curvature relation(at node 1)

## 5.2 연속보

Fig. 11과 같은 연속보에 적용하였으며 단면은 I형단면으로  $b=h=50\text{mm}$ 이며, 웨브두께는  $9\text{mm}$ , 플랜지 두께는  $14\text{mm}$ , 탄성계수는  $210\text{GPa}$ , 소성탄성계수는  $21\text{GPa}$ , 휨강성은  $27236.7\text{kN}\cdot\text{m}^2$ , 항복응력은  $240\text{MPa}$ , 항복모멘트는  $216.96\text{kN}\cdot\text{m}$ , 소성모멘트는  $232.15\text{kN}\cdot\text{m}$ , 하중재하 총 시간과 증분 시간은 각각  $1.0, 0.005$ , 등분포하중은  $4\text{kN/m}$ 로 일정하고 2점 집중하중 총 재하량은  $2000.0\text{kN}$ 이다.

Fig. 12와 같이 연속보의 3번 절점에서는 하중을 가할수록 처짐이 위로 발생되며, 하중이  $810\text{kN}$ 부터 항복이 시작되어  $960\text{kN}$ 까지 경화구간을 지나 이후에는 소성이 되어 급격하게 처짐이 크게 발생된다는 것을 알 수 있다. 하중과 처짐각의 그래프를 보여주고 있는 Fig. 13에서는 경화구간의 기울기가 탄성구간의 기울기와 거의 차이가 없으며 모멘트와 곡률의 그래프인 Fig. 14에서는 짧은 명확한 경화구간의 곡선을 보여주고 있다.

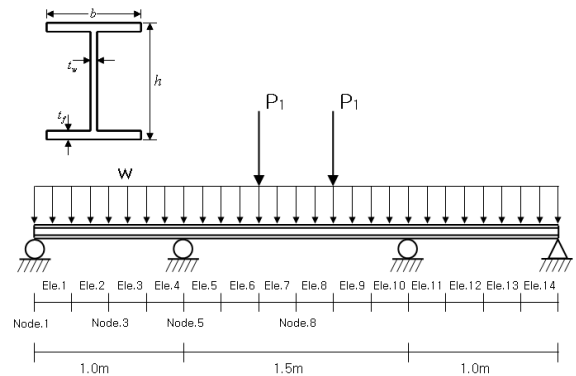


Fig. 11 Continuous beam system

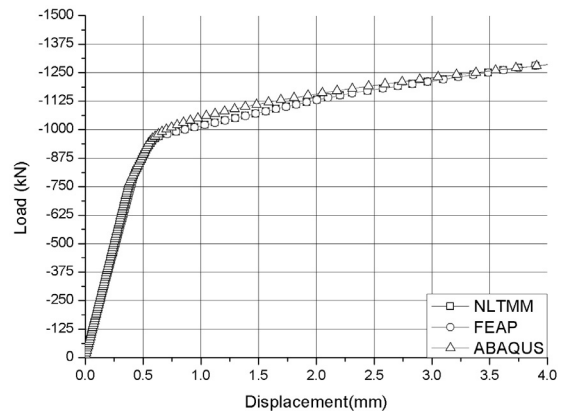


Fig. 12 Load-displacement relation(at node 3)

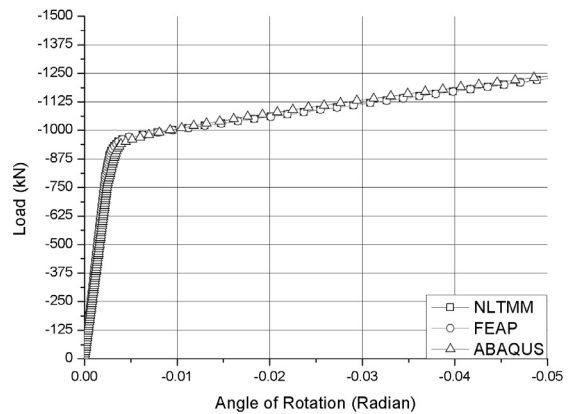


Fig. 13 Load-rotation relation(at node 5)

NLTMM(재료비선형 전달행렬법)과 FEAP(Finite Element Analysis Program)과는 같은 적분점을 사용하였기 때문에 거의 똑같은 해석결과를 나타내었다. 다만 수치해석시 유효숫자의 인식차이 정도와 수렴성을 판단할 때의 허용오차의 차이에서 오는 결과값의 차이정도만 있는 것으로 나타났다. ABAQUS와도 대체로 일치함을 보였지만 항복이후 결과값에서 차이가 나타났다. 이것은

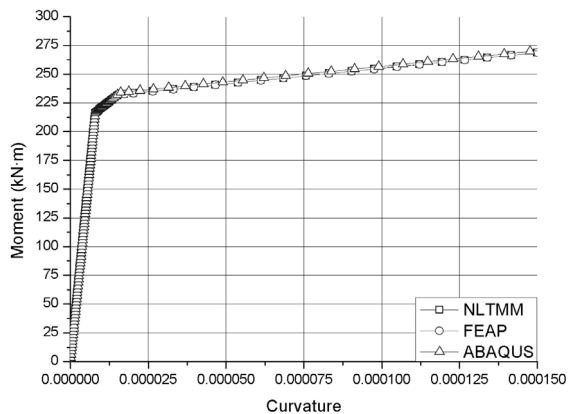


Fig. 14 Moment-curvature relation(at node 8)

적분점의 위치와 수가 다르고 경화구간에서의 해석이 다르기 때문인 것으로 나타났다. 외팔보와 연속보의 재료비선형 해석이 다른 해석방법과 해석오차가 거의 없는 것으로 판단된다. 단순보 및 라멘구조물등 두 부재가 하나의 절점만을 공유하는 연속된 구조물의 해석에 적용이 가능할 것으로 판단된다.

## 6. 결론

본 연구에서는 비선형해석이 가능한 전달행렬법을 제안하였다. 또한 제안된 알고리즘을 기존의 해석법과 비교 분석하였다. 비선형 해석 결과, 탄성구간에서 전달행렬 해석법과 상용프로그램의 해석 결과값이 서로 일치하였다. 그리고 소성구간에서도 거의 일치하는 값을 나타내지만 다소 오차가 발생하였다. 이 오차는 적분방법에 따라 다르게 사용되는 적분점의 위치와 수의 차이에서 생기는 오차로 판단된다. 그러므로 본 연구에서 제안한 전달행렬법으로 연속보 등의 구조부재에 대한 비선형 해석이 가능하다. 전달행렬법은 연쇄적인 행렬연산만을 사용하기 때문에 비선형이 고려된 계산시간이 단축되어 효율적일

뿐 아니라 적은 메모리만을 사용한다. 또한 재료비선형을 고려한 구조물의 비선형 거동을 정확하게 예측가능하다.

## 감사의 글

본 연구는 국토해양부 건설기술혁신사업의 구조물-지반 상호작용을 고려한 구조물 비선형 내진 성능평가도구 개발과제 연구비지원에 의해 수행되었습니다.

## 참고문헌

1. 남문희, 하대환, "전달행렬법에 의한 변위를 허용하는 문형라멘의 영향선해석", 한국전산구조공학회 논문집, 제14권 1호, 2001, 3월, pp.29-34.
2. 이동명, "유한요소-전달행렬의 혼합법을 이용한 3차원 구조물의 진동해석", 한국공학기학회논문집, 제10권 1호, 2001, 2월, pp.16-22.
3. 정성태, 전달행렬에 의한 축대칭 원판의 해석, 경상대학교 석사학위 논문, 1995, pp.2-13.
4. Daryl L. Logan, A First Course in the Finite Element Method. International Thomson Publishing, 1992, pp.27-54.
5. Huiyu Xue, "A Combined Finite Element-Riccati Transfer Matrix Method in Frequency Domain for Transient Structural Response", Computers and Structures, Vol.62, No.2, 1996, pp.215-220.
6. James M. Gere, Stephen P. Timoshenko, Mechanics of Materials, A Division of Wadsworth, Inc., 1984, pp.515-549.
7. Philip G. Hodge, Jr., Plastic Analysis of Structures, The Maple Press Company, 1959, pp.10-31.
8. Kruger T. S., Resburg B. W. J. van and Pressis G. M. du, "Non-linear Analysis of Structural Steel Frames," J. Construct. Steel Research, 1995, pp.285-306.

(접수일자 : 2010년 7월 29일)  
(심사완료일자 : 2010년 8월 26일)

## 요 지

연속보를 대상으로 한 재료비선형 전달행렬법을 제시하였으며, Gauss-Lobatto 적분법을 사용하여 보의 강성행렬로부터 전달행렬을 도출한다. 전달행렬법에서는 유한요소해석법과는 달리 각 절점의 자유도 수에 상관없이 일정한 미지값만을 가지게 되므로 선형해석뿐만 아니라 비선형해석에서도 빠른 연산속도를 보인다. 연속보에 대한 비선형 해석의 적용 예를 통한 비교 결과, 재료비선형 전달행렬법이 변위-모멘트, 변위-하중, 곡률-모멘트의 관계에서 유한요소해석법에 비해 효율적인 것으로 평가되었다.

**핵심 용어** : 전달행렬법, 재료비선형, 강성행렬, 유한요소해석법