

# 회전날개 길이를 이용한 제로터 펌프/모터의 배제용적에 관한 연구 An Analysis on Volumetric Displacement of Gerotor Pump/Motor Using Vane Length

김성동 · 김대명 · 함영복 · 한철호

S. D. Kim, D. M. Kim, Y. B. Ham and C. H. Han

접수일: 2011년 03월 10일, 수정일: 2011년 03월 31일, 게재확정일: 2011년 04월 03일

**Key Words** : Gerotor Pump/Motor(제로터 펌프/모터), Volumetric Displacement(배제용적), Contact Point(접촉점), Vane length(날개 길이), Rotation(자전), Revolution(공전)

**Abstract:** It is hard and complicated to analytically derive the volumetric-displacement formula of a gerotor pump/motor. Analytical formulas for calculating the volumetric-displacement are derived in this work, which is relatively easy and based upon vane lengths. The vane lengths mean the distances from axis of inner rotor or outer rotor to contact points between inner and outer rotors. Two kinds of formula were studied for two different kinematic motions of rotors. The first one is the case that outer rotor is fixed in space and inner rotor is in mixed motion of planetary revolution and rotation with respect to the spinning axis. And the second is the case that both inner and outer rotors simultaneously rotate. The proposed formula is verified through comparison with volumetric-displacement obtained from numerical CAD calculation.

## 기호 설명

- $V_{2\pi}$  : 1회전 당 배제용적
- $Q(t)$  : 순간 유량
- $\vec{p}$  : 피치점 좌표
- $m$  : 외부로터의 로브(혹은 기어) 수
- $r_c$  : 외부로터 원형부분의 반경
- $\theta_1$  : 내부로터 회전각 혹은 자전각
- $\theta_2$  : 외부로터 회전각
- $\theta_p$  : 외부로터 고정중심에 대한 내부로터 기하형상 중심점의 공전각

### Subscripts

- 1 : 내부 로터
- 2 : 외부 로터

## 1. 서 론

제로터는 주로 저속, 고토크용 유압펌프에 사용되고 있으며, 소형 유압모터로도 응용되어지고 있다. 일반적으로 제로터에 관한 연구는 로터 형상과 설계에 관한 연구와 주어진 로터 형상으로부터 배제용적을 산출하는 방법에 관한 연구, 제로터 펌프/모터의 효율을 향상시키기 위한 가공방법과 생산기술에 관한 연구 등으로 분류될 수 있다.

제로터는 내접 물림운동을 하며, 외부로터는 외치차에 해당되고 일반적으로 설계 및 가공의 편의를 위하여 원호곡선을 치형으로 사용한다.

내부로터의 형상은 외부로터의 치형에 의해 창성되며, 트로코이드 곡선으로 만들어진다. 이와 같이 제로터 펌프는 기하학적 형상이 매우 복잡하여, 기하학적인 방법으로 용적을 산출하는 것은 매우 어렵다.

선행연구자들에 의해 연구되어진 내용 중 내부로터와 외부로터의 접촉점 사이의 용적을 직접 산출하는 방법을 이용하여 배제용적을 산출하는 방법1, 2)을 제시 하였으나, 결과공식의 수식이 매우 복잡하여 설계에 반영하기에 어려움이 따른다.

다른 연구내용 중 내·외부로터의 접촉점의 길이를 이용한 배제용적 산출 공식을 소개 하였지만3-5),

---

김성동(교신저자): 금오공과대학교 지능기계공학과  
E-mail: sdkim@kumh.ac.kr, Tel: 054-478-7100  
김대명 : 금오공대 대학원 지능기계공학  
함영복 : 한국기계연구원 그린환경에너지연구본부  
한철호 : 금오공과대학교 지능기계공학과

배제용적에 대한 개념적 소개만 하였으며 결과공식의 유도과정이 생략되었으며 최종공식에서 부분적인 오류도 존재하는 것으로 판단된다. 또한 내·외부 로터가 동시에 회전하는 경우에 대하여만 공식을 제시하였으며, 외부로터가 고정된 상태에서 내부로터가 공전과 자전운동이 복합된 형태로 운동하는 경우에 대하여 연구와 결과가 제시되지 않았다.

본 논문에서는 내부로터와 외부로터의 회전중심에서 접촉점까지의 길이를 이용하여 배제용적을 산출하는 방법을 개념적 소개에서부터 최종 공식까지 자세하게 유도하였다.

내·외부 로터의 운동 형태에 있어서도 외부로터가 고정된 상태에서 내부로터가 공·자전 회전하는 경우와 내·외부 로터가 동시에 회전하는 경우를 모두 조사하였다. 제시된 이론적 산출방법의 신뢰성을 검증하기 위하여 CAD기법과 수치해석 프로그램 기술을 활용하여 수치 해석적으로 산출된 용적과 비교한다.

비교검증을 위하여 수치해석에 사용된 배제용적 산출방법은 외부로터와 내부로터의 접촉점 사이에 형성되는 챔버공간의 최대용적과 최소용적의 차이를 구하고 용적의 차이를 이용하여 이론적 배제용적을 산출하는 방법이 적용되었다. 배제용적 산출과정에서 내부로터와 외부로터 사이의 접촉점이 도출되어야 하며, 접촉점 산출 과정도 소개한다.

## 2. 외부로터 고정, 내부로터 공·자전 경우

### 2.1 운동 해석과 접촉점 산출

제로터의 기어 설계 이론<sup>2, 6)</sup>을 활용하면 내부로터와 외부로터의 피치원 반경  $r_1, r_2$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$r_1 = (m-1)e, r_2 = me \quad (1)$$

여기서  $r_1$ 는 내부로터 중심점에서 피치점까지의 거리이며, 편심  $e$ 는 외부로터의 중심점  $O_2$ 과 내부로터의 중심점  $O_1$  사이의 거리이며,  $m$ 은 외부로터의 로브 수에 해당한다.

외부로터가 고정된 상태에서 Fig. 1의 초기조건으로부터 내부로터의 운동은 Fig. 2에 표현된 바와 같이 자전회전  $\theta_1$ 과 공전운동  $\theta_p$ 의 조합으로 표현될 수 있다. 피치점  $p$ 의 순간중심에 대하여 자전운동에 의한 내부로터 중심점  $O_1$ 의 변위와 고정된 외부로터 중심  $O_2$ 에 대하여 공전 운동하는 중심점  $O_1$  변위는

일치한다.

$$r_1 \theta_1 = -e \theta_p \quad (2)$$

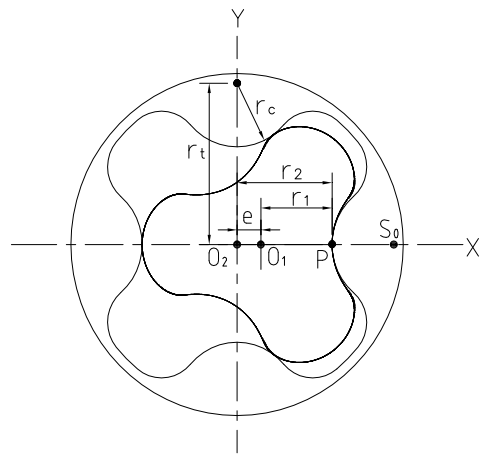


Fig. 1 Initial condition of the gerotor pump

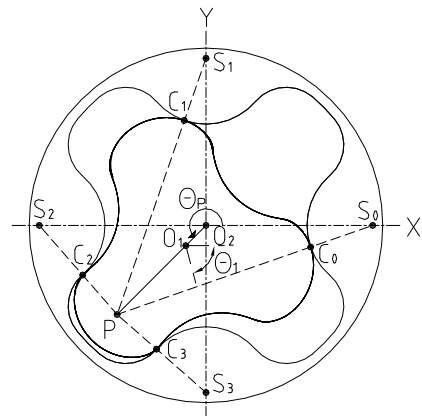


Fig. 2 Driving principle 1 : rotation  $\theta_1$  and planetary revolution  $\theta_p$  in the fixed outer rotor

초기상태에서 내부로터가 시계방향으로  $\theta_1$  자전회전하는 동안에 내부로터의 중심점  $O_1$ 은 고정된 외부로터 중심점  $O_2$ 에 대하여 반시계방향으로  $(m-1)\theta_1$  공전 회전한다.

(1)식과 (2)식으로부터 내부로터 자전회전각  $\theta_1$ 과 내부로터 중심점의 공전회전각  $\theta_p$  사이에 다음의 관계가 성립한다.

$$\theta_1 = \frac{1}{m-1} \theta_p \quad (3)$$

해석의 편의상, (3)식에서 크기 관계만을 표현하였으며 음의 부호는 생략하였다.

Fig. 2에서 나타난 바와 같이 각 로브에서의 접촉

점은 외부로터의 원호치형 중심점에서 피치점에 직선을 그었을 때 직선과 원호치형이 만나는 점이 되므로 피치점의 위치를 알면 각 로브에서의 접촉점을 계산할 수 있다. 실제 가공 시에는 제로터의 원활한 운동을 위하여 틈새를 주지만 본 연구에서는 이상적인 제로터로 가정하여 모든 로브가 서로 접촉하는 경우를 대상으로 한다.

외부로터 원형부분의 중심 좌표  $\vec{S}_k$ 는 고정이며 다음과 같이 나타 낼 수 있다.

$$\vec{S}_k = r_t \cos \frac{2k}{m} \pi \vec{i} + r_t \sin \frac{2k}{m} \pi \vec{j} \quad (4)$$

여기서  $k=0,1,2,\dots,m-1$ 까지 나타내며,  $\vec{i}, \vec{j}$ 는 고정 좌표계  $XOY$ 에서  $X$ 방향과  $Y$ 방향의 단위벡터를 의미한다.  $r_t$ 는 외부로터의 고정 중심점  $O_2$ 으로부터 원형부분의 중심 좌표  $\vec{S}_k$ 까지의 거리이다.  $r_c$ 는 외부로터 원형부분의 반경이다.

피치점의 위치는  $O_2$ 로부터  $O_1$ 의 방향으로 편심 거리에 외부로터 로브 수를 곱한 값이 된다. 외부로터의 중심점 피치점 좌표  $\vec{p}$ 는 다음과 같이 나타낸다.

$$\vec{p} = m e \cos \theta_p \vec{i} + m e \sin \theta_p \vec{j} \quad (5)$$

피치점과 외부로터 원형부분의 중심 좌표  $\vec{S}_k$ 를 연결하는  $\overline{pS_k}$  직선 식은 아래와 같고,

$$Y - m e \sin \theta_p = \frac{r_t \sin \frac{2k}{m} \pi - m e \sin \theta_p}{r_t \cos \frac{2k}{m} \pi - m e \cos \theta_p} (X - m e \cos \theta_p) \quad (6)$$

중심  $S_k$ 인 외부로터 원형식은 다음과 같다.

$$(X - r_t \cos \frac{2k\pi}{m})^2 + (Y - r_t \sin \frac{2k\pi}{m})^2 = r_c^2 \quad (7)$$

(6)식과 (7)식의 교점이 접촉점  $C_k$  이 된다.

## 2.2 회전날개 길이를 이용한 이론적 배제용적

Fig. 2에서 보는 바와 같이 내부로터와 외부로터 사이에  $m$ 개의 접촉점과  $m$ 개의 챔버 공간이 형성된다. 이 중에서 절반에 해당하는 공간은 팽창하는 위상에 놓이게 되면 나머지 절반은 축소하는 위상에 위치한다. 팽창하는 챔버 공간들을 합하거나 혹은 축소하는 챔버 공간들을 합한 공간 용적의 변화율을 이용하여 순간 용적변화율을 구하며, 구동축 1 회전당 배제용적, 순간유량, 평균유량 등에 관한 이론식을 유도할 수도 있다.

Fig. 3에서 보여주는 인근한 두 접촉점 사이의 챔버 공간  $V_{AB}$ 의 변화율은 내부로터의 순간 중심인 피치점으로부터 접촉점까지의 거리의 함수로 표현된다. 내부로터가 공전운동과 자전회전의 복잡한 운동을 수행하여 챔버 공간의 용적변화율을 구하는 과정이 복잡할 것 같지만, 주어진 순간의 순간중심을 알고 있을 경우에는 순간중심에 대한 자전회전운동만으로 표현이 가능하다.

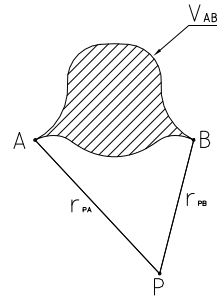


Fig. 3 Volume of a chamber between two contact points of A and B

Fig. 3에서 AB 접촉점 사이의 용적 변화  $\Delta V_{AB}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\Delta V_{AB} = \frac{b}{2} (r_{pA}^2 - r_{pB}^2) \Delta \theta_1 \quad (8)$$

여기서  $b$ 는 내·외부로터의 두께이고, 피치점  $p$ 와 접촉점 A사이의 거리  $r_{pA}$ 는 회전날개의 길이를 의미하며, 내부로터가  $\Delta \theta_1$  회전하는 동안에 증가하는 챔버 면적은  $\Delta \theta_1$ 에 의하여 만들어지는 삼각형면적인  $r_{pA}^2 \Delta \theta_1 / 2$ 가 된다. 동일한 방법으로 회전날개  $r_{pB}$ 의 회전에 의하여  $r_{pB}^2 \Delta \theta_1 / 2$  만큼 챔버 면적이 감소한다. 즉 Fig. 3에서 A, B 접촉점 사이의 챔버 공간 혹은 해칭표시 면적은 피치점과 접촉점 사이의 회전날개의 길이에만 관계하며, 두 접촉점 사이의 윤곽형상에는 무관함을 알 수 있다. 접촉점들 사이의 챔버 용적을 직접 산출하는 이론적 방법(1,2)은 접촉점사이의 윤곽형상의 복잡함만큼 난해한데 반해서 회전날개길이를 이용하여 해석하는 방법이 접촉점 좌표 값만으로 사용하게 되므로 상대적으로 간단하다.

(8)식은 내부로터의 자전회전  $\theta_1$ 을 구동하는 펌프이거나, 자전회전을 출력하는 모터의 경우에 대한 결과식이다.

만약, 내부로터의 공전회전  $\theta_p$ 을 구동하는 펌프이거나, 출력하는 모터의 경우에는 식(3)로부터

$\Delta\theta_1 = \frac{1}{m-1}\Delta\theta_p$ 의 관계를 적용하면  $\Delta V_{AB}$ 는

$$\Delta V_{AB} = \frac{b}{2(m-1)}(r_{pA}^2 - r_{pB}^2)\Delta\theta_p \quad (9)$$

Fig. 2에서 내부로터와 외부로터 사이에는 외부로터 로브 갯수만큼 접촉점이 생기는데 접촉점 C0부터 Ch까지 생성되는 챔버를 흡입 챔버라고 가정할 경우에 접촉점 C0와 접촉점 Ch를 이용하여 전체 흡입 챔버의 용적변화  $\Delta V_{total}$ 를 정의 할 수 있다. 한 흡입 챔버의 A점 좌표는 다음 흡입 챔버의 B점 좌표에 해당하여서 서로 상쇄되어지게 되어서 전체 흡입 챔버의 용적변화  $\Delta V_{total}$ 은 최대 날개길이와 최소날개 길이만의 함수로 표현된다. 전체 흡입 챔버의 용적변화  $\Delta V_{total}$ 을 구동축의 미소 회전각으로 나누어준 변화율은

$$\frac{\Delta V_{total}}{\Delta\theta_1} = \frac{\sum_{i=1}^h \Delta V_{ABi}}{\Delta\theta_1} \quad (10)$$

$$= \frac{b}{2}(r_{pC_{hmax}}^2 - r_{pC_{0min}}^2)$$

$$\frac{\Delta V_{total}}{\Delta\theta_p} = \frac{\sum_{i=1}^h \Delta V_{ABi}}{\Delta\theta_p} \quad (11)$$

$$= \frac{b}{2(m-1)}(r_{pC_{hmax}}^2 - r_{pC_{0min}}^2)$$

여기서 h는 흡입 챔버의 갯수이며,  $r_{pC_{kmax}}$ 은 피치점과 접촉점 사이의 최대거리를 의미하고  $r_{pC_{0min}}$ 은 최소 거리를 의미한다. m이 짝수인 경우에  $h = \frac{m}{2}$ 이며, m이 홀수이면 자전회전  $\theta_1$ 을 구동하는 경우와 공전회전  $\theta_p$ 을 구동하는 경우에 각각 (12)식과 (13)식으로 주어진다.

$$h = \frac{m-1}{2} \quad \text{for} \quad \frac{2k\pi}{m(m-1)} \leq \theta_1 \leq \frac{(2k+1)\pi}{m(m-1)} \quad (12)$$

$$= \frac{m+1}{2} \quad \text{for} \quad \frac{(2k+1)\pi}{m(m-1)} \leq \theta_1 \leq \frac{(2k+2)\pi}{m(m-1)}$$

$$h = \frac{m-1}{2} \quad \text{for} \quad \frac{2k\pi}{m} \leq \theta_p \leq \frac{(2k+1)\pi}{m} \quad (13)$$

$$= \frac{m+1}{2} \quad \text{for} \quad \frac{(2k+1)\pi}{m} \leq \theta_p \leq \frac{(2k+2)\pi}{m}$$

여기서 k = 0, 1, 2,...m-1 이다.

모든 흡입 챔버들 총 용적의 평균 변화율  $\Delta V_{avg}/\Delta\theta_1$ 과  $\Delta V_{avg}/\Delta\theta_p$ 은 (10)식과 (11)식을 (12)식과 (13)식의 각도구간동안에 적분한 것을 해당각도로 나누어서 구해진다.

$$\frac{\Delta V_{avg}}{\Delta\theta_1} = \frac{\int_0^{2\pi/m(m-1)} \sum_{i=1}^h \Delta V_{ABi} d\theta_1}{2\pi/m(m-1)} \quad (14)$$

$$\frac{\Delta V_{avg}}{\Delta\theta_p} = \frac{\int_0^{2\pi/m} \sum_{i=1}^h \Delta V_{ABi} d\theta_p}{2\pi/m} \quad (15)$$

(14)식과 (15)식에 2 $\pi$ 를 곱하여 1회전 당 배제용적  $V_{2\pi}$ 이 구해진다.

$$V_{2\pi} = m(m-1) \int_0^{2\pi/m(m-1)} \frac{b}{2}(r_{pC_{hmax}}^2 - r_{pC_{0min}}^2) d\theta_1 \quad (16)$$

$$V_{2\pi} = m \int_0^{2\pi/m} \frac{b}{2(m-1)}(r_{pC_{hmax}}^2 - r_{pC_{0min}}^2) d\theta_p \quad (17)$$

시간 변화에 대한 챔버 용적 변화율을 순간유량으로 정의하고 이 영역이 나타내는 챔버의 면적은 각각의 중심으로부터 접촉점사이의 거리에 비례하기 때문에 다음과 같이 순간유량을 구할 수 있다.

$$Q(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V_{total}}{\Delta t} \quad (18)$$

$$= \frac{b}{2}(r_{pC_{hmax}}^2 - r_{pC_{0min}}^2)w_1$$

$$Q(t) = \frac{b}{2(m-1)}(r_{pC_{hmax}}^2 - r_{pC_{0min}}^2)w_p \quad (19)$$

(18)식에서  $w_1$ 는 자전회전 각속도이고, (19)식에서  $w_p$ 는 공전회전 각속도이다. 이러한 경우들에 대한 평균유량  $Q_{avg}$ 는 다음과 같다.

$$Q_{avg} = \int_0^{2\pi/m(m-1)} Q(t) d\theta_1 / [2\pi/m(m-1)] \quad (20)$$

$$= \frac{m(m-1)}{2\pi} \int_0^{2\pi/m(m-1)} \frac{b}{2}(r_{pC_{hmax}}^2 - r_{pC_{0min}}^2)w_1 d\theta_1$$

$$Q_{avg} = \int_0^{2\pi/m} Q(t) d\theta_p / (2\pi/m) \quad (21)$$

$$= \frac{m}{2\pi} \int_0^{2\pi/m} \frac{b}{2(m-1)}(r_{pC_{hmax}}^2 - r_{pC_{0min}}^2)w_p d\theta_p$$

### 3. 내·외부로터 자전 경우

#### 3.1 운동 해석과 접촉점 산출

내·외부로터의 중심점  $O_1$ 과  $O_2$ 가 공간상에 고정된 상태에서 내·외부로터가 각각 자전회전의 운동을 하는 경우에도 2장에서 설명한 외부로터가 고정된 상태에서 내부로터가 공·자전 운동의 경우와 유사하게 해석할 수 있다.

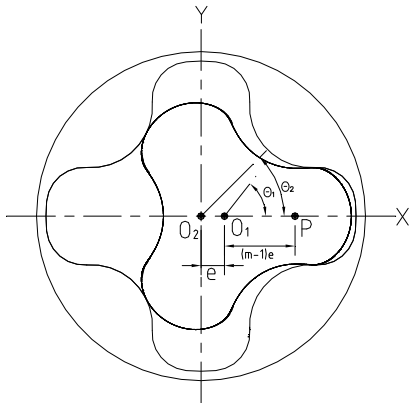


Fig. 4 Driving principle 2 : rotation  $\theta_1$  of inner rotor and rotation  $\theta_2$  of outer rotor

Fig. 1의 초기조건으로부터 내·외부로터의 운동은 Fig. 4에 표현된 바와 같이 내부로터의 자전회전  $\theta_1$ 과 외부로터의 자전회전  $\theta_2$ 으로 이루어진다. 공간상에 고정된 내부로터 중심점  $O_1$ 에 대한 피치점  $p$ 의 순간변위와 외부로터 중심  $O_2$ 에 대한 피치점 순간변위는 일치한다.

여기서 순간변위로 표현한 이유는 피치점의 위치는 공간 상에서 일정한데, 내·외부로터의 피치점에 대응하는 점의 미소변위를 의미하기 때문이다.

$$r_1 \theta_1 = r_2 \theta_2 \quad (22)$$

(22)식에 (1)식을 대입하면

$$\theta_1 = \frac{m}{m-1} \theta_2 \quad (23)$$

각 로브에서의 접촉점은 외부로터의 원호치형 중심점에서 피치점에 직선을 그었을 때 직선과 원호치형이 만나는 점이 된다는 것은 동일하게 적용된다. 외부로터 원형부분의 중심 좌표  $\vec{S}_k$ 는 회전각  $\theta_2$ 에 따라서 변화하며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \vec{S}_k &= X_k \vec{i} + Y_k \vec{j} \\ &= r_t \cos\left(\frac{2k}{m}\pi + \theta_2\right) \vec{i} + r_t \sin\left(\frac{2k}{m}\pi + \theta_2\right) \vec{j} \end{aligned} \quad (24)$$

여기서  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, m-1$ 이다.

고정점으로서 피치점  $p$ 의 좌표는

$$\vec{p} = m e \vec{i} + \vec{o} \quad (25)$$

피치점과 외부로터 원형부분의 중심 좌표  $\vec{S}_k$ 를 연결하는  $\vec{pS}_k$  직선 식은 아래와 같고,

$$\begin{aligned} Y &= \frac{Y_k}{X_k - m e} (X - m e) \\ &= \frac{r_t \sin\left(\frac{2k}{m}\pi + \theta_2\right)}{r_t \cos\left(\frac{2k}{m}\pi + \theta_2\right) - m e} (X - m e) \end{aligned} \quad (26)$$

중심  $S_k$ 인 외부로터 원형 식은 다음과 같다.

$$(X - X_k)^2 + (Y - Y_k)^2 = r_c^2 \quad (27)$$

(26)식과 (27)식의 교점이 접촉점  $C_k$  이 된다.

#### 3.2 회전날개 길이를 이용한 이론적 배제용적

내부로터와 외부로터가 각각 회전중심  $O_1$ 과  $O_2$ 에 대하여  $\theta_1$ 과  $\theta_2$  자전 회전하는 경우에 챔버 공간의 용적변화율, 배제용적, 순간유량 등들 또한 내부로터와 외부로터의 회전운동으로 표현될 수 있다.

Fig. 5에서 보여주는 인근한 두 접촉점 사이의 챔버 공간 VAB의 변화율  $\Delta V_{AB}$ 은 내부로터와 외부로터의 회전중심인  $O_1$ 과  $O_2$ 으로부터 접촉점 A와 B까지의 거리인 회전날개길이의 함수로써 다음과 같이 표현된다.

$$\Delta V_{AB} = \left[ \frac{1}{2} (r_{O_1A}^2 - r_{O_1B}^2) \Delta \theta_1 - \frac{1}{2} (r_{O_2A}^2 - r_{O_2B}^2) \Delta \theta_2 \right] b \quad (28)$$

여기서 중심점  $O_1$ 에 대한 내부로터의 회전  $\Delta \theta_1$ 는 챔버 공간의 용적을 증가시키는 효과를 가지는 반면에 중심점  $O_2$ 에 대한 외부로터의 회전  $\Delta \theta_2$ 는 챔버공간의 용적을 감소시키는 효과임을 의미한다.

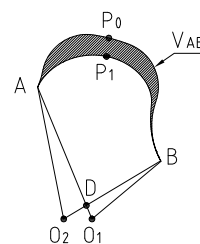


Fig. 5 Volume of a chamber between two contact points of A and B

(28)식에 (23)식의  $\Delta\theta_2 = \frac{m-1}{m}\Delta\theta_1$ 을 적용하여서 내부로터의 자전회전  $\theta_1$ 을 구동하는 펌프이거나, 내부로터의 축으로 출력하는 모터의 경우에 대한 결과식은 다음과 같다.

$$\Delta V_{AB} = \frac{1}{2}b[(r_{O_1A}^2 - r_{O_1B}^2) - (r_{O_2A}^2 - r_{O_2B}^2)\frac{m-1}{m}]\Delta\theta_1 \quad (29)$$

외부로터의 자전회전  $\theta_2$ 을 구동하는 펌프이거나, 외부로터의 축으로 출력하는 모터의 경우에 대한 결과식은 다음과 같다.

$$\Delta V_{AB} = \frac{1}{2}b[(r_{O_1A}^2 - r_{O_1B}^2)\frac{m}{m-1} - (r_{O_2A}^2 - r_{O_2B}^2)]\Delta\theta_2 \quad (30)$$

Fig. 4에서 모든 흡입 챔버들의 용적변화  $\Delta V_{total}$ 는 2장과 유사한 방법으로 유도할 수 있다. 한 흡입 챔버의 A점 좌표는 다음 흡입 챔버의 B점 좌표에 해당하여서 서로 상쇄되어지게 되어서 전체 흡입 챔버의 용적변화  $\Delta V_{total}$ 는

$$\Delta V_{total} = \sum_{i=1}^h \Delta V_{ABi} \quad (31)$$

$$= \frac{1}{2}b[(r_{O_1Amax}^2 - r_{O_1Bmin}^2) - (r_{O_2Amax}^2 - r_{O_2Bmin}^2)\frac{m-1}{m}]\Delta\theta_1$$

$$\Delta V_{total} = \sum_{i=1}^h \Delta V_{ABi}$$

$$= \frac{1}{2}b[(r_{O_1Amax}^2 - r_{O_1Bmin}^2)\frac{m}{m-1} - (r_{O_2Amax}^2 - r_{O_2Bmin}^2)]\Delta\theta_2 \quad (32)$$

여기서  $h$ 는 흡입챔버의 갯수이며,  $m$ 이 짝수인 경우에  $h = m/2$ 이며,  $m$ 이 홀수인 경우에 내부로터를 구동하는 경우와 외부로터를 구동하는 경우에 각각 다음과 같이 주어진다.

$$h = \frac{m-1}{2} \quad \text{for } \frac{2k\pi}{m-1} \leq \theta_1 \leq \frac{(2k+1)\pi}{m-1} \quad (33)$$

$$= \frac{m+1}{2} \quad \text{for } \frac{(2k+1)\pi}{m-1} \leq \theta_1 \leq \frac{(2k+2)\pi}{m-1}$$

$$h = \frac{m-1}{2} \quad \text{for } \frac{2k\pi}{m} \leq \theta_2 \leq \frac{(2k+1)\pi}{m} \quad (34)$$

$$= \frac{m+1}{2} \quad \text{for } \frac{(2k+1)\pi}{m} \leq \theta_2 \leq \frac{(2k+2)\pi}{m}$$

식 (31)~(34)에서  $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$  임.

모든 흡입 챔버들 총 용적의 평균 변화율  $\Delta V_{avg}/\Delta\theta_1$ 과  $\Delta V_{avg}/\Delta\theta_2$ 은 다음과 같이 표현할 수

있다.

$$\frac{\Delta V_{avg}}{\Delta\theta_1} = \frac{\int_0^{2\pi/(m-1)} \sum_{i=1}^h \Delta V_{ABi} d\theta_1}{2\pi/(m-1)} \quad (35)$$

$$\frac{\Delta V_{avg}}{\Delta\theta_2} = \frac{\int_0^{2\pi/m} \sum_{i=1}^h \Delta V_{ABi} d\theta_2}{2\pi/m} \quad (36)$$

(35)식과 (36)식에  $2\pi$ 를 곱하여 1회전당 배제용적  $V_{2\pi}$ 이 구해진다.

$$V_{2\pi} = 2\pi \cdot \frac{\Delta V_{avg}}{\Delta\theta_1} \quad (37)$$

$$= (m-1) \int_0^{2\pi/m} \sum_{i=1}^h \Delta V_{ABi} d\theta_1$$

$$V_{2\pi} = 2\pi \cdot \frac{\Delta V_{avg}}{\Delta\theta_2} \quad (38)$$

$$= m \int_0^{2\pi/m} \sum_{i=1}^h \Delta V_{ABi} d\theta_2$$

순간유량  $Q(t)$ 도 유사한 방법으로 다음과 같이 구해진다.

$$Q(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V_{total}}{\Delta t}$$

$$= \frac{b}{2}[(r_{O_1Amax}^2 - r_{O_1Bmin}^2) - (r_{O_2Amax}^2 - r_{O_2Bmin}^2)\frac{m-1}{m}]w_1 \quad (39)$$

$$Q(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V_{total}}{\Delta t}$$

$$= \frac{b}{2}[(r_{O_1Amax}^2 - r_{O_1Bmin}^2)\frac{m}{m-1} - (r_{O_2Amax}^2 - r_{O_2Bmin}^2)]w_2 \quad (40)$$

(39)식과 (40)식에서  $w_1$ 와  $w_2$ 는 각각 내부로터와 외부로터의 회전각속도이다.

평균유량은 다음과 같다.

$$Q_{avg} = \int_0^{2\pi/(m-1)} Q(t) d\theta_1 / [2\pi/(m-1)] \quad (41)$$

$$= \frac{m-1}{2\pi} \int_0^{2\pi/(m-1)} \frac{b}{2}[(r_{O_1Amax}^2 - r_{O_1Bmin}^2) - (r_{O_2Amax}^2 - r_{O_2Bmin}^2)\frac{m-1}{m}]w_1 d\theta_1$$

$$Q_{avg} = \int_0^{2\pi/m} Q(t) d\theta_2 / (2\pi/m) \quad (42)$$

$$= \frac{m}{2\pi} \int_0^{2\pi/m} \frac{b}{2}[(r_{O_1Amax}^2 - r_{O_1Bmin}^2)\frac{m}{m-1} - (r_{O_2Amax}^2 - r_{O_2Bmin}^2)]w_2 d\theta_2$$

#### 4. 접촉점 사이의 용적을 이용한 이론적 배제용적

##### 4.1 이론적 배제용적

제로터 펌프/모터의 1회전 당 배제용적  $V_{2\pi}$ 를 산출하는 다른 방법으로서 Fig. 3과 Fig. 5에서 보여주는 내·외부로터 접촉점 사이의 챔버 용적을 이용하는 방법을 고려할 수 있다.

구동축이 1회전하는 동안에 각각의 챔버는 팽창과 수축의 주기운동을 하게 되며, 각각의 챔버는 최대용적  $V_{max}$ 와 최소용적  $V_{min}$ 의 차이 용적을 흡입하여 토출하게 된다. 구동축이 1회전하는 동안에 흡입·토출하는 챔버의 갯수는 내·외륜의 자전과 공전운동에 연관된 운동의 형태와 선택된 구동축의 종류에 따라서 결정되어진다. 외부로터를 고정된 상태에서 내부로터 공·자전을 운동 형태에서 내부로터의 자전회전운동을 구동축에 연결하는 경우에는 구동축이 1회전하는 동안에  $m(m-1)$ 개의 챔버가 팽창과 수축을 반복하게 되어서 배제용적  $V_{2\pi}$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$V_{2\pi} = m(m-1)(V_{max} - V_{min}) \quad (43)$$

내부로터의 공전운동을 구동축에 연결하는 경우에는 구동축이 1회전하는 동안에  $m$ 개의 챔버가 팽창과 수축을 반복하게 되어서 배제용적  $V_{2\pi}$ 는 다음과 같다.

$$V_{2\pi} = m(V_{max} - V_{min}) \quad (44)$$

내·외부로터의 중심점  $O_1$ 과  $O_2$ 가 공간상에 고정된 상태에서 내·외부로터가 각각 자전회전의 운동을 하는 경우에는 구동축이 외부로터에 연결된 경우와 내부로터를 구동하는 경우에 각각 다음과 같다.

$$V_{2\pi} = m(V_{max} - V_{min}) \quad (45)$$

$$V_{2\pi} = (m-1)(V_{max} - V_{min}) \quad (46)$$

##### 4.2 챔버 용적

제로터 펌프/모터의 배제용적과 유량에 대한 이론식으로서 (43)~(46)식까지의 공식과 같이 챔버용적을 이용하는 방법은 매우 복잡하다. 챔버 용적을 구하기 위해서 Fig. 5에서 보여주는 두 접촉점사이의 챔버 면적을 산출하여야 하는데, 아래의 개념식에서 보여주는 바와 같이 챔버 평면적  $A_{AB}$ 를 산출하는 과정이 매우 복잡하기 때문이다.

$$A_{AB} = A_{O_2AP_1BO_2} - A_{O_1AP_1BO_1} - A_{O_2ADO_2} + A_{O_1BDO_1} \quad (47)$$

여기서 A는 하침자의 윤곽으로 이루어지는 도형의 내부면적을 의미한다.

더구나 내부로터의 윤곽함수는 내부로터의 중심점  $O_1$ 에 대한 좌표계의 함수로 주어지며, 외부로터는  $O_2$ 에 대한 좌표계의 함수로 주어지기 때문에 내부로터의 윤곽면적과 외부로터의 윤곽면적을 각각 다른 좌표계에서 구해야 하여서 복잡성을 가중시킨다. 이 성질의 접촉점 사이의 용적을 (47)식의 방법을 적용하는 연구를 시도하였으며, 참고문헌 2)의 내용에서 용적을 이용하는 방법의 복잡함을 확인할 수 있다.

#### 5. 수치해석을 이용한 이론적 배제용적 검증

내부로터와 외부로터 사이의 접촉점을 수치 해석적 방법으로 나타내보고, 내부로터와 외부로터의 회전중심에서 접촉점까지의 날개길이를 이용하여 배제용적을 산출하는 방법을 2장과 3장에서 제시하였다.

제시된 방법의 타당성을 확인하기 위하여 외부로터가 고정된 상태에서 내부로터가 공·자전하는 경우를 대상으로 회전날개길이법으로 구한 배제용적과 외부로터와 내부로터의 접촉 챔버의 최대용적과 최소용적의 차이를 이용하여 이론적 배제용적을 산출하는 방법의 결과와 비교하였다. 회전날개 길이법의 배제용적을 산출하는 과정에서 MATLAB이 이용되었다.

앞에서 설명한 바와 접촉점 사이의 최대용적과 최소용적을 이론적으로 구하는 과정이 난해하기 때문에 CAD 윤곽면적 산출 기능을 이용하여 수치해석적으로 산출하였다.

Table 1 Specification of gerotor pump/motor used in numerical analysis

사양 내용	데이터 (mm)
외부로터 로부수	4
내부로터 로부수	3
편심(e)	2.5
외부로터 원형부분 반경( $r_c$ )	6.5
O2 - Sk 의 거리( $r_t$ )	16.5
로터 두께 (b)	1.5

Table 1에서 수치해석에 사용된 제로터 펌프/모터의 기본 사양을 보여주며, Fig. 6에서 기본 사양의 외부로터와 내부로터를 CAD 프로그램으로 설계한 프로파일의 모습을 보여준다. Fig. 6은 내부로터의 회전각이 0° 도 일때 내부로터와 외부로터의 상태를 나타내고 있다. Fig. 7에서는 MATLAB 해석 프로그램의 플로우차트를 보여주며, Fig. 8에서 프로그램 문서코드의 한 부분을 보여준다.

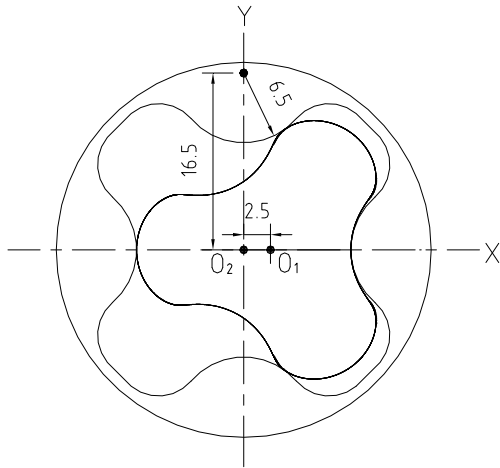


Fig. 6 Profiles of inner rotor and outer rotor used in the analysis

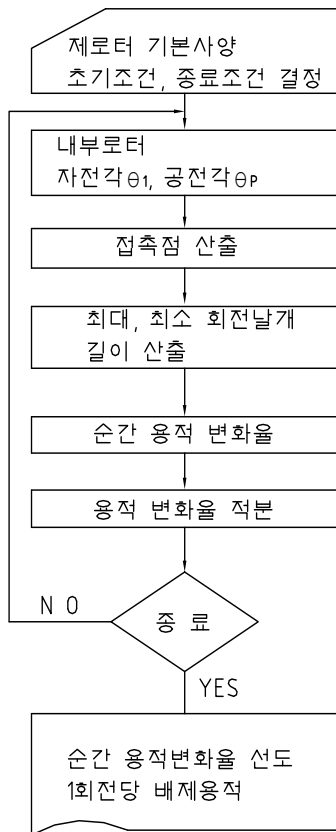


Fig. 7 Flowchart of vane length method program

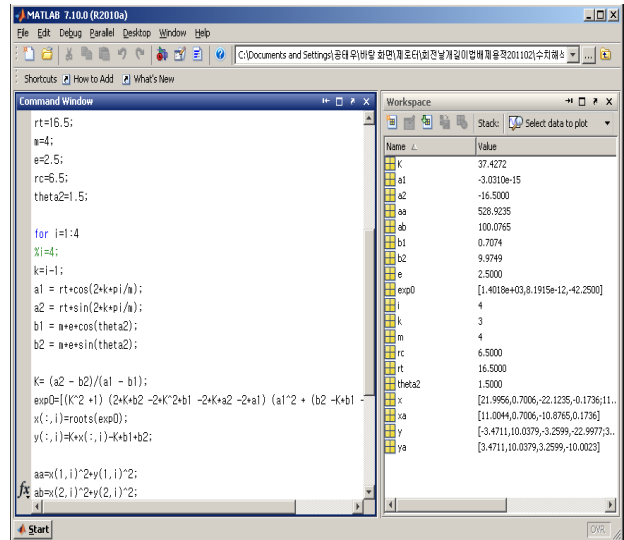


Fig. 8 A view of the MATLAB numerical analysis program

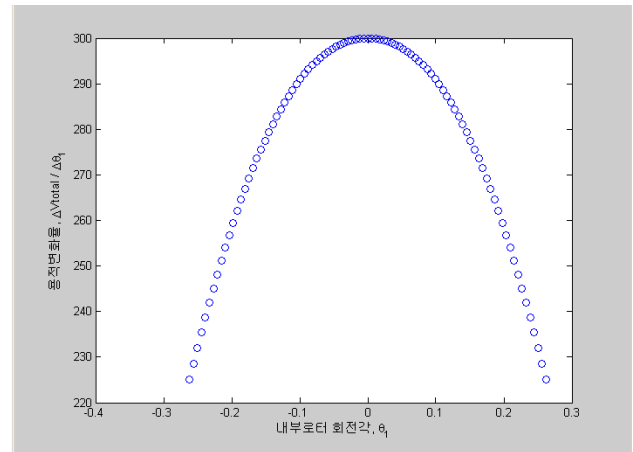


Fig. 9 Change rate of the volumetric displacement

Fig. 9에서는 3절의 (10)식에 대한 용적변화율의 그래프를 나타낸 것이다.

이때, 수평축의 물리 값이 내부로터 자전회전각인데, 자전회전각  $\theta_1$ 가 약  $\pm 0.1454 \text{ rad}$ 인 지점에서 용적변화율이 평균용적변화율과 동일한 지점에 해당하는데 여기에  $2\pi$ 를 곱한 1회전당 배제용적의 결과값은 Table 2의 좌측에서 보여준다. 이러한 결과 값은 4장에서 설명한 접촉점사이의 용적을 이용한 방법의 결과인 Table 2의 우측의 결과값과 거의 동일한 결과를 보이고 있다.

Fig. 10에서 외부로터가 구동하면서 외부로터의 회전각이 180° 일때 최대면적을 가지는 챔버와 최소면적을 가지는 챔버의 모습을 보여준다. 이때, 최대면적을 가지는 챔버의 면적은  $115.80 \text{ mm}^2$ 이며 최소면적을 가지는 챔버의 면적은  $18.51 \text{ mm}^2$ 의 면적을 가지며 로터의 두께는  $1.5 \text{ mm}$ 이다.



Table 2 Volumetric displacement for 1 revolution

배제용적 검증 결과	
회전날개 길이를 이용한 배제용적	접촉점 사이의 용적을 이용한 배제용적
$1752.80\text{mm}^3/\text{rev}$	$1751.22\text{mm}^3/\text{rev}$

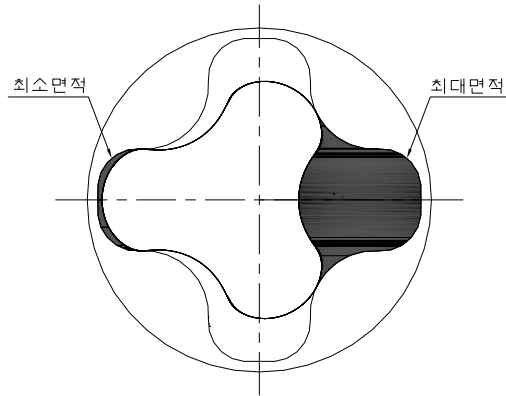


Fig. 10 The area of the chamber

Table 2에서는 회전날개 길이이용법 산출 방법과 접촉점 사이의 용적을 이용한 산출 방법을 비교 한 결과를 나타내고 있다. 비교 결과  $1.58\text{mm}^3/\text{rev}$ 만큼 차이가 나타났는데 그 이유로는 CAD 프로그램 상에서 나타나는 오차라고 사료된다.

## 5. 결 론

본 연구의 주요 결론은 다음과 같이 요약된다.

1) 제로터 펌프/모터의 운동 형태로서 외부로터 고정 상태에서 내부로터가 공·자전 운동하는 경우와 내·외부로터가 자전 회전하는 두 가지 경우에 대하여 배제용적과 유량을 구하는 이론식들을 유도하고, 배제용적을 산출함에 있어서 내부로터와 외부로터의 회전중심에서 접촉점까지의 회전날개길이를 이용하여 산출하는 방법을 제시하였다.

2) 회전날개길이법을 적용하여 얻어진 배제용적 결과를 접촉점 사이의 챔버 용적을 이용한 배제용적 산출 방법의 결과와 비교함으로써 회전날개길이를 이용하는 방법의 이론 결과식들이 타당함을 조사하였다. 비교 및 검토 한 결과로서 내부로터와 외부로터의 접촉점 사이의 용적을 이용하여 배제용적을 산출하는 방법과 회전중심에서 접촉점까지의 길이를 이용하여 배제용적을 산출하는 방법과 동일한 결과를 얻을 수 있다는 결론을 얻을 수 있었다.

## 후 기

본 연구는 금오공과대학교 학술연구비 의하여 연구된 논문입니다.

## 참고 문헌

- 1) 이성철, “원형조합곡선에 의한 제로터 내부로터의 형상설계”, Journal of the KSTLE, Vol. 22, No. 2, April 2006, pp 79-86, The Korean Society of Tribologists & Lubrication Engineers
- 2) 이성철, 이성남, “유압모터에 사용되는 제로터의 설계 및 해석”, 한국윤활학회지, 제11권, 제2호, pp.63-70, 1955
- 3) 김재훈, 박준홍, 정성운, 손진혁, 김철, “지로터 오일 펌프의 성능 향상을 위한 치형의 최적 설계”, 한국정밀공학회지, 제22권 제5호, pp.28-36, 2005
- 4) 김재훈, 김철, “지로터 오일 펌프용 통합적 설계 자동화 시스템 개발”, 한국정밀공학회지, 제23권 제2호, pp.88-96, 2006
- 5) 김재훈, 김철, 김창호, “제로터 오일 펌프 로버형상에 관한 최적설계”, 한국정밀공학회지, 제23권 제4호, pp.124-131, 2006
- 6) D.W. Dudley, "Handbook of Practical Gear Design", pp.1.33, McGraw-Hill, New York, 1984
- 7) 정성운, 한승무, 김철, “타원의 치형 형상을 갖는 로터 설계 자동화 시스템 개발”, 한국정밀공학회지, 제26권 제 1호, pp. 120-129, 2009
- 8) 서종수, 정한식, 정효민, “저속 고토오크 제로터 유압모터의 최적 이 끝 틈새를 갖는 제로터 설계 연구”, 한국동력기계공학회지, 제10권 제4호, pp.119-126, 2006
- 9) 남윤주, 박면관, “제로터 펌프의 측판 설계”, 대한기계학회 논문집 B권, 제28권 제4호, pp.406-414, 2004
- 10) J. R. Colbourne, "Gerr Shape and Theoretical Flow Rate in Internal Gear Pumps," Trans. of the CSME, Vol.3, No.4, pp.215-223, 1975.
- 11) C. B. Tsay and C. Y. Yu., "Mathematical Model for the Profile of Gerotor Pumps.," J. CSME, Vol.10, No.1, pp.41-47, 1989.
- 12) C. Y. Yu and C. B. Tsay, athematical Model of Gerotor Pump Applicable to Its Characteristic Study," J. CSME, Vol.11, No.4, pp.385-391, 1990.