

종속 관계의 스트레스-강도 모형

김대경* · 김진우** · 박동호**†

전북대학교 통계학과* · 한림대학교 금융정보통계학과**

Stress-Strength model with Dependency

Dae Kyung Kim* · Jinwoo Kim** · Dong Ho Park**†

Dept. of Statistics, Chonbuk National University* ·
Dept. of Finance & Information Statistics, Hallym University**

Abstract

We consider the stress-strength model in which a unit of strength T_2 is subjected to environmental stress T_1 . An important measure considered in stress-strength model is the reliability parameter $R = P(T_2 > T_1)$. The greater the value of R is, the more reliable is the unit to perform its specified task. In this article, we consider the situations in which T_1 and T_2 are both independent and dependent, and have certain bivariate distributions as their joint distributions. To study the effect of dependency on R , we investigate several bivariate distributions of T_1 and T_2 and compare the values of R for these distributions. Numerical comparisons are presented depending on the parameter values as well.

Keywords : Stress-Strength model, Reliability, Bivariate Distribution, Weibull, Gamma, Dependency

† 교신저자 dhpark@hallym.ac.kr

논문접수일 : 2011년 08월 14일 논문수정일 : 2011년 09월 27일 게재확정일 : 2011년 12월 02일

1. 서론

이 논문에서 고려하는 스트레스-강도모형에 대한 연구는 오랫동안 많은 학자들에 의하여 수행되어 왔으며 다양한 분야에 응용되고 있다. 어떤 부품이나 시스템은 대부분의 경우 일정한 환경적인 스트레스에 노출되어 있다. 이러한 시스템의 스트레스와 강도의 크기를 나타내는 확률변수를 각각 T_1 과 T_2 로 나타낸다고 하자. 이 경우 $R = P(T_2 > T_1)$ 은 시스템이 가동되는 확률을 나타내며 따라서 시스템의 신뢰도 모수로 해석될 수 있다. Downton(1973)은 R 에 대한 최소분산 불편 추정량을 유도하였으며 Church and Harris (1970)와 Reiser and Guttman(1986)등은 신뢰도 모수의 신뢰구간에 대한 근사값에 관한 연구결과를 얻었다. 그 이외에도 신뢰도 모수 R 의 추정과 검증에 관한 많은 결과들이 발표되었는데 그때까지의 연구결과들은 Johnson(1988)에서 찾을 수 있다. 그 이후 Weerahandi and Johnson(1992)는 T_1 과 T_2 가 서로 독립이고 각각 정규분포를 따르는 경우의 신뢰도에 관한 검증방법을 제안하였다.

R 은 시스템의 신뢰도를 나타내는 모수이외에도 다른 분야에서의 의미 있는 해석이 또한 가능하다. 어떤 시스템에 대하여 수명시험을 통하여 고장자료를 얻는 경우 모든 시료(test unit)에 대한 완전 자료를 얻는 대신에 불완전 자료를 얻게 되는 것이 대부분이다. 불완전 자료중의 하나인 임의중단자료인 경우 관측되는 고장자료는 $(T_{2i}, \delta_i), i = 1, \dots, n$, 의 형태로 표시된다. 여기에서 T_{2i} 는 시스템의 수명을 나타내고 δ_i 는 다음과 같이 표시된다.

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & T_{2i} > T_{1i} \\ 1, & T_{2i} < T_{1i} \end{cases}$$

확률변수 $T_{1i}, i = 1, 2, \dots, n$ 는 시스템의 임의절단시점을 나타낸다. 이 경우, 만일 T_{11}, \dots, T_{1n} 은 분포함수 F 를 가지는 iid 확률변수이고 T_{21}, \dots, T_{2n} 은 분포함수 G 를 가지는 iid 확률변수라고 하면 R 은 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$\begin{aligned} R &= P(T_2 > T_1) \\ &= \int_0^{\infty} \bar{G}(t) dF(t) \end{aligned}$$

이때 R 의 값은 임의절단자료에서 시스템의 고장시간이 관측되는 확률로 해석될 수 있다. 신뢰도 모수 R 의 추정 및 성질에 관하여는 현재까지 많은 논문이 문헌에 발표되어 왔으며 흥미있는 많은 분야에 응용되고 있다. Yum and Kim(1984)와 Jeong and Kim(1995)은 임의절단자료를 이용한 R 의 추정 문제를 다루었고 Yum and Kim(1985)은 R 에 대한 베이저안 추정값을 제안하였다. 임의절단자료를 이용한 분포함수의 추정에는 Kaplan and Meier (1958)가 제안한 PL estimator가 주로 응용되었다.

이 논문에서는 T_1 과 T_2 의 이변량 분포함수에 대하여 중점적으로 다루어 보려고 하며 각각의

이변량 분포함수에 대하여 R 의 값을 계산하는 연구를 수행한다. 현재까지의 R 에 대한 대부분의 연구는 추정 및 검정에 집중되어 왔으며 T_1 과 T_2 가 특정한 분포를 가지는 경우의 R 의 값에 관한 계산과 모수들의 변화에 따르는 R 의 패턴변화에 대하여는 매우 제한적인 연구가 수행되었다. 이번 연구에서는 특히 T_1 과 T_2 가 종속인 경우도 함께 고려 함으로서 T_1 과 T_2 의 독립성을 가정하였던 기존의 연구결과를 종속적인 경우로 확대시키려고 한다. 일반적으로 보다 많은 스트레스를 받는 경우에는 보다 큰 강도를 가지는 시스템을 장착하는 것이 현실적이다. 즉, 자동차의 엔진이나 타이어 등이 좋은 예라고 할 수 있다. 자동차 타이어의 경우에는 보다 강도가 높은 타이어가 보다 많은 스트레스를 받는 하중이 큰 자동차에 사용되는 것이 보다 실제적이기 때문이다. 그러나 종속적인 관계를 고려한 스트레스-강도모형에 관한 연구 결과는 현재까지 극히 제한적인 것으로 보인다.

지금까지 발표된 많은 문헌에서도 종속적인 관계를 고려한 다양한 모형이 제안되어왔다. Hougaard(1986)은 다변량 고장분포함수를 제안하였으며 변수들의 종속관계를 특정 모수에 의하여 모형화하였다. 또한 Hougaard, Harvald and Holm(1992)은 이변량 생존 자료를 이용하여 여러 가지 형태의 분포함수를 고려한 동성의 쌍둥이들의 생존(survival)에 관한 모형을 연구하였다. 또한 Fan, Prentice and Hsu(2000)은 이변량 고장분포함수에 근거한 종속성을 측정하기 위하여 가중종속모수 (weighted dependence measure)들의 클래스를 연구하였으며 이러한 모수들에 대한 비모수적 추정값을 제안하고 그 성질들을 발표하였다. 그 이외에도 많은 연구자들에 의하여 다변량 고장분포함수에 관한 연구가 수행되었는데 특히 변수들의 종속성에 대한 연구가 많은 관심을 끌었다. 본 연구에서는 여러 가지 형태의 이변량 분포함수를 고려하여 R 의 값을 정량적으로 결정하고 각 모수들의 변화에 따르는 R 의 민감도에 대하여 중점적으로 연구한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 독립적인 지수분포, 감마분포 및 와이블분포와 종속적인 이변량 지수분포와 이변량 감마분포를 소개하고 그 특성을 검토한다. 3절에서는 여러가지 형태의 신뢰도 함수에 대하여 신뢰도 모수 R 과 기타 관련모수들에 관한 계산방법을 제시하고 공식을 유도한다. 4절에서는 종속적인 신뢰도함수를 가정한 경우의 R 과 상관계수 ρ 에 대한 계산결과를 표를 제시하고 패턴에 관한 관찰결과를 논의한다. 결론과 향후 연구 과제는 5절에 주어진다.

2. T_1 과 T_2 의 이변량 분포함수 (Bivariate Distribution)

이 절에서는 두 개의 변수 T_1 과 T_2 에 대한 다양한 형태의 모수적 분포함수를 고려하며 각각의 분포함수를 정의한다. 신뢰도 모수 R 의 계산과 분포함수의 모수들에 의한 민감도 연구를 위하여 고려하는 T_1 과 T_2 의 이변량 분포함수는 다음과 같다.

a) 독립적인 지수분포 (Independent exponential distribution)

T_1 과 T_2 가 서로 독립이고 고장률이 각각 $\alpha > 0$ 과 $\beta > 0$ 인 지수분포를 따르는 경우로서

다음과 같은 신뢰도 함수 \bar{F} 와 \bar{G} 를 가진다.

$$\bar{F}(t_1) = e^{-\alpha t_1}, \quad \bar{G}(t_2) = e^{-\beta t_2}, \quad t_1 \geq 0, t_2 \geq 0. \quad (2.1)$$

b) 독립적인 감마분포 (Independent gamma distribution)

이 경우에는 T_1 과 T_2 가 서로 독립이고 각각 모수가 (λ_1, α) 와 (λ_2, β) 인 감마분포를 따르는 경우로서 다음과 같은 확률밀도함수 $f(t_1)$ 와 $g(t_2)$ 를 가진다. 여기에서 λ_1 과 λ_2 는 모양모수 (shape parameter) 이고 α 와 β 는 척도모수 (scale parameter) 를 나타낸다.

$$f(t_1) = \frac{1}{\Gamma(\lambda_1)} \alpha^{\lambda_1} t_1^{\lambda_1-1} e^{-\alpha t_1}, \quad \alpha, \lambda_1 > 0, t_1 \geq 0. \\ g(t_2) = \frac{1}{\Gamma(\lambda_2)} \beta^{\lambda_2} t_2^{\lambda_2-1} e^{-\beta t_2}, \quad \beta, \lambda_2 > 0, t_2 \geq 0. \quad (2.2)$$

c) 독립적인 와이블분포 (Independent Weibull distribution)

T_1 과 T_2 가 서로 독립이고 각각 모수가 (λ_1, α) 와 (λ_2, β) 인 와이블분포를 따르는 경우로서 그들의 신뢰도함수 $\bar{F}(t_1)$ 와 $\bar{G}(t_2)$ 는 각각 다음과 같이 표시된다.

$$\bar{F}(t_1) = e^{-\alpha t_1^{\lambda_1}}, \quad \alpha, \lambda_1 > 0, t_1 \geq 0. \\ \bar{G}(t_2) = e^{-\beta t_2^{\lambda_2}}, \quad \beta, \lambda_2 > 0, t_2 \geq 0. \quad (2.3)$$

d) 이변량 지수분포 (Bivariate exponential distribution)

주어진 환경에서 3개의 서로 독립적인 충격 (shock) 이 두 개의 시스템에 가해질 수 있다고 가정하자. 이 경우 충격 1과 2는 각각 시스템 1과 2의 고장의 유발시키고 충격 3은 시스템 1과 2의 고장을 동시에 발생시킨다고 가정한다. 만일 확률변수 U_1 과 U_2 가 각각 시스템 1과 2의 고장발생시간을 나타내고 확률변수 U_{12} 은 시스템 1과 2가 동시에 고장날 때까지 걸리는 시간을 나타내며 U_1, U_2, U_{12} 가 서로 독립이고 고장률이 각각 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}$ 인 지수분포를 따른다고 가정하였을 때 시스템 1과 2의 수명 T_1, T_2 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$T_1 = \min(U_1, U_{12}), \quad T_2 = \min(U_2, U_{12}).$$

이 경우 확률변수 T_1 과 T_2 는 종속적인 경우로서 다음과 같은 이변량 신뢰도함수를 따른다.

$$\bar{F}(t_1, t_2) = e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} \max(t_1, t_2)}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12} > 0, t_1, t_2 \geq 0. \quad (2.4)$$

이 모형은 3개의 모수 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}$ 에 의하여 특징지어지는 분포함수로서 T_1 과 T_2 의 종속성을 나타내는 상관계수는 이러한 모수들의 함수로 나타낼 수 있다. 또한 이변량 지수 분포를 따르는 T_1 과 T_2 의 주변 확률밀도함수는 각각 지수분포를 따르며 다음과 같은 신뢰도함수를 가진다.

$$\begin{aligned} \bar{F}(t_1) &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})t_1}, & t_1 \geq 0, \\ \bar{G}(t_2) &= e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})t_2}, & t_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

e) 이변량 감마분포 (Bivariate gamma distribution)

만일 확률변수 T_1 과 T_2 가 다음과 같은 이변량 신뢰도함수를 갖는다고 하자.

$$\bar{F}(t_1, t_2) = e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} t_2} [(1 + \lambda_1 t_1)(1 + \lambda_2 t_2) + \lambda_{12} t_1 + \lambda_{12}(t_2 - t_1)(1 + \lambda_1 t_1)], \quad t_1 \leq t_2 \tag{2.6}$$

이 경우 T_1 과 T_2 의 주변 확률밀도함수는 척도모수는 2 이고 모양모수는 각각 $(\lambda_1 + \lambda_{12})$ 와 $(\lambda_2 + \lambda_{12})$ 를 가지는 감마분포를 따르며 다음과 같은 신뢰도함수를 가진다.

$$\begin{aligned} \bar{F}(t_1) &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})t_1} [1 + (\lambda_1 + \lambda_{12})t_1], & t_1 \geq 0, \\ \bar{G}(t_2) &= e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})t_2} [1 + (\lambda_2 + \lambda_{12})t_2], & t_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

이러한 형태의 이변량 감마분포는 Barlow and Proschan(1981) [138쪽, $k=2$ 인 경우]에서 소개되었으며 이 논문에서 R 의 계산을 위하여 인용하려고 한다.

3. 신뢰도 모수, $R = P(T_2 > T_1)$ 의 계산

이 절에서는 2절에서 정의된 여러 가지 형태의 이변량 신뢰도함수를 가지는 확률변수 T_1 과 T_2 에 대하여 각각의 평균, 분산과 신뢰도 모수 R 을 계산하고 특히 식(2.4)와 (2.6)에서 정의된 신뢰도함수를 가지는 이변량 지수분포와 이변량 감마분포에 대하여는 종속 관계를 나타내는 T_1 과 T_2 의 상관계수에 대한 식을 유도함으로서 종속성과 신뢰도 모수의 관계를 신뢰도함수 모수들의 함수로 나타낸다.

a) 독립적인 지수분포

T_1 과 T_2 이 각각 식(2.1)에 주어진 확률밀도함수를 가지는 경우 평균 $\mu_1 = \frac{1}{\alpha}$, $\mu_2 = \frac{1}{\beta}$ 와 분산 $\sigma_1^2 = \frac{1}{\alpha^2}$, $\sigma_2^2 = \frac{1}{\beta^2}$ 을 가진다는 것은 잘 알려져 있으며 이 경우 신뢰도모수 R 은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} R = P(T_2 > T_1) &= \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \alpha e^{-\alpha t} dt \\ &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta}. \end{aligned}$$

b) 독립적인 감마분포

이 경우 T_1 과 T_2 의 평균은 각각 $\mu_1 = \frac{\lambda_1}{\alpha}$, $\mu_2 = \frac{\lambda_2}{\beta}$ 이고 분산은 $\sigma_1^2 = \frac{\lambda_1}{\alpha^2}$, $\sigma_2^2 = \frac{\lambda_2}{\beta^2}$ 으로 표시된다. T_1 과 T_2 의 확률밀도함수는 식(2.2)에 주어졌으며 신뢰도모수 R 은 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$R = P(T_2 > T_1) = \frac{1}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)} \alpha^{\lambda_1} \beta^{\lambda_2} \int_0^{\infty} \int_{t_1}^{\infty} t_2^{\lambda_2-1} e^{-\beta t_2} t_1^{\lambda_1-1} e^{-\alpha t_1} dt_2 dt_1 \quad (3.1)$$

이러한 관계식을 이용하여 R 의 값을 수치적으로 계산하는 것은 가능하나 모양모수 λ_1 과 λ_2 의 함수로서의 R 에 대한 공식은 유도되지 않는다.

c) 독립적인 와이블분포

두 개의 확률변수 T_1 과 T_2 가 식(2.3)에 주어진 신뢰도함수를 가진다고 하면 각각 평균은 $\mu_1 = \alpha^{-(1/\lambda_1)} \Gamma(1 + \lambda_1^{-1})$, $\mu_2 = \beta^{-(1/\lambda_2)} \Gamma(1 + \lambda_2^{-1})$ 이고 분산은 $\sigma_1^2 = \alpha^{-(2/\lambda_1)} [\Gamma(1 + 2\lambda_1^{-1}) - \Gamma^2(1 + \lambda_1^{-1})]$, $\sigma_2^2 = \beta^{-(2/\lambda_2)} [\Gamma(1 + 2\lambda_2^{-1}) - \Gamma^2(1 + \lambda_2^{-1})]$ 으로 표시된다. 이 경우 신뢰도모수 R 은 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$R = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, & \lambda_1 = \lambda_2 \\ \int_0^{\infty} \alpha \lambda_1 t^{\lambda_1-1} e^{-(\alpha t^{\lambda_1} + \beta t^{\lambda_2})}, & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases} \quad (3.2)$$

만일 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 인 경우에는 $R = P(T_2 > T_1) = P(T_2^\lambda > T_1^\lambda)$ 의 관계를 이용하여 R 의

값이 계산되며 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 의 경우에는 식(3.2)에 의해서 주어진 관계식을 이용하여 R 의 값이 λ_1 과 λ_2 의 함수로서 수치적으로 얻어진다. λ_1 과 λ_2 의 변화에 따르는 R 의 변화추이는 4절의 <그림 4.2>와 <그림 4.3>에 나타내진다.

d) 이변량 지수분포

종속관계를 가지는 두 개의 확률변수 T_1 과 T_2 가 식(2.4)에 주어진 신뢰도함수를 가지면 이변량 지수분포를 따른다고 한다. 여기에서 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$ 라고 놓자. 그러면 T_1 과 T_2 의 공분산(covariance), σ_{12} , 은 다음과 같이 계산되어진다. 즉,

$$\sigma_{12} = \frac{\lambda_{12}}{\lambda(\lambda_1 + \lambda_{12})(\lambda_2 + \lambda_{12})} .$$

또한 T_1 과 T_2 의 주변 확률분포는 각각 식(2.5)에 주어진 지수분포를 따르므로 평균은 $\mu_1 = (\lambda_1 + \lambda_{12})^{-1}$, $\mu_2 = (\lambda_2 + \lambda_{12})^{-1}$ 이고 분산은 $\sigma_1^2 = (\lambda_1 + \lambda_{12})^{-2}$, $\sigma_2^2 = (\lambda_2 + \lambda_{12})^{-2}$ 으로 표시된다. T_1 과 T_2 의 공분산과 분산을 이용하면 상관계수(correlation coefficient), ρ , 는 다음과 같이 얻어진다. 즉,

$$\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\lambda_{12}}{\lambda} = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}} .$$

이 식은

$$\lambda_{12} = \frac{\rho}{1 - \rho} (\lambda_1 + \lambda_2)$$

과 동치이며 따라서 λ_1 과 λ_2 가 고정된 상수인 경우 λ_{12} 와 ρ 는 양의 관계(positive relation)를 가진다는 것을 알 수 있다.

이변량 지수분포의 신뢰도모수 R 을 계산하기 위하여는 식 (2.4)에 주어진 T_1 과 T_2 의 이변량 신뢰도함수 $\bar{F}(t_1, t_2)$ 를 이용하여 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\begin{aligned} R = P(T_2 > T_1) &= \int_0^\infty \int_{t_1}^\infty f_1(t_1, t_2) dt_2 dt_1 \\ &= (1 - \rho) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{aligned} \tag{3.3}$$

여기에서 $f_1(t_1, t_2)$ 는 T_1 과 T_2 의 결합 확률밀도함수이며 만일 T_1 과 T_2 가 서로 독립적 이면, 즉 $\rho = 0$ 이면 R 의 값은 독립적인 지수분포의 경우와 같아지게 된다. 만일 λ_2 의 값이 고정된

경우에는 $\lambda_1 \rightarrow \infty$ 일 때 R 의 값이 $1 - \rho$ 에 수렴한다는 것을 식(3.3)으로 부터 알 수 있으며 또한 고정된 λ_1 에 대하여는 $\lambda_2 \rightarrow \infty$ 일 때 R 은 0에 수렴하게 된다.

e) 이변량 감마분포

두 개의 확률변수 T_1 과 T_2 가 이변량 감마분포를 따르는 경우의 신뢰도함수는 식(2.6)에 서 정의되었으며 또한 변수들의 주변 신뢰도함수는 식(2.7)에 주어진 것과 같이 각각 감마 분포를 따른다. 따라서 T_1 과 T_2 의 평균은 $\mu_1 = 2(\lambda_1 + \lambda_{12})^{-1}$, $\mu_2 = 2(\lambda_2 + \lambda_{12})^{-1}$ 이고 분산은 $\sigma_1^2 = 2(\lambda_1 + \lambda_{12})^{-2}$, $\sigma_2^2 = 2(\lambda_2 + \lambda_{12})^{-2}$ 으로 표시된다. T_1 과 T_2 가 이변량 감마분포 를 따르는 경우 공분산, 상관계수 및 신뢰도 모수 등의 계산은 매우 복잡하기는 하지만 다음의 공식을 이용하여[Barlow and Proschan, 135쪽 참조] 얻어질 수 있다. 즉, F 와 G 가 두 개의 이변량 분포함수라고 하면

$$\int_0^\infty \int_0^\infty G(x, y) dF(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty \bar{F}(x, y) dG(x, y).$$

이 공식을 이용하면 $E T_1 T_2 = \int_0^\infty \int_{t_1}^\infty \bar{F}(t_1, t_2) dt_2 dt_1$ 이 성립되는 것을 알 수 있으며 따라서 공분산 σ_{12} 와 상관계수 ρ 는 다음과 같이 계산된다. 여기에서 $\bar{F}(t_1, t_2)$ 는 식(2.6)에 주어져 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= E T_1 T_2 - \mu_1 \mu_2 = \frac{2 \lambda_{12} [\lambda_1 \lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12})^2]}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12})^3 (\lambda_1 + \lambda_{12})(\lambda_2 + \lambda_{12})} \\ \rho &= \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\lambda_{12} [\lambda_1 \lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12})^2]}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12})^3} \end{aligned} \quad (3.3)$$

신뢰도 모수 R 의 값은 복잡한 계산과정을 거쳐서 다음과 같은 결과를 얻는다. 즉, 식(2.6)의 $\bar{F}(t_1, t_2)$ 로부터 T_1 과 T_2 의 결합 확률밀도함수 $f_2(t_1, t_2)$ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$f_2(t_1, t_2) = \lambda_1 (\lambda_2 + \lambda_{12}) e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} t_2} [2 \lambda_{12} t_1 - \lambda_1 \lambda_{12} t_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 t_1 t_2 + \lambda_1 \lambda_{12} t_1 t_2].$$

따라서

$$\begin{aligned} R &= P(T_2 > T_1) = \int_0^\infty \int_0^{t_2} f_2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ &= \frac{\lambda_1^3 + \lambda_1 (\lambda_2 + \lambda_{12})(3 \lambda_1 + 2 \lambda_{12})}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12})^3}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

4. 신뢰도 모수의 수치비교

이 절에서는 3절에서 유도된 공식을 이용하여 이변량 감마 신뢰도함수로부터 계산된 관심 모수들의 값을 표로 나타냄으로서 상호간의 관계에 대하여 기술한다. <표 4.1>은 T_1 과 T_2 가 이변량 감마 신뢰도함수를 따르는 경우의 μ_1, μ_2, ρ 와 R 의 관계를 수치적으로 표시한 것이다. 이 경우에는 R 이 μ_1, μ_2, ρ 의 함수로 직접적으로 표시될 수 없기 때문에 식(3.3)과 (3.4)를 이용하여 $\lambda_1 = 1, 5, 10, \lambda_2 = 1, 5, 10, \lambda_{12} = 1, 5, 10$ 의 값을 취하는 경우의 ρ 와 R 의 값을 <표 4.1>에 나열하였다.

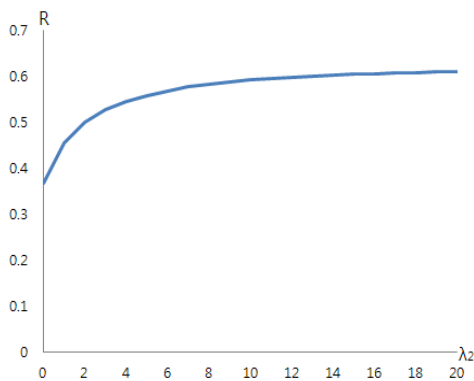
<표 4.1> 이변량 감마 신뢰도 함수에 대한 μ_1, μ_2, ρ, R 의 값

	λ_2	λ_{12}	μ_1	μ_2	ρ	R
$\lambda_1 = 1$	1	1	1	1	0.3704	0.4074
		5	0.3333	0.3333	0.7289	0.2303
		10	0.1818	0.1818	0.8391	0.1407
	5	1	1	0.3333	0.1574	0.0904
		5	0.3333	0.2	0.4733	0.0984
		10	0.1818	0.1333	0.6372	0.0845
	10	1	1	0.1818	0.0891	0.0324
		5	0.3333	0.1333	0.3274	0.0479
		10	0.1818	0.1	0.4870	0.0498
$\lambda_1 = 5$	1	1	0.3333	1	0.1574	0.8601
		5	0.2	0.3333	0.4733	0.6574
		10	0.1333	0.1818	0.6372	0.5005
	5	1	0.3333	0.3333	0.1097	0.4771
		5	0.2	0.2	0.3704	0.4074
		10	0.1333	0.1333	0.5313	0.3438
	10	1	0.3333	0.1818	0.0747	0.2588
		5	0.2	0.1333	0.2813	0.2500
		10	0.1333	0.1	0.4320	0.2320
$\lambda_1 = 10$	1	1	0.1818	1	0.0891	0.9491
		5	0.1333	0.3333	0.3247	0.8301
		10	0.1	0.1818	0.4870	0.7019
	5	1	0.1818	0.3333	0.0747	0.7219
		5	0.1333	0.2	0.2813	0.6250
		10	0.1	0.1333	0.4320	0.5440
	10	1	0.1818	0.1818	0.0584	0.4881
		5	0.1333	0.1333	0.2320	0.4480
		10	0.1	0.1	0.3704	0.4074

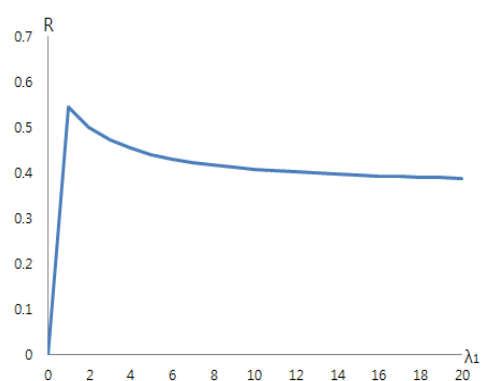
<표 4.1>로부터 다음과 같은 관련 모수값들의 변화에 따르는 R 과 ρ 에 대한 다음과 같은 흥미로운 단조성(monotonicity) 추이가 관찰될 수 있다. 계산은 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}$ 의 값이 1, 2, ..., 10을 취할 때의 모든 경우에 대하여 μ_1, μ_2, ρ 과 R 의 값을 구하였으나 <표 4.1>은 그 중 일부만을 기록한 것이다.

- i) λ_1 과 λ_2 가 고정된 상수인 경우에는 λ_{12} 의 값이 증가할 때 μ_1 과 μ_2 는 항상 작아지게 되며 ρ 의 값은 항상 증가한다. 따라서 이 경우에는 λ_{12} 의 값이 T_1 과 T_2 의 종속정도를 나타내는 모수로 간주될 수 있으며 ρ 와 같은 패턴을 보여준다. 또한 T_1 과 T_2 의 상관관계(ρ)가 강해질수록 R 의 값은 감소하게 되는데 이것은 아마도 ρ 의 값이 증가하면 T_1 과 T_2 가 동시에 증가하는 경향이 커지기 때문에 R 의 값에 음의 영향을 미치게 되는 것으로 보인다.
- ii) λ_1 과 λ_2 가 고정된 상수라고 하자. 만일 $\lambda_1 \geq \lambda_2$ 인 경우에는 λ_{12} 의 값이 증가할 때 R 의 값은 단조적인 감소를 보인다. 그러나 만일 $\lambda_1 < \lambda_2$ 이고 λ_1 이 매우 적은 값을 취할 때에는 λ_{12} 의 값이 증가할 때 처음에는 R 의 값이 증가하나 나중에는 감소하는 패턴을 보여준다. <표 4.1>에서 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$ 인 경우와 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 10$ 인 경우가 이러한 패턴을 나타내는데 이러한 경향은 직관적으로는 뚜렷하게 설명되지 않는다.

아래의 그림은 두 변수 T_1 과 T_2 가 각각 독립적인 와이블 신뢰도함수를 따르는 경우의 R 의 값의 추이를 나타낸 것이다. R 의 계산을 위하여는 식(3.2)의 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 인 경우를 이용하였으며 $\alpha = \beta = 1$ 의 고정된 값을 취하였다. <그림 4.2>은 $\lambda_1 = 2$ 를 가정하고 λ_2 의 변화에 따르는 R 의 추이를 나타내고 있으며 <그림 4.3>은 $\lambda_2 = 2$ 인 경우 R 을 λ_1 의 함수로 표시한 것으로 서로 간에 매우 다른 R 의 값의 패턴을 보여준다.



<그림 4.2> $\lambda_1 = 2$ 인 경우



<그림 4.3> $\lambda_2 = 2$ 인 경우

5. 결 론

본 연구에서는 신뢰성분야에서 많은 연구가 진행되어온 스트레스-강도모형의 모수들에 관한 상호관계를 규명하였으며 특히 스트레스와 강도가 독립적인 경우뿐만 아니라 서로간에 종속적인 관계를 가지는 경우까지를 고려하였다. 이번 연구에서는 독립적인 지수분포, 감마분포, 와이블분포와 종속적인 관계를 나타내는 이변량 지수분포와 이변량 감마분포를 고려하였으며 각각의 경우에 신뢰도모수의 값을 계산하고 모수들의 변화에 따르는 패턴변화 등에 대하여 연구결과를 제시하였다. 현재까지 수행된 스트레스-강도모형에 관한 대부분의 연구는 신뢰도모수에 대한 추정과 검증에 관한 것으로 두 변수가 서로 독립적인 경우를 가정하였다. 그러나 스트레스와 강도는 동일한 시스템에 적용되는 변수로서 일정한 형태의 종속적인 관계를 가정하는 것이 보다 현실적인 가정으로 생각되며 따라서 이번 연구에서는 이변량 지수분포와 이변량 감마분포의 경우를 고려하였으며 이러한 경우의 주변 확률분포는 각각 지수분포와 감마분포를 따른다는 것이 알려져 있다.

특히 이변량 감마분포를 따르는 신뢰도함수의 경우에는 모수 λ_{12} 의 값이 상관계수 ρ 와 양의 관계를 가진다는 것이 수치적으로 밝혀짐에 따라 λ_{12} 의 값이 T_1 과 T_2 의 종속정도를 나타내는 모수로 간주될 수 있다는 흥미로운 결과를 얻었다. 이변량 지수분포의 경우에도 모수 λ_{12} 가 ρ 의 증가함수라는 사실은 3절에서 얻어진 결과를 이용하면 쉽게 증명된다.

스트레스-강도모형의 응용성과 이론적인 중요성을 감안할 때 앞으로 두 변수가 종속적인 관계를 가지는 경우에 대한 보다 많은 연구의 필요성이 요구된다.

참고문헌

- [1] Barlow, R. E. and Proschan, F. (1981). Statistical Theory of Reliability and Life Testing, Probability Models, To Begin With, Silver Spring, MD.
- [2] Church, J. D. and Harris, B. (1970). The Estimation of Reliability from Stress-Strength Relationships, Technometrics, Vol. 12, pp.49-54.
- [3] Downton, F. (1973). The Estimation of the $\Pr[Y < X]$ in the Normal Case, Technometrics, Vol. 15, pp. 551-558.
- [4] Fan, J., Prentice, R. L. and Hsu, L. (2000). A Class of Weighted Dependence Measures for Bivariate Failure Time Data, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Vol. 62, pp.181-190.
- [5] Hougaard, P. (1986). A Class of Multivariate Failure Time Distributions, Biometrika, Vol. 73, No. 3, pp.671-678.
- [6] Hougaard, P., Harvald, B. and Holm, N. V. (1992). Measuring the Similarities Between the

- Lifetimes of Adult Danish Twins Born Between 1881-1930, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 87, pp. 17-24.
- [7] Jeong, H. S. and Kim, J. J.(1995). Nonparametric Estimation of $\Pr [Y < X]$ from Random Censored Data, *Journal of the Korean Society for Quality Management*, Vol. 23, No. 2, pp. 91-102.
- [8] Johnson, R. A. (1988). Stress-Strength Models for Reliability, *Handbook of Statistics*(Vol. 7), eds. P. R. Krishnaiah and C. R. Rao, Amsterdam; North-Holland.
- [9] Kaplan, E. L. and Meier, P. (1958). Nonparametric Estimation from Incomplete Observations, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 53, pp. 457-481.
- [10] Reiser, B. and Guttman, I. (1986). Statistical Inference for $\Pr [Y < X]$, *Technometrics*, Vol. 28, pp. 253-257.
- [11] Weerahandi, S. and Johnson, R. A. (1992). Testing Reliability in a Stress-Strength Model When X and Y are Normally Distributed, *Technometrics*, Vol. 34, pp. 83-91.
- [12] Yum, J. K. and Kim, J. J.(1984). Estimation of $\Pr [Y < X]$ in the Censored Case, *Journal of the Korean Society for Quality Management*, Vol. 12, pp. 9-15.
- [13] Yum, J. K. and Kim, J. J.(1985). A Study on the Bayes Estimator of $\theta = \Pr [Y > X]$, *Journal of the Korean Society for Quality Management*, Vol. 13, pp. 8-12.