

혼합 정식화를 이용한 섬유 강화 적층보의 변형해석

Static Analysis of Continuous Fiber-Reinforced Laminated Beams Based on Hybrid-Mixed Formulation

김진곤 · 이재곤
J. G. Kim and J. K. Lee

(접수일 : 2011년 03월 10일, 수정일 : 2011년 07월 25일, 채택확정 : 2011년 08월 26일)

Key Words : Hybrid-Mixed Formulation(혼합정식화), Beam Element(보요소), Lamination Theory(적층이론), Micromechanical Theory(미소역학이론)

Abstract : In this study, an accurate 2-noded hybrid-mixed element for continuous fiber-reinforced laminated beams is newly proposed. The present element including the effect of shear deformation is based on Hellinger-Reissner variational principle, and introduces additional consistent nodeless degrees for displacement field interpolation in order to enhance the numerical performance. The micromechanical and lamination theory are employed in the finite element description to consider the effects of the laminate stacking sequences, material orthotropy, and fiber volume fraction, etc. The element stiffness matrix can be explicitly derived through the stationary condition and static condensation using Mathematica program. Several numerical examples confirm the accuracy of the present hybrid-mixed element and also show in detail the effects of the continuous fiber volume fraction, stacking sequences and boundary condition on the bending behavior of laminated beams.

1. 서 론

섬유보강 복합 적층재는 무게 대비 높은 강도와 보강재의 방위각, 재료선정 그리고 적층 순서 등에 따라 원하는 복합재를 용이하게 설계할 수 있는 장점 등으로 많은 연구자들이 관심을 가져왔다^{1~2)}. 그렇지만, 이러한 재료들은 종방향 탄성계수에 비해 낮은 횡방향 전단계수로 인해 횡방향 전단변형이 발생하게 되어 전통적인 Euler-Bernoulli 가정에 기반한 적층보 이론으로는 두께가 비교적 큰 보에 대해서는 정확한 해석이 어려운 문제점을 가진다³⁾. 이러한 전단변형의 영향을 고려하기 위해서 Timoshenko의 일차 전단변형이론이 제안되었다⁴⁾. 이 이론에서는 횡방향 전단변형률이 두께방향으로 일정하다고 가정하기 때문에 횡방향 전단 강성을 보정하기 위해 전단보정계수(shear correction factor)가 사용된다. 이후, 전단보정계수를 사용하지 않고 적층 복합 보의 거동을

보다 정확하게 해석하기 위해 고차 보 이론들도 제안되어졌다^{5~6)}.

다수의 연구자들이 일차 변형 이론(first deformation theory)에 바탕한 뛰어난 수치거동을 가지는 보 요소의 개발에 관심을 가져왔으며, 이를 위해 지금까지 다양한 변분이론들이 적용되어졌다. 이 중 최소 퍼텐셜 에너지 이론에 바탕한 변위모델이 가장 일반적으로 사용되어 왔다. 변위와 회전에 대해 각각 독립적인 동일 차수의 보간함수를 사용하면 복잡한 요소의 사용을 피하고 오직 연속조건만을 충족시키는 간단한 보간함수를 사용할 수 있는 장점이 있다. 그러나 연속조건만을 충족시키는 전통적인 요소를 사용하면 두께가 길이에 비해 아주 작은 경우의 문제에서 가성구속(spurious constraint)이 발생하여 강성과잉현상이 발생한다⁷⁾. 이러한 강성과잉문제를 해결하기 위해 변위모델들에서 제시된 대표적인 방법들로는 감차/선택 적분 요소(reduced/selective integration element)⁷⁾, 장일치 요소(field consistent element)⁸⁾ 및 변형률 요소⁹⁾ 등이 있다. 이러한 변위모델에 대한 또 다른 대안으로서, Hellinger-Reissner 변분이론을 이용한 혼합유한요소의 개발도 활발히 이루어지고

김진곤(교신저자) : 대구가톨릭대학교 기계자동차공학부
E-mail : kimjg1@cu.ac.kr, Tel : 053-850-2711
이재곤 : 대구가톨릭대학교 기계자동차공학부

있다^{10~12)}.

본 논문에서는, 연속적인 섬유 강화 적층보의 거동을 보다 정확하게 해석하기 위해 전단변형률을 고려한 새로운 고차 혼합 보요소를 정식화하였다. 섬유강화 적층보요소의 정식화는 보강섬유의 체적비(volume fraction)와 적층배열에 따른 유효물성의 영향을 고려할 수 있도록 전통적인 미소역학이론과 적층이론을 요소의 정식화 과정에 적용하였다^{13~14)}. 수치예제들에 대한 해석을 통하여, 본 논문에서 제안한 섬유강화 적층 보요소의 정확성을 확인할 수 있었으며 보강섬유의 비율, 적층 배열 및 경계조건 등에 따른 보의 굽힘 거동을 상세하게 살펴보았다.

2. 섬유강화 적층보의 기본방정식

Fig. 1은 길이가 L 이고, 폭이 B 그리고 N_L 개의 적층으로 이루어진 두께가 H 인 섬유강화 적층보의 기하학적 형상을 보여주고 있다. 보의 중심축을 정의하기 위해 x 축은 축방향, y 축은 횡방향, 그리고 z 축은 두께방향을 나타내는 직교좌표계가 사용되었다. 보의 $x-z$ 면의 면내변형만을 가정하면, 직선 보의 변위성분들은 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{u} \equiv \bar{u}(x, z) = u(x) + z\theta(x) \quad (1a)$$

$$\bar{v} \equiv \bar{v}(x, z) = 0 \quad (1b)$$

$$\bar{w} \equiv \bar{w}(x, z) = w(x) \quad (1c)$$

여기서 \bar{u} 와 \bar{v} 는 각각 축방향과 횡방향의 변위를 나타내며 w 는 수직방향의 변위를 나타낸다. 그리고, u 와 v 는 각각 중심축에서의 축방향 변위와 회전각을 나타낸다.

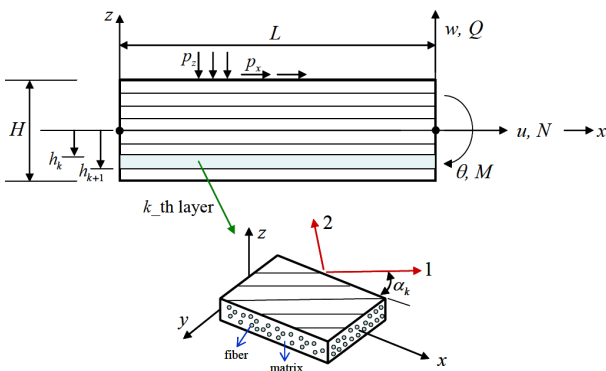


Fig. 1 A fiber-reinforced laminated beam model

변형률과 변위간의 관계식은 다음과 같이 표현된다.

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_0 + z\kappa = u_{,x} + z\theta_{,x} \quad (2a)$$

$$\gamma_{xz} = w_{,x} + \theta \quad (2b)$$

면내변형에서 k 번째 층에 대한 응력과 변형률 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\sigma_{xx} = \overline{Q}_{11}\epsilon_{xx} \quad (3a)$$

$$\tau_{xz} = \overline{Q}_{55}f(z)\gamma_{xz} \quad (3b)$$

여기서, $f(z)$ 는 두께방향으로 포물선 분포를 가정하면 전단보정계수 k_s 를 이용하여 다음과 같이 정의된다.

$$f(z) = k_s[1 - (2z/h)^2] \quad (4)$$

그리고, \overline{Q}_{11} 과 \overline{Q}_{55} 는 각각 탄성계수와 전단계수를 의미하며, Fig. 1에서 적층 배향각 α_k 와 재료주방향(principal material direction)의 물성들과의 관계식은 다음과 같이 나타낼 수 있다¹⁰⁾.

$$\frac{1}{\overline{Q}_{11}} = \frac{\cos^4\alpha_k}{E_{11}} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_{11}}\right)\cos^2\alpha_k\sin^2\alpha_k + \frac{\sin^4\alpha_k}{E_{22}} \quad (5a)$$

$$\overline{Q}_{55} = G_{12}\cos^2\alpha_k + G_{23}\sin^2\alpha_k \quad (5b)$$

직교이방성(orthotropic) 섬유강화 적층재료에서 혼합특성식(Rule of mixtures formulation)과 Hopkins 등의 단순화된 미소역학공식(Simplified Micro-mechanics Equations)들로부터 식(5)의 각 층에서 재료주방향의 유효물성 E_{11} , E_{22} , G_{12} , ν_{12} 들을 다음과 같이 나타낼 수 있다¹¹⁾.

$$E_{11} = E_{f1}v_f + E_m v_m \quad (6a)$$

$$E_{22} = E_m \left[(1 - \sqrt{v_f}) + \frac{\sqrt{v_f}}{1 - \sqrt{v_f}(1 - E_m/E_{f2})} \right] \quad (6b)$$

$$\nu_{12} = \nu_{f1}v_f + \nu_m v_m \quad (6c)$$

$$G_{12} = G_m \left[(1 - \sqrt{v_f}) + \frac{\sqrt{v_f}}{1 - \sqrt{v_f}(1 - G_m/G_{f2})} \right] \quad (6d)$$

여기서, 하첨자 f 와 m 은 각각 보강섬유(fiber)와 바탕재료(matrix)를 나타내며, v_f 와 v_m 은 보강섬유와 바탕재료의 체적비(volume fraction)를 나타내며 $v_f + v_m = 1$ 이다.

다음으로, 복합재의 적층이론을 이용하면, 합력-변형률(stress resultants-strains) 사이의 관계식을 다

음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} N \\ Q \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & B_{11} \\ 0 & A_{55} & 0 \\ B_{11} & 0 & D_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \gamma_{xz} \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (7a)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \gamma_{xz} \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^* & 0 & B_{11}^* \\ 0 & A_{55}^* & 0 \\ B_{11}^* & 0 & D_{11}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ Q \\ M \end{Bmatrix} \quad (7b)$$

여기서,

$$A_{11} = \sum_{k=1}^{N_L} b \overline{Q_{11}^{(k)}} (h_k - h_{k-1}) \quad (8a)$$

$$B_{11} = \sum_{k=1}^{N_L} b \overline{Q_{11}^{(k)}} (h_k^2 - h_{k-1}^2) / 2 \quad (8b)$$

$$D_{11} = \sum_{k=1}^{N_L} b \overline{Q_{11}^{(k)}} (h_k^3 - h_{k-1}^3) / 3 \quad (8c)$$

$$A_{55} = k_s \sum_{k=1}^{N_L} b \overline{Q_{55}^{(k)}} [(h_k - h_{k-1}) - \frac{4}{3h^2} (h_k^3 - h_{k-1}^3)] \quad (8d)$$

추가적인 유한요소정식화를 위해 식(7a)를 다음과 같이 행렬식으로 표현하는 것이 편리하다.

$$\sigma = C \cdot \epsilon \quad (9)$$

여기서 합력벡터와 변형률벡터는 각각 $\sigma = \{N, Q, M\}^T$ 와 $\epsilon = \{\epsilon_0, \gamma_{xz}, \kappa\}^T$ 이고, C 는 적층보의 합력과 변형률간의 강성행렬을 의미한다. 컴플라이언스 행렬(compliance matrix) S 는 $S = C^{-1}$ 로서 정의된다.

3. 혼합 유한요소정식화

직선보에 대한 Hellinger-Reissner 복함수(functional)를 식(9)의 합력 벡터와 변형률 벡터로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Pi_{HR} = \int_c \left(-\frac{1}{2} \sigma^T S \sigma + \sigma^T \epsilon \right) dx - W \quad (10a)$$

여기서,

$$W = \int_c (p_x u + p_z w) dx + \sum_{i=1}^2 (N_i u_i + Q_i w_i + M_i \theta_i) \quad (10b)$$

본 연구에서는, 2절점 보요소의 수치적 효율성을 향상시키기 위해 일반적인 등매개(isoparametric) 보

간함수에 무절점 자유도를 도입하여 변위장 $d = \{u, w, \theta\}^T$ 를 3차의 보간함수로 다음과 같이 근사화하였다.

$$u = (1 - \xi)u_1 + \xi u_2 + \xi(1 - \xi)a_1 + \xi^2(1 - \xi)a_2 \quad (11a)$$

$$w = (1 - \xi)w_1 + \xi w_2 + \xi(1 - \xi)b_1 + \xi^2(1 - \xi)b_2 \quad (11b)$$

$$\theta = (1 - \xi)\theta_1 + \xi\theta_2 + \xi(1 - \xi)c_1 + \xi^2(1 - \xi)c_2 \quad (11c)$$

여기서, 무차원 변수 $\xi = x/L (0 \leq \xi \leq 1)$ 로 정의되며, 식(11)을 행렬형태로 표시하면 다음과 같다.

$$u = N \cdot d = [N_c; N_h] \begin{Bmatrix} d_c \\ d_h \end{Bmatrix} \quad (12)$$

식(2)와 (12)로부터 변형률은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\epsilon = B \cdot d = [B_c; B_h] \begin{Bmatrix} d_c \\ d_h \end{Bmatrix} \quad (13)$$

여기서, $d_c = \{u_1, w_1, \theta_1, u_2, w_2, \theta_2\}^T$ 는 절점에서 정의되는 변위에 대한 자유도 성분들이며, $d_h = \{a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2\}^T$ 는 절점에서 정의되지 않는 무절점 자유도들이다. 혼합정식화에서, 보의 두께가 아주 얇아지거나 비신장 굽힘(inextensional bending)과 같은 극한 거동에서 발생하는 가상구속조건(spurious constraints)에 의한 가상에너지를 제거하기 위해서는 변위함수에 대응되는 적절한 합력에 대한 매개변수를 선정하여야 한다. 이를 위해서는 변위함수보다 한 차수 낮은 2차의 함수로 가정하여야 한다⁹⁾.

$$\sigma = P(1, \xi, \xi^2) \beta \quad (14)$$

여기서, $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_9\}^T$ 는 합력에 대한 매개변수를 나타내며, P 는 합력에 대한 (3x9)의 크기를 가지는 합력함수의 행렬을 나타낸다.

제안하고자 하는 2절점 적층보요소의 강성행렬을 유도하기 위해, 식(12)부터 (14)를 식(10)에 대입하여 다음의 식으로 표현한다.

$$\Pi_{HR} = \beta^T G d - \frac{1}{2} \beta^T H \beta - R^T d \quad (15)$$

여기서,

$$H = \int_c P^T S P dx \quad (16a)$$

$$G = \int_c P^T [B_c; B_h] dx = [G_c; G_h] \quad (16b)$$

여기서, R 은 하중벡터이며, 식(15)에서 벡터 d 와 β 에 대해 범함수의 평형조건을 적용하여 요소단위에서 β 를 제거하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{cc} & K_{ch} \\ K_{hc} & K_{hh} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_c \\ d_h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

여기서, 부행렬 성분 K_{ij} (i, j 는 c 또는 h)는 다음과 같다.

$$K_{ij} = G_i^T H^{-1} G_j \quad (18)$$

윗 식에서 무절점 자유도 d_h 를 정적축약(static condensation)을 통하여 위의 요소방정식에서 제거하면, 최종적으로 다음의 요소 강성행렬 K_e 를 얻을 수 있다.

$$K_e = K_{cc} - K_{ch} K_{hh}^{-1} K_{hc} \quad (19)$$

4. 수치 해석

4.1 경계조건과 하중조건에 따른 수렴성

본 논문에서 제안된 적층 보요소의 수치적 성능을 살펴보고자 다양한 경계조건에서 집중하중 F_0 와 분포하중 q_0 를 받는 길이 L , 두께 H , 넓이 B , 단면적 A 를 가지는 직선보에 대해서 해석하였다. Table 1에서 경계조건과 하중에 따른 해석결과들을 Timoshenko 보이론에 근거한 정해¹⁴⁾와 Saleeb 등¹⁰⁾의 혼합유한요소인 HMC2와 비교 정리하였다. 해석에는 한 개의 요소만을 사용하였으며 양단 단순지지 및 양단 고정된 경우 대칭조건을 사용하여 절반만 모델링하였다. 표의 해석결과는 다음과 같이 정의된 값들로서 표현하였다.

$$c_1 = (F_0 b L^3) / (E_x^b I_{zz}), \quad c_2 = (q_0 b L^4) / (E_x^b I_{zz}) \quad (20a)$$

$$s_1 = (F_0 b L) / (k_s G^b b h), \quad s_2 = (q_0 b L^2) / (k_s G^b b h) \quad (20b)$$

해석결과에서 경계조건과 하중조건에 따라 해석 결과의 수렴성과 정확성에 약간의 차이가 발생함을 알 수 있다. 특히 Saleeb 등의 HMC2 요소는 양단 고정인 경우에는 굽힘에 의한 변형성분이 나타나지 않았다. 하지만, 대부분의 경우 본 논문에서 제안된 요소는 정해와 일치하는 결과를 나타냄을 알 수 있다. 3점 굽힘을 받는 보에서 $B/D_{11}^* = E_{xx}^b I_{yy}$ 와

$B/A_{55}^* = k_s G_{xz}^b A$ 로 정의하면 제안된 요소를 사용하여 구한 중앙에서의 최대변형값은 다음과 같다.

$$w_{max} = \frac{F_0 B L^3}{48 E_{xx}^b I_{yy}} \left[1 + \left(\frac{E_{xx}^b}{k_s G_{xz}^b} \right) \left(\frac{H}{L} \right)^2 \right] \quad (21)$$

해석결과로부터 E_{xx}^b / G_{xz}^b 의 계수비와 세장비 H/L 에 좌우되는 전단변형의 효과를 본 요소가 잘 고려하고 있음을 알 수 있다. 또한, 두께가 아주 얇은 보에서의 강성과잉현상 없이 전단변형의 효과가 무시되는 결과가 얻어짐을 확인할 수 있다.

4.2 세장비/적층배열에 따른 거동해석

Fig. 2는 본 논문에서 제안된 보요소를 이용하여 구한 양단 단순지지 및 고정된 반대칭 크로스-플라이(antisymmetric cross-ply) (0/90), (0/90/0)와 앵글-플라이(angle-ply) (-45/45) 적층보의 세장비(L/H) 변화에 따른 무차원화된 최대변형량 $\bar{w} = w_{max} (E_{22} H^3 / q_0 L^4) \times 10^2$ 의 해석결과를 보여주고 있다. 해석에는 $E_1/E_2 = 20$, $G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$, $G_{23} = 0.2E_2$, $\nu_{12} = 0.25$ 및 $k_s = 5/6$ 들이 사용되었다.

Table 1 Comparison of transverse deflections of laminated composite beams with various boundary and load conditions

Laminated beam		Maximum deflection		
		Exact	HMC2	Present
Hinged-Hinged	Central point load	$\frac{1}{48}c_1 + \frac{1}{4}s_1$	$\frac{1}{64}c_1 + \frac{1}{4}s_1$	$\frac{1}{48}c_1 + \frac{1}{4}s_1$
	Uniform load	$\frac{5}{384}c_2 + \frac{1}{8}s_2$	$\frac{3}{384}c_2 + \frac{1}{8}s_2$	$\frac{4}{384}c_2 + \frac{1}{8}s_2$
Fixed-Fixed	Central point load	$\frac{1}{192}c_1 + \frac{1}{4}s_1$	$\frac{1}{4}s_1$	$\frac{1}{192}c_1 + \frac{1}{4}s_1$
	Uniform load	$\frac{1}{384}c_2 + \frac{1}{8}s_2$	$\frac{1}{8}s_2$	$\frac{1}{384}c_2 + \frac{1}{8}s_2$
Fixed-Free	Central point load	$\frac{1}{3}c_1 + s_1$	$\frac{1}{4}c_1 + s_1$	$\frac{1}{3}c_1 + s_1$
	Uniform load	$\frac{1}{8}c_2 + \frac{1}{2}s_2$	$\frac{1}{8}c_2 + \frac{1}{2}s_2$	$\frac{1}{8}c_2 + \frac{1}{2}s_2$

양단고정인 경우 세장비가 $(L/H) \leq 10$ 인 경우 단순지지된 경우보다 비교적 전단변형의 효과가 크게 나타나고 있다. 이로부터 경계조건이 전단변형의 크기에 큰 영향을 주고 있음을 알 수 있다. 그리고, 크

로스-플라이 적층보가 앵글-플라이 적층보보다 적층 배열에 의한 굽힘강성이 커짐을 알 수 있다.

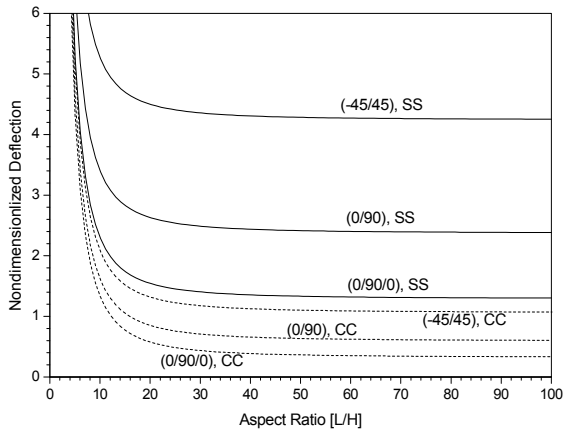


Fig. 2 Transverse deflection versus L/H of simply-supported (SS) and clamped-clamped (CC) laminated beams

Fig. 3은 분포하중을 받는 양단 단순지지된 크로스-플라이(0/90) 적층보에서 세장비 및 재료의 직교이방성이 재료의 변형에 미치는 영향을 보여주고 있다. E_{11}/E_{22} 의 비가 클수록 최대변형값이 작아지며, $(L/H) \leq 10$ 인 경우 재료의 직교이방성에 의한 전단 변형의 효과도 비교적 커짐을 알 수 있다. Fig. 4는 이층(two-layer)의 반대칭 앵글-플라이 $(-\theta/\theta)$ 적층보에서 적층 각도가 양단이 단순지지된 보의 굽힘 변형에 미치는 영향을 보여주고 있다. 적층각도가 작아질수록 반대칭 앵글-플라이 적층보의 굽힘강성이 커지면서 변형량이 감소함을 알 수 있다.

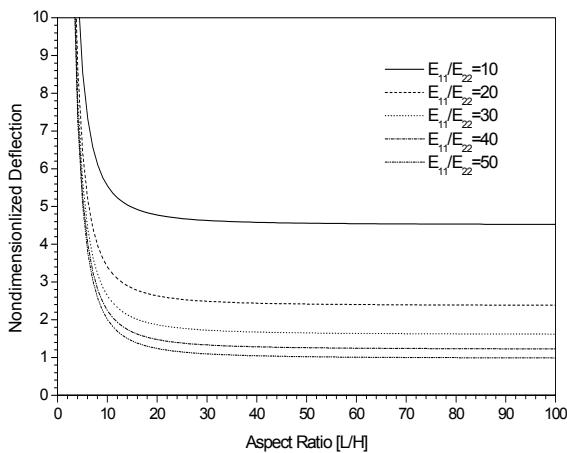


Fig. 3 The effect of material orthotropy and shear deformation on transverse deflections of simply-supported laminated beams

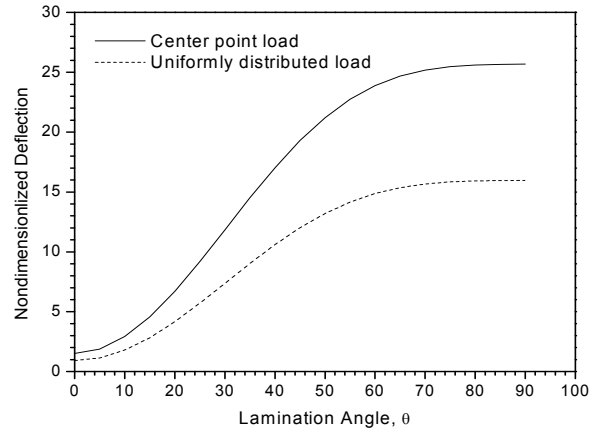


Fig. 4 The effect of lamination angle on maximum deflections of two-layer antisymmetric angle-ply laminated beams

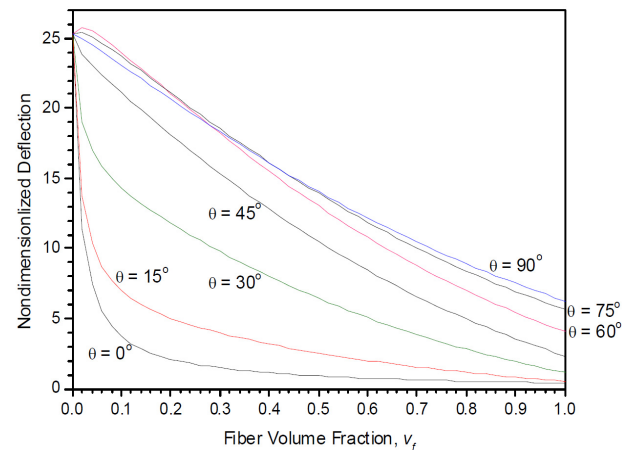


Fig. 5 Maximum transverse deflection versus fiber volume fraction according to the lamination angle

Fig. 5는 중앙에서 집중하중을 받는 단순지지된 이층 반대칭 앵글-플라이 $(-\theta/\theta)$ 적층보에서 적층 각도와 보강섬유의 체적비에 따른 무차원화된 최대처짐값의 변화를 보여주고 있다. 해석에 사용된 보강섬유의 물성치는 Table 2와 같다. 보강섬유가 직교이방성일 경우 $\theta \geq 0^\circ$ 일 때 E_{f2} 의 크기가 작아 변형량이 커짐을 알 수 있다. 보강섬유의 체적비가 0.1보다 작고 $\theta \leq 45^\circ$ 인 경우 적층각도 θ 가 작아질수록 체적비의 영향이 상대적으로 크게 나타남을 알 수 있다. 이러한 결과들은 적층보의 거동을 적절하게 설계하는데 있어 복합재의 적층배향과 보강섬유의 체적비 등이 매우 중요한 설계변수들임을 다시 한 번 보여준다.

Table 2 Material properties

Materials		Orthotropic
Fiber	E_{f1}	220 GPa
	E_{f2}	13.79 GPa
	G_{f12}	30.11 GPa
Matrix	ν_{f12}	0.22
	E_m	3.45 GPa
	G_m	1.28 GPa
	ν_m	0.35

4. 결 론

본 연구에서는 섬유강화 적층보의 거동을 정확하게 해석할 수 있는 새로운 혼합유한요소를 제안하였다. 제안된 요소는 Hellinger-Reissner 변분이론에 바탕하고 전단변형을 고려하였으며, 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 변위장에 대해 무절점 자유도를 추가적으로 도입하고 가성에너지를 제거하기 위해 변위장에 대응하는 적절한 응력매개변수를 선정하여 요소의 성능을 크게 향상시켰다.

2) 미소역학이론과 적층이론을 유한요소 정식화 과정에서 적용하여 직교이방성 섬유강화 적층보의 적층배열, 보강섬유의 체적비 등에 의한 영향을 고려하여 해석할 수 있도록 하였다.

3) 요소정식화의 최종단계에서 정치조건과 정적축약을 통하여 요소의 강성행렬 성분을 유도하였다.

4) 몇 가지 수치예들에 대한 해석을 통하여, 제안된 요소의 정확성을 검증하였으며, 섬유강화 적층보에서 보강섬유의 체적비, 배향각 및 경계조건 등이 적층보의 거동에 미치는 영향을 자세하게 살펴보았다.

참고 문헌

- Lee, S. H. et al., 2001, "Free Vibration Analysis of Multi-Delaminated Beams", Journal of the Computational Structural Engineering of Korea, Vol. 14, No. 4, pp. 469-479.
- Kim, C. W. et al., 2006, "Proposal of Equation on Changable Performance Stroke and Ratus of Curvature According to the CFRP Ply Orientation in PZTCA", Trans. of the KSME(A), Vol. 30, No. 3, pp. 318-327.
- Ashwell, D. G. et al., 1971, "Further Studies in the Application of Curved Finite Elements Applied to Arches", International Journal of

- Mechanical Science, Vol. 13, pp. 507-517.
- Noor, A. K. and Peters, J. M., 1981, "Mixed Models and Reduced/Selective Integration Displacement Models for Nonlinear Analysis of Curved Beams", Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, pp. 615-631.
- Levinson, M., 1981, "A New Rectangular Beam Theory", Journal of Sound and Vibration, Vol. 74, pp. 81-87.
- Kant, T. and Manjunath, B. S., 1989, "Refined Theories for Composite and Sandwich Beams with C^0 Finite Elements", Computers and Structures, Vol. 33, pp. 755-764.
- Stolarski, H. and Belytschko, T., 1983, "Shear and Membrane Locking Curved C^0 Elements ", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 41, pp. 279-296.
- Prathap, G. and Babu, C. R., 1986, "An Isoparametric Quadratic Thick Curved Beam Element", Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 23, pp. 1583-1600.
- Ryu, H. S. and Sin, H. C., 1996, "Curved Beam Elements Based on Strain Fields", Comm. in Numerical Methods in Engineering, Vol. 12, pp. 767-773.
- Saleeb, A. F. and Chang, T. Y., "On the Hybrid-Mixed Formulation C^0 Curved Beam Elements", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 60, pp. 95-121.
- Kim, J. G., 2006, "In-Plane Flexural Vibration Analysis of Arches Using Three-Noded Hybrid-Mixed Element", Journal of KSPSE, Vol. 10, No. 4, pp. 83-89.
- Kim, J. G. and Lee, J. K., 2008, "Free-Vibration Analysis of Arches Based on the Hybrid-Mixed Formulation with Consistent Quadratic Stress Functions", Computers and Structures, Vol. 86, pp. 1672-1681.
- Hopkins, D. A. and Chamis, C. C., 1988, "A Unique Set of Micromechanics Equations for High Temperature Metal Matrix Composite", Testing Technology of Metal Matrix Composites, ASTM STP 964, pp. 159-176.
- Reddy, J. N., 1996, "Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis", CRC Press.