한국초등수학교육학회지 15(3) 619-640.
2011. 12. 31
Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 15(3) 619-640.
December 31. 2011.

수학적 사고력 측정을 위한 수학 평가 도구의 개발

신준식[1] · 고정화[2] · 박문환[3] · 박성선[4] · 서동엽[5]

본 연구는 수학적 추론, 문제해결, 의사소통과 관련된 평가 문항을 소개하고, 평가 문항에 대한 5학년 학생들의 반응을 보다 심층적으로 분석한 연구이다. 수학적 추론은 연역 추론, 귀납 추론, 유비 추론으로, 문제해결은 외적 문제해결과 내적 문제해결로, 의사소통은 말하기, 읽기, 쓰기, 듣기로 나누어 각각의 예시 문항과 학생들의 반응을 소개하였다. 수학적 추론 문항은 각각의 추론 능력을 발휘할 수 있는 문항의 개발이 중요하며, 5학년 학생들 중 일부는 이러한 능력을 보여주었다. 의사소통의 각각의 형식보다는 문항에 내재된 수학적 상황이 학생들의 반응에 더 많은 영향을 미치는 것으로 나타났다. 본 연구로부터 수학 평가 문항에 대한 지속적인 연구가 필요하고, 수학 평가에서 인지적 영역의 설정과 활용 방안에 대한 연구가 필요하며, 수학 평가 문항 개발과 관련된 교사 연수의 필요성을 제안하였다.

[주제어] 수학 평가, 수학적 추론, 문제해결, 의사소통, 수학 평가 문항 개발

Ⅰ. 들어가는 말

학교 수학에서 평가의 중요성은 점점 더 커지고 있는 듯하다. 국제적으로 4년 주기로 시행되는 TIMSS와 더불어 3년 주기로 시행되는 OECD 국가간 비교 평가인 PISA는 각 참가국의 전반적인 수학 학력 수준을 나타내는 지표라는 점에서 의미 있게 받아들여지며, 매년 선발된 학생들을 대상으로 시행되는 IMO는 각 국가에서 가장 우수한 학생들의 수학 학력을 측정하는 무대가 되기도 한다. 국내적으로는 대학수학능력시험이나 국가수준 학업 성취도 평가 등의 대규모 평가와 더불어, 학교 수준에서 이루어지는 중간고사나 기말고사에 대한 사회적 관심이 매우 높다. 이에 비추어 초등 수학 학습의 평가에 대한 사회적 관심은 다른 평가에 비하여 상대적으로 낮은 것으로 보인다. 초등 수학 학습의 평가 결과는 점수화되어 공식적으로 기록되지도 않거니와 상급 학교 진학에 영향을 주지도 않기 때문이다.

그러나 교육적인 관점에서 초등 수학 학습에 대한 평가는 매우 중요한 역할을 할 수 있다. TIMSS나 PISA 등의 평가를 통하여 우리나라 학생들은 수학 성취도는 주로 2위권의 우수한 실력을 보여주고 있지만, 수학에 대한 흥미와 자신감을 포함한 정의적 영역에서는

1) [제 1저자] 춘천교육대학교 수학교육과
2) 춘천교육대학교 수학교육과
3) 춘천교육대학교 수학교육과
4) 춘천교육대학교 수학교육과
5) [교신저자] 춘천교육대학교 수학교육과

최하위권의 점수를 나타내고 있다(김경희 외, 2009; 박경미 외, 2002; 박정 외, 2004a; 박정 외, 2004b; 서동엽 2000). 저학년에서는 수학을 좋아하는 학생들이 많지만 학년이 올라갈수록 점점 수학 선호도가 떨어진다는 점은 초등교사들 사이에서는 공통적으로 받아들여지고 있는 실정이다. 이렇듯 학생들의 수학 학업 성취는 높지만 수학에 대한 흥미나 자신감이 부족한 이유는 여러 가지가 있을 수 있다. 주 요인은 교육과정의 내용 체계나 교수·학습 방법과 관련될 개연성이 높겠지만, 평가도 학생들의 흥미나 자신감에 많은 영향을 미칠 수 있다고 본다.

미국의 National Academy of Science(1993)의 보고서에서는 학생들의 학습 평가의 중요한 원리 중 하나로 '학습의 원리'를 들고 있으며, 이는 평가는 학생들의 학습에 도움이 되어야 한다는 원리이다. 학생들이 수학 학습에 흥미를 느끼지 못한다면 평가가 이러한 현상에 영향을 주었을 개연성은 있다고 보는 것이 옳을 것이다. 중등학교의 평가나 대학수학능력시험만큼의 영향은 아니라고 하더라도 학생들은 평가를 통하여 자신이 학습한 것과 평가 내용의 관련성을 생각할 것이며, 그 결과에 따른 적절한 보상을 생각할 것이다. 특히, 평가는 교사의 교수·학습에 많은 영향을 줄 수 있다는 점에서 중요하다. 수학의 교수·학습에서 관계적 이해를 추구하는 교사와 도구적 이해로 충분하다고 생각하는 교사가 있을 때, 도구적 이해로 충분히 해결할 수 있는 평가가 이루어진다면, 굳이 관계적 이해를 지향하는 수업을 하고자 노력할 동인을 얻지 못할 것이며, 학생 또한 평가에 반영되지 않은 내용을 공부하려고 하지 않을 것이다.

본 연구는 초등학교의 수학 수업의 개선을 위하여 진행된 신준식 외(2010, 2011)의 초등학교 수학과 평가문항 개발 연구에 기반한 것이다. 그들의 연구에서는 수학과 평가에 대한 국제적인 동향을 탐색하고, 2007 개정 교육과정의 정신을 구현하고자 학생들의 고차원적 사고력 및 창의력 신장을 측정할 수 있는 문항을 개발하고자 하였다. 이러한 문항 개발 연구의 취지는 앞서 밝힌 바와 같이, 수학 평가 문항을 개선하고, 나아가 학급에서 이루어지는 수학 수업을 개선하는 데 있다. 신준식 외(2010, 2011)의 연구는 수학적 추론, 문제해결, 의사소통 능력을 고차원적 사고력으로 정의하고 있으며, 본 연구는 이러한 고차원적 사고력에 대한 연구에 초점을 맞추어 좀 더 심층적으로 분석한 것이다.

본 논문은 서론에 이어 본 연구의 배경이 되는 수학 학습 평가 관점의 변천을 다룬다. 그런 다음, 신준식 외(2010, 2011)의 연구를 중심으로 수학적 사고력 측정을 위한 평가 도구의 개발 과정과 예시 평가 문항을 소개한다. 그리고 수학적 사고력 문항을 학생들에게 실험적으로 적용한 결과 중 새로운 유형의 문항과 관련된 결과를 제시하고, 이로부터 초등학교에서 수학 학습 평가를 개선할 수 있는 방안을 제안하기로 한다.

Ⅱ. 수학 학습 평가 관점의 변천

교육평가에 대한 논의는 교육과정에 대한 체계적 접근과 더불어 시작되었다. 교육과정이 교육학의 전문 분야로서 체계적으로 연구되기 시작한 것은 1920년경이며, 1949년에 타일러(Tyler)는 자신이 활발하게 참여했던 '8년 연구'의 경험과 그 이전의 교육과정 연구들을 종합하여 '교육과정과 수업의 기본 원리(Basic Principles of Curriculum and Instruction)'라는 제목의 책을 출판하였다. 여기서 타일러는 교육과정과 수업의 기본 요소로서 네 가지를 제시하고 있는데, 이는 오늘날의 용어로 말한다면 교육목표의 설정, 학습

경험의 선정, 학습경험의 조직, 평가이다. 교육목표는 다른 세 가지 요소의 기준이 되며, 평가는 설정된 교육 목표의 달성 정도를 측정하기 위한 수단으로서 가치를 갖는다(강문봉 외, 2007).

이렇듯 목표 달성 정도를 측정하는 수단으로서의 평가의 기능은 전통적 평가 관점에서 가장 중요한 관점이며, 블룸(Bloom), 메이거(Mager)로 이어지면서 교육목표 분류학이나 교육 목표의 행동적 진술 등으로 전개되었다. 평가에 대한 이러한 전통적 관점에 대하여 1990년대 들어 미국 NCTM에서는 상대적으로 관심이 증가하는 영역과 감소하는 영역을 다음의 <표 1>과 같이 대비하고 있다(강문봉 외, 2007). 이 표가 시사하는 점은 다음의 4 가지로 볼 수 있다.

첫째, 전통적으로 학습 목표의 도달 정도를 파악하는 관점에서의 평가보다는 평가 결과를 활용하여 학생의 수학 학습에 도움을 주어야 한다는 측면이 부각되고 있다. 둘째, 이원분류표로 세분화되는 형태의 기능보다는 전체적인 맥락에서의 평가의 중요성이 부각되고 있다. 셋째, 지필 검사뿐만 아니라 다양한 평가 기법의 활용을 권장하며 이 과정에서 계산기, 컴퓨터, 조작물을 이용할 수 있다. 넷째, 수학 학습의 평가를 위하여 표준화된 성취도 검사 결과뿐만 아니라 다양한 평가를 통한 정보를 동시에 고려해야 한다(강문봉 외, 2007).

〈표 1〉 미국 NCTM에서 제시하는 평가의 관심도 변화

관심이 증가하는 영역	관심이 감소하는 영역
·학생들이 수학에 대해 무엇을 알고 있으며 어떻게 생각하느냐를 평가함	·학생들이 무엇을 모르느냐를 평가함
·평가를 하는 것은 가르치는 것에 통합되어야 함	·평가를 하는 것은 단지 등급을 정할 목적으로 정답의 개수를 세는 것임
·광범위한 범위의 수학적 과제에 초점을 두고 수학의 전체적인 관점을 택하는 것	·내용 – 행동의 이원분류 행렬에 의해 조직화된 특수하고 개별화된 많은 기능에 초점을 둠
·많은 수학적 개념의 적용을 요구하는 문제 상황을 개발하는 것	·한 두 가지의 기능만을 요구하는 연습문제나 문장제를 이용함
·지필 검사, 구두시험 및 시범 등 다양한 평가 기법을 사용하는 것	·지필 검사만 이용함
·평가에서 계산기, 컴퓨터, 조작물을 사용하는 것	·평가 과정에서 계산기, 컴퓨터, 조작물을 배제함
·성취 결과, 교육과정, 수업에 관한 정보를 체계적으로 수집하여 프로그램을 평가함	·검사 점수에만 근거하여 프로그램을 평가함
·표준화된 성취도 검사를 프로그램 성취 결과의 많은 지표 중의 하나로만 이용함	·표준화된 성취도 검사를 프로그램 성취 결과의 유일한 지표로 이용함

평가에 대한 미국 NCTM의 관점의 변화와 더불어 우리나라에서도 제 7차 교육과정 시기부터 평가의 변화가 시작되었다. 제 7차 수학과 교육과정의 평가 부분에서는 '수학 학습의 평가는 학생 개개인의 전인적인 성장과 수학 학습을 돕고, 교사 자신의 수업 방법을 개선하기 위한 것이어야 한다.'고 언급하고 있으며, '인지적 영역에 대한 평가에서 사고력 신장을 위하여 결과보다는 과정을 중시해야 하며'라고 강조하고 있다(교육부, 1997). 이렇듯

제 7차 교육과정 시기부터 평가가 학생들의 수학 학습에 도움을 주어야 한다는 측면과, 결과보다는 과정을 중시하여 평가해야 한다는 관점이 강조되기 시작하였다.

2007 개정 교육과정으로 오면서, 평가의 변화는 좀 더 구체화 되었다. 첫째, '수학 학습의 평가는 학생들의 인지적 영역과 정의적 영역에 대한 유용한 정보를 제공하여 학생 개개인의 수학 학습과 전인적인 성장을 돕고 교사의 교수 활동과 수업 방법을 개선하는 데 활용한다.'고 하면서, 평가를 통하여 학생에 대한 정보를 제공한다는 측면을 뚜렷이 부각시키고 있다. 둘째, '수학 학습의 평가에서는 획일적인 방법을 지양하고 지필평가, 관찰, 면담, 자기평가 등의 다양한 평가 방법을 통해 수학 교수·학습을 향상시킬 수 있게 한다.'고 하여, 전통적인 지필평가 방식 외에 관찰, 면담, 자기평가 등 대안적인 평가 방법을 구체적으로 제시하고 있다. 셋째, 의사소통 능력의 평가를 강조하고 있다. 이전의 평가에서도 서술형과 같이 쓰기 평가가 있었으므로 의사소통 능력을 평가하지 않았다고 보기는 힘들지만, 의사소통 능력을 명시한 것은 2007 교육과정에서 처음이며, 그만큼 강조하고자 하는 의도가 있는 것으로 해석할 수 있다. 넷째, '수학 학습의 평가에서는 평가하는 학습 내용에 따라 학생들에게 계산기, 컴퓨터와 같은 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회를 제공할 수 있다.'고 하여, 처음으로 평가에서 공학적 도구나 교구를 활용할 수 있는 가능성을 제시하고 있다(교육인적자원부, 2007).

또한 2011 개정 수학과 교육과정의 평가 항목에서는 '수학적 지식과 기능을 바탕으로 창의적으로 사고하는 능력'에 대한 평가가 추가된 것이 종전 교육과정과 비교할 때 변화된 내용 중 하나이다(교육과학기술부, 2011). 2007 개정 수학과 교육과정에서는 교수·학습 방법에서 '학생의 경험과 욕구를 바탕으로 문제를 창의적으로 해결할 수 있게 한다.'고 하여 창의성을 다루기 시작했지만 평가에서는 다루지 않았던 것이다(교육인적자원부, 2007).

수학교육에서 평가에 대한 관점의 변화와 우리나라 교육과정에서 평가에 대한 관점의 변화는 학교 현장에서 평가 도구의 변화를 수반하는 것이 되어야 한다. 이러한 변화의 핵심으로 보이는 것은 선다형 지필평가 위주의 평가 방법에서 서술형, 관찰, 면담, 자기평가, 정의적 영역의 평가 등을 다소간 반영하는 것으로의 변화인 것으로 보인다. 선다형 지필평가의 가장 큰 한계점은 학생이 알고 있는 정보를 파악하게 해 주지 않는다는 점이다. 예를 들어 다음과 같은 선다형 문항을 생각해보자.

문항. $37+25$는 얼마입니까?
① 12 ② 52 ③ 62 ④ 72 ⑤ 512

위 문항의 정답은 '③ 62'이지만 어떤 학생이 정답을 알았다고 해서 이 학생이 알고 있는 것인지는 명확하지 않으며, 알고 있다고 하더라도 어떤 과정을 통하여 정답을 구하였는지 에 대한 정보를 얻을 수 없다. 더군다나 오답을 하였더라도 알고 있으면서 실수로 틀렸는지 조차 모른다. 선다형 문항에서 확실히 알 수 있는 점은 받아올림이 있는 두 자리 수 덧셈 문제를 틀렸다는 사실 뿐이다. 그러므로 학생이 알고 있는 것에 대한 정보를 얻고 이로부터 학생들의 학습에 도움을 주기 위해서는 선다형 문항은 한계점이 있다는 것이 명확하므로, 대안적인 평가 방법이 요구된다. 이러한 대안적인 평가는 한때 '수행평가', '참평가', '대안평가' 등의 이름으로 불리기도 하였으며, 2007 교육과정에서는 관찰, 면담, 자기평가 등으로 구체화한 것이다. 따라서 2007 및 2011 수학과 교육과정에서 제시하고 있는 평가의 방향을 구현하기 위해서는 새로운 평가 도구가 요구된다고 할 수 있으며, 이에 대

한 문제는 다음 제 Ⅲ장에서 다루기로 한다.

Ⅲ. 수학적 사고력 측정을 위한 평가 도구 개발 방향[6)]

2009년부터 한국과학창의재단에서는 2007 개정 수학과 교육과정의 평가 방향을 구현하기 위한 구체적 평가 도구를 개발하는 과제를 시작하였다. 신준식 외(2010, 2011)의 연구는 이 과제에 대한 보고서이다. 이 장에서는 2년간 3, 4학년 및 5, 6학년으로 나누어 이루어진 이 연구에서 특히 2007 개정 교육과정에서 강조하고 있는 수학적 추론 능력, 문제해결 능력, 의사소통 능력 등의 수학적 사고력 측정을 위한 평가 도구 개발에 대한 논의를 다루기로 한다.

신준식 외(2010, 2011)의 연구에서는 2007 개정 수학과 교육과정을 분석한 다음, 행동영역 중 인지적 영역으로서 계산, 이해, 추론, 문제해결, 의사소통, 창의성의 6개 영역과 정의적 영역을 포괄적으로 정의하였다. 창의성 영역은 2007 개정 수학과 교육과정의 평가 항목에서 언급된 것은 아니었지만, 당시의 시대적 요구로 인하여 연구 과제에서 요구되었던 것이었다. 그리고 고차적 사고력으로서 추론, 문제해결, 의사소통의 3개 영역을 설정하였고, 창의성은 별도의 영역으로 설정하였다. 광범위하게 본다면 계산이나 이해 영역도 수학적 사고력으로 볼 수 있을 것이다. 그러나 계산이나 이해 영역에 대한 기존의 문항은 많이 개발되었다고 보아, 추론, 문제해결, 의사소통의 3가지를 고차적 사고력으로서 별도로 구분한 것이다. 본 논문에서는 이 3가지 영역을 수학적 사고력 문항으로 표현하고 있다. 이 3가지 영역 각각의 개발 방향에 대하여 논하기로 한다. 특히 본 논문에서는 2007 개정 수학과 교육과정에서 새로이 강조되었던 의사소통 영역의 문항 유형을 소개하고 그 결과를 제시하는 데 중요한 목적이 있으며, 창의성 영역과 정의적 영역의 문항 및 그 결과의 분석은 별도의 후속 연구로 다루기로 한다.

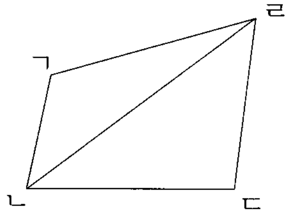
1. 수학적 추론 영역

추론은 주어진 사실을 초월하여 어떤 결론을 내리는 일을 말한다. 추론은 크게 연역 추론과 귀납 추론으로 나눌 수 있으며, 신준식 외(2010, 2011)의 연구에서는 귀납 추론 중에서 유비추론을 별도로 구분하여, 연역 추론, 귀납 추론, 유추의 세 가지로 분류하였다.

연역 추론은 주어진 사실에서 출발하여 일반적으로 받아들여지는 참인 사실에 의하여 결론을 추리하는 것이다. 예를 들면, '모든 사람은 죽는다. 너는 사람이다. 그러므로 너는 죽는다.'와 같은 삼단논법은 연역 추론의 전형적인 예이다. 여기서는 '모든 사람은 죽는다.'는 일반적으로 받아들여지는 참인 사실에 의하여 결론을 도출하고 있는 것이다. 연역 추론은 중등수학에서는 주로 수학적 증명의 형태로 나타나며, 수학적 증명은 가정에서 시작하여 결론으로 끝나는 형식을 지니고 있다. 초등 수학 수준에서는 형식을 요구하는 증명까지는 다루지 않지만, 논리적 사고를 요구하는 측면이 강한 문항을 연역 추론으로 구분하였다.

예를 들어 '사각형의 네 각의 합은 360°이다.'라는 명제를 다음과 같이 설명하는 것은 연역 추론의 예이다.

6) 이 장의 내용은 주로 신준식 외(2010, 2011)의 연구에서 발췌하여 재정리한 것이다.



(사각형의 네 각의 크기의 합)

= (삼각형의 세 각의 크기의 합) ×2

= ☐ ×2

= ☐

위의 방법은 이미 학습한 삼각형의 세 각의 크기의 합은 180^{o}라는 사실로부터 사각형의 네 각의 크기의 합을 연역적으로 추론하고 있는 것으로 볼 수 있다.

또는 다음과 같은 예는 삼단논법을 직접 적용하는 예이다.

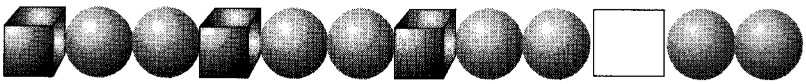
다음 사실로부터 알 수 있는 새로운 사실을 쓰시오.

모든 6의 배수는 3의 배수이다.
168은 6의 배수이다.
→ 그러므로 168은 ________이다.

귀납 추론은 관찰된 사실 뒤의 규칙성을 찾는 사고 과정이며, 그 근거는 다수의 사례에서 관찰되는 법칙이 동종의 다른 사례에서도 성립한다고 보는 자연의 균일성에 있다. 이를테면 우리는 지금까지 살았던 사람이 모두 죽었다는 사실로부터 모든 사람은 죽는다는 사실을 받아들이며 이는 귀납 추론에 의한 것이다. 귀납 추론은 부분적 사례로부터 일반적 결론을 이끌어 내는 것이므로 경험적·확률적 판단이라고 볼 수 있으며, 항상 참이라고는 할 수 없고 최선의 가정을 제공해 줄 수 있을 뿐이다.

귀납 추론의 유형에는 열거에 의한 귀납, 통계적 귀납, 인과적 귀납, 유비추론(이하 유추), 가설의 설정 등이 있으나, 초등 수학에서는 주로 열거에 의한 귀납과 유추가 활용된다. 유추란 유사성을 바탕으로 어떤 대상에 대하여 성립하는 성질로부터 그와 유사한 대상의 성질을 추측하는 것이다. 유비 추론은 이미 알고 있는 것과 유사점을 찾아내어 추론하는 것을 말한다. 즉, A와 B가 유사한 구조를 가졌다면 A가 가진 성질을 B도 가졌을 것으로 짐작하는 것이다. 따라서 유비추론은 가설을 세울 때 적절하다. 유추에서 아동들에게 요구되는 것은 주어진 상황이나 아이디어의 표면적인 특징보다는 관계적 속성에 주목하는 것이다. 이에 따라 신준식 외(2010, 2011)의 연구에서는 귀납 추론과 유추를 구분하였으며, 이때 귀납 추론은 열거에 의한 귀납을 지칭한다.

열거에 의한 귀납의 전형적인 예는 다음과 같은 것이다.



·☐에 어떤 모양을 놓아야 한다고 생각합니까?

위 문항의 답은 정육면체 그림이 될 것이나, 구가 될 수도 있다. ☐ 안에 구가 들어간

전체 12개의 도형이 반복되는 규칙을 생각할 수도 있기 때문이다. 그 외에도 학생들이 몇 개의 삼각형의 세 각의 크기와 그 합을 구한 다음, 세 각의 크기의 합이 180°임을 발견한다거나, 원의 둘레와 지름을 재어보고 그 몫을 구하여 원주율이 약 3.14임을 발견하는 것은 모두 열거에 의한 귀납의 일종이다.

유추의 예는 다음과 같은 것이다.

곱셈을 똑같은 수를 여러 번 더하는 덧셈으로 나타낼 수 있습니다.

$$5\times6=5+5+5+5+5+5=30$$

이를 이용하여 $\frac{3}{4}\times8$을 계산하시오. 계산 과정을 쓰시오.

자연수에서 성립한 곱셈과 덧셈의 관계를 분수에서도 성립할 것이라는 유비 추론에 의하여 아직 학습하지 않은 분수×자연수의 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다. 즉, $\frac{3}{4}\times8$을 해결할 수 없으므로 자연수의 곱셈과 덧셈의 관계를 유추하여 $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{24}{4}=6$임을 알 수 있다.

문제해결 전략 중에서 단순화하기 전략도 많은 경우 유추의 예로 볼 수 있다. 예를 들어 다음 문제를 생각해보자.

500명의 학생들이 1번에서 500번까지 번호를 달고 번호 순서대로 원 모양으로 둘러서 있을 때 125번과 마주 보는 학생은 몇 번인가?

이 문제를 단순화하기 전략으로 해결하는 것은 8명 정도의 학생에 대하여 실제로 원을 그려본 다음, 1번과 5번, 2번과 6번, 3번과 7번, 4번과 8번이 마주보는 것을 확인하고, 이로부터 8명의 절반을 나타내는 수인 4를 번호에 더하거나 빼면 된다는 해결방법을 발견한다. 그런 다음 원래 문제에 적용하여 $125+250=375$라는 답을 구하게 된다. 이 역시 유추의 예로 볼 수 있는 것이다.

2. 문제해결 영역

문제해결력 신장은 여러 차례의 교육과정 개편에도 불구하고 수학교육에서 제 4차 교육과정 이래로 지속적으로 강조되어 온 것이다. 문제해결은 일반적으로 문제를 명확히 이해하고, 합리적인 해결 계획을 세우고, 계획을 실행하며, 과정 및 결과에 대한 반성을 하는 방식으로 어느 한 단원에서 강조하여 다루는 것이 아니라 수학 교수·학습의 전 과정을 통해 지도되고 있다.

문제해결 교육이 효과적으로 구현되기 위해서는 적합한 다양한 문제나 문제 상황의 개발이 요구되는데, 여기서의 문제해결은 학생 스스로 다양한 사고 활동이나 사고 실험을 요구하는 것, 즉 단편적인 전략의 사용만이 아닌 이미 학습된 내용을 종합적으로 활용하여 주어진 문제 상황을 해결하기 위하여 자신만의 독창적 사고를 구성하고 자신의 경험과 욕

구를 바탕으로 문제를 창의적으로 해결할 수 있도록 훈련할 수 있는 기회를 제공할 수 있는 요소들을 수반한 것이어야 한다.

문제해결을 광의적으로 해석하면 문제를 해결하는 능력과 관련된다. 그러나 본 연구에서 행동영역의 한 항목으로서의 문제해결이란 비정형적인 문제로서 해결 방법이 다양하거나 2가지 이상의 개념, 원리, 법칙 등이 관련되어 있는 문제, 여러 단계를 거쳐야 해결할 수 있는 문제, 개념·원리·법칙 등을 실생활에 적용한 문제, 다른 교과의 내용에서 수학적 개념·원리·법칙 등을 찾아 해결하는 능력을 말한다.

· 해결 방법이 다양한 비정형적인 문제
· 2가지 이상의 개념, 원리, 법칙 등이 관련된 문제
· 여러 단계를 거쳐야 해결할 수 있는 문제
· 개념·원리·법칙 등을 실생활에 적용한 문제
· 다른 교과의 내용에서 수학적 개념·원리·법칙 등을 찾아 해결하는 문제

문제해결 활동을 위한 문제들은 수학의 여러 가지 내용 사이의 개념, 원리, 법칙 등의 관련성이 요구되는 수학 내적인 문제뿐만 아니라, 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등 수학과 일상생활 및 타 교과내용과의 관련성의 파악이 요구되는 통합교과적인 소재의 응용문제를 해결할 수 있는 수학 외적인 문제를 포괄한다.

현행 교육과정에서는 문제를 해결하는 방법 및 전략으로서, 그림 그리기, 규칙 찾기, 표 만들기, 식 세우기, 예상과 확인하기, 거꾸로 풀기, 단순화하기 등의 다양한 전략을 포함하고 있다. 따라서 이러한 전략들을 적절히 활용한 문제를 통해 문제해결력 신장을 도울 수 있을 것이다.

3. 의사소통 영역

21세기 정보화 사회의 넘치는 지식과 정보의 전달 및 생성에서 의사소통은 '정보가 먼저, 의사소통은 그 다음'이라는 정보 전달의 관점과 '의사소통이 먼저, 정보는 그 다음'이라는 정보 생성의 관점으로 구분하기도 한다. 전자의 관점에서는 학생들이 의사소통을 할 때는 이미 수학적 지식을 갖고 있고 이것을 정보로 전달한다는 것으로 교사가 학생들에게 수학적 지식을 가르치는 것 등이 포함된다. 또한 후자의 관점에서의 의사소통은 정보를 갖고 있는 송신자가 수신자에게서 일방적으로 메시지를 전달하는 것이 아니라 두 사람이 같은 의미를 공유할 수 있는 상황에서 서로의 의견을 주고받으면서 정보가 생겨나는 것을 말하며 조별학습을 통하여 지식을 구성하고자 하는 교수·학습 방법이 여기에 속한다.

2007 개정 교육과정에서는 수학적 의사소통을 다음과 같이 규정하고 있다(교육인적자원부, 2007).

아. 수학적 의사소통 능력을 신장시키기 위하여 교수·학습에서 다음 사항에 유의한다.
(1) 수학 용어, 기호, 표, 그래프 등의 수학적 표현을 이해하고 정확히 사용하게 한다.
(2) 수학적 아이디어를 말과 글로 설명하고 시각적으로 표현하여 다른 사람과 효율적으로 의사소통할 수 있게 한다.
(3) 수학을 표현하고 토론하면서 자신의 사고를 명확히 하고 반성함으로써 의사소통이 수학을 학습하고 활용하는 데 중요함을 인식하게 한다.

수학적 의사소통 능력을 신장시키기 위하여 수학 용어, 기호, 표, 그래프 등의 수학적 표현을 이해하고 정확히 사용할 수 있어야 한다. 또한 수학적 아이디어를 말과 글로 설명하고 시각적으로 표현하여 다른 사람과 효율적으로 의사소통할 수 있을 뿐만 아니라, 개인별로 문제를 푸는 활동뿐만 아니라, 말하기, 듣기, 읽기, 쓰기와 같은 다양한 방법을 활용하여야 한다. 이러한 과정을 통하여 수학을 표현하고 토론하면서 자신의 사고를 명확히 하고 반성함으로써 실생활에서 수학적 의사소통이 수학을 학습하고 활용하는 데 중요함을 인식하게 해야 한다.

일반적으로 말하기는 생각을 언어로 변형하는 인지작용 과정, 상대방의 말을 듣고 판단하여 개인의 내재 동기를 충족할 수 있게 언어적으로 표현하는 것, 화자가 의사소통 상황에서 언어적 표현을 통하여 청자에게 변화를 주기위해 메시지를 전달하는 일련의 행위를 말한다(전은주, 1999). 언어에서 말하기 능력이란 자신의 생각을 자연스럽게 말하는 것, 발음의 정확성 등을 측정하겠지만 수학에서는 자신의 수학적 아이디어를 수학용어를 사용하여 다른 사람에게 정확하게 전달하는 능력이다. 따라서 수학에서 말하기의 평가 기준은 수학용어의 사용 여부, 의미 전달 여부(정보와 메시지 단절 여부)에 역점을 두어야 한다.

여기서 한 가지 어려움이 있다. 말하기 능력을 평가하기 위하여 수업에서 교사의 관찰에 의하여 평가하는 것이 바람직하겠지만 모든 학생을 동시에 같은 능력을 평가할 수 없으므로 지필평가 문항으로 개발하였다. 지필평가이므로 말하는 것을 평가하려면 결국 학생들이 쓴 것을 평가해야 하므로 결국 의사소통의 쓰기와 다를 바 없을 것이다. 신준식 외(2010, 2011)의 연구에서는 말하기를 자신의 생각을 수학적인 용어를 사용하여 다른 사람에게 전달하는 또는 표현하는 능력으로, 쓰기는 문제의 해결과정을 수학적인 기호나 그래프, 그림 등을 사용하여 표현하는 능력으로 조작적으로 정의하였다.

수학 수업에서 쓰기를 통하여 학생들은 정보를 수집하여 발견한 결과를 다른 사람에게 전달할 수 있으며, 자신의 생각을 말로 표현하는 데 불안을 느끼는 학생들은 심리적으로 편안한 상태에서 이해한 것을 표현할 수 있으며, 분석, 평가, 종합과 같은 고차원적인 사고를 할 수 있는 기회를 갖게 된다(이종희 외, 2003). 교사는 학생의 쓰기를 통하여 학생의 인지적인 수준과 정의적인 측면을 짐작할 수 있어 학생의 능력을 평가하는 데 많은 도움이 된다.

수학 수업에서 쓰기의 유형에는 요약하기, 질문하기, (글로)설명하기, 정의하기, 문제 만들기, 보고서 작성, 에세이, 수학일지 쓰기, 수학 노트 쓰기 등이 있다. 이와 같은 다양한 쓰기의 유형이 있지만 대부분 수업시간의 수행평가 또는 과제 제시의 방법으로 제시하는 경우가 많으며, 소요되는 시간이 많은 편이다. 따라서 짧은 시간에 학생의 쓰기 능력을 평가하기 위해서는 (글로)설명하기, 정의쓰기, 문제 만들기 등이 있다.

한편, 영어 단어인 hearing과 listening은 모두 듣기로 번역되지만, hearing은 감각적인 행동이고, listening은 주의를 기울이거나 들으려고 노력하는 행동이라고 할 수 있다. 전통적인 수업에서는 교사의 일방적인 의사소통이었으며 학생들에게 수동적인 자세를 요구하였다. 그러나 양방향의 의사소통에서는 학생들이 주의를 기울일 수 있는 분위기를 조성해야 하고, 학생이나 교사가 모두 수학적인 아이디어를 listening하는 행동을 보여야 한다.

Hoyles(1985, 이종희 외, 2003, 재인용)는 학습 과정에서 듣기가 다른 사람의 생각을 자신의 생각과 통합하는 활동이므로 자신의 의견을 말하도록 자극하면서 논쟁의 초점을 다시 바라보게 한다고 하였다. 이런 과정은 학습에서 매우 중요한 과정이므로 교사는 다른 사람의 말을 듣는 태도와 방법을 지도해야 한다. 교사는 학생들에게 동료가 무슨 말을 하였는지 질문해보거나 문제를 말로 제시함으로써 듣기 능력을 향상시킬 수 있다. 신준식 외

(2010, 2011)의 연구에서는 듣기 영역의 평가 문항을 개발하기 위하여, 별도의 교사용 듣기 자료를 개발하였다. 학생들은 교사가 읽어주는 자료를 듣고 주어진 물음에 답하게 되는 것이다.

텍스트를 읽는다는 것은 다른 의사소통과 달리 이해와 해석할 수 있는 여지를 만들어주고 있다. 특히, 수학 교과서는 다른 분야의 읽기와 달리 독자적인 문법에 따르기 때문에 교사는 교과서를 읽고 이해하는 방법을 보여주는 모델의 역할을 해야 한다. 학생들은 수학 교과서의 형식적이고 기호로 표현된 수학을 읽을 수 있어야 하며, 일상생활에서도 수학과 관련된 글이나 각종 그래프 등을 읽고 해석할 수 있어야 한다.

Borasi & Siegel(2000, 이종희 외, 2003, 재인용)은 수학교육에서 읽기의 목적을 수학과 읽기의 관점에서 다음과 같이 제시하였다.

> 첫째, 수학 교과서를 읽는다는 것은 수학의 용어와 문장제의 이해에 초점을 두며, 읽기 지도는 수학의 전문 용어를 가르치고 학습하기 위한 전략을 강조하고, 문장제의 구문론과 의미론적인 조직이 문제 해결에 영향을 준다는 데 관심을 두게 된다.
>
> 둘째, 읽기는 수학을 배우기 위한 하나의 학습 방식이 될 수 있으며, 독자, 텍스트, 맥락의 상호작용 속에서 의미를 구성하는 행동이라고 본다.
>
> 셋째, 읽기는 수학의 다양한 측면을 알기 위한 활동으로서 수학에 관한 역사적, 철학적 텍스트, 수학 개념의 적용에 대한 신문 기사와 잡지, 수학적인 이야기 등이 텍스트로 포함될 수 있다. 그러나 읽기를 텍스트를 읽어서 정보를 추출하는 것으로 본다면 교사는 학생들의 참여를 지지할 수 있는 전략이나 교수 전략을 폭넓게 구상하기 어렵다.
>
> 넷째, 학습자가 학습 목표를 성취하기 위하여 풍부한 텍스트를 스스로 탐구하고, 읽기를 통하여 학습 방법을 배울 수 있게 한다. 이 관점이 읽기 능력의 평가 관점과 부합된다고 할 수 있다.

위의 관점에서 보면 학생들의 수학 읽기 능력을 발달시키기 위해서는 교과서 내용의 구성에서도 변화를 시도해야 할 것이다. 즉, 현재의 수학 교과서에서는 단순히 문제 상황을 제시하였기 때문에 읽기를 통하여 전문 용어를 학습하거나 학습 목표에 달성하는 학습 방법을 배우기에는 제한이 있다. 부분적으로 수학 용어를 정의하거나 설명한 것도 있지만 수업 현장에서는 교사의 설명으로 대체하기에 학생의 수학 읽기 능력을 발달시키기에는 여전히 미흡한 실정이다. 따라서 수학 교과서에 국어의 설명문처럼 텍스트를 제시해야 할 것이다.

Ⅳ. 수학적 사고력 측정을 위한 예시 평가 도구[7]

제 Ⅲ장에서 신준식 외(2010, 2011)의 연구에서 규정한 추론, 문제해결, 의사소통의 3가지 영역의 수학적 사고력에 대한 의미와 그에 따른 문항 개발 방향을 제시하였다. 이 장에서는 이러한 방향에 따라 개발한 예시 평가 도구 및 실험 결과를 제시하기로 한다. 본 연구의 목적은 문항의 개발에 있으므로, 실험의 목적도 문항의 개선 및 학생들의 반응을 예

7) 이 장의 내용은 주로 신준식 외(2010, 2011)의 연구에서 발췌하여 재정리한 것이다.

측하는 데 있다. 이에 따라 실험은 서울 성동구에 소재한 5학년 1개 학급, 서울 도봉구에 소재한 6학년 1개 학급을 대상으로 이루어졌다.

1. 수학적 추론

수학적 추론을 연역 추론, 귀납추론, 유비추론 등 3가지로 구분하였으며, 이에 대한 구체적인 문항의 예는 다음과 같다.

가. 연역 추론

연역 추론 문항의 예는 다음 <표 2>와 같다. 이 문항은 서술형 문항으로서 학생들이 12라는 정답을 아는 것 외에, 어떠한 사고 과정을 거쳐서 정답에 도달하였는지를 명확히 하기 위하여 이유를 명확히 쓰도록 요구하고 있다. 이 문항은 선우가 생각하고 있는 수에 84라고 답하고, 적절한 이유를 제시했을 때 2점, 84만 맞추면 1점, 모두 틀리면 0점이다.

〈표 2〉 연역 추론 문항의 예

◇ 문항

다음 선우와 지민이의 대화를 듣고 선우가 생각하고 있는 수를 맞추고, 그렇게 생각한 이유를 쓰세요.

선우 : 내가 생각하고 있는 수를 맞추어봐.
지민 : 4의 배수니?
선우 : 응.
지민 : 8의 배수니?
선우 : 아니.
지민 : 6의 배수니?
선우 : 응.
지민 : 9의 배수니?
선우 : 아니.
지민 : 50보다 크니?
선우 : 아니.
지민 : 아 알았다. 네가 생각하고 있는 수는 (   )(이)구나.

◦ 선우가 생각하고 있는 수 : ________
◦ 그렇게 생각하는 이유:

이 문항에서 2점을 받은 학생은 26명 중 9명으로 34.6%이다. 2점을 받은 학생들은 대부분 먼저 4와 7의 공배수를 찾고, 그 중 60보다 크고 100보다 작다는 조건을 적용하였다. 이 문항에 대한 전형적인 답은 '4의 배수는 (60부터) 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92, 96 이 중 7의 배수가 84이기 때문에 84이다.'라는 것으로, 34.6%의 학생들은 주어진 조건으로부터 연역적으로 추론하여 84라는 답을 구하였다.

1점을 받은 학생은 26명 중 7명으로 26.9%이다. 이 학생들은 84라는 답은 맞추었지만,

이유를 불완전하게 제시하였다. 전형적인 답은 '7×12 = 84고 4×21 = 84이기 때문에'와 같은 것으로, 주어진 조건은 네 가지인데 이 중 일부 조건만 만족함을 보인 경우이다. 이 학생들은 직관에 의존하여 84라는 답은 구하였지만, 그 이유는 완전하게 제시하기 어려웠던 것으로 보인다.

0점을 받은 학생은 26명 중 10명으로 38.5%이다. 이 중 5명의 학생은 두 개의 하위 문항에 아무 반응도 보이지 않았고, 1명의 학생은 첫째 문항에 70이라는 답만 썼을 뿐 아무런 이유도 제시하지 않았다. 다른 4명의 학생은 답이 아닌 수를 쓰고, 다소 근거가 부족한 이유를 들었다.

연역 추론 문항에 대한 학생들의 이러한 반응으로부터 5학년 수준의 학생들 중 35% 정도의 학생들은 연역적으로 추론한다는 점을 알 수 있다. 특히 1점을 받은 학생들도 직관적으로는 연역에 의하여 정답에 이르렀을 가능성이 있지만 글로 옮겨 쓰는 데서 어려움이 있었을 가능성을 보여준다. 따라서 5학년 수준에서는 이러한 연역 추론 문항을 제시함으로써 학생들의 연역 추론 능력을 개발하기 시작하려는 시도가 의미 있을 수 있다는 시사점을 제공하는 것으로 풀이된다.

나. 귀납추론

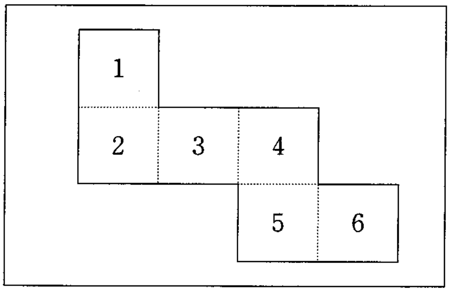
귀납 추론 문항의 예는 다음의 <표 3>과 같다. 주사위의 전개도로부터 두 밑면을 찾고, 40번째 항까지의 규칙을 찾아 답을 구하는 문항으로, 143이라는 정답을 하면 3점, 그렇지 않은 경우 0점이다.

〈표 3〉 귀납 추론 문항의 예

◇ 문항

오른쪽의 전개도를 이용하여 만든 주사위 40개를 규칙에 따라 늘어놓고 위에서 보았더니 <보기>와 같았습니다.

주사위 40개의 아래에 있는 면에 나타난 숫자의 합은 얼마인지를 구하시오.



<보 기>

1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	......

40개의 주사위를 늘어놓고 위에서 본 모양

이 문항에서 3점을 받은 학생은 22명 중 4명으로 18.2%이다. 이 중 3명은 규칙을 찾아서 답을 구하였지만 1명은 40번째까지 수를 쓴 다음 모두 구하였다. 0점을 받은 18명의 학생 중 3명은 40번째까지 수를 모두 더하다가 실수한 경우로, 이 학생들의 답은 각각 131, 144, 152이다. 다른 3명의 답은 840으로, 1에서 6까지 합인 21을 구한 다음 40을 곱하여 나

온 값이다. 5명은 무의미한 수로 답하였으며, 7명은 무응답이었다.

귀납 추론 문항에서 어려운 점은, 학생들이 문제에서 주어진 몇 개의 사례로부터 계속 모든 경우를 조사하여 답을 구하게 하는 것은 귀납 추론이 아니라는 점이다. 따라서 학생이 직접 모든 경우를 조사해 보기는 어렵고, 그렇다고 하여 너무 복잡한 식을 요구할 만큼 크지 않은 적절한 항을 묻는 것이 적절하다. 그러나 위 문항에서 보듯이 학생들은 직접 구하려는 성향을 지니며, 이를 방지하기 위해서는 다소 어려운 문항을 제시하거나 항을 크게 해야 하는 어려움이 있다.

다. 유비추론

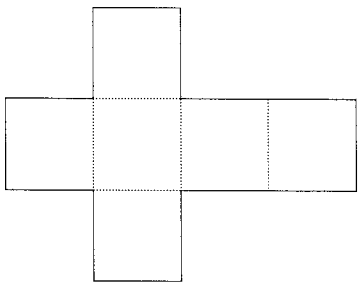
유추 문항의 예는 다음의 <표 4>와 같다. 이 문항은 주어진 정육면체에서 밑면의 모양으로부터 꼭지점과 모서리를 파악하는 방법을 파악하여, 정육각기둥의 전개도로부터 꼭지점과 모서리의 개수를 구하는 문항이다. 두 가지 모두 바르게 구하면 2점, 한 가지만 바르게 구하면 1점, 그 외의 경우 0점이다.

〈표 4〉 유추 문항의 예

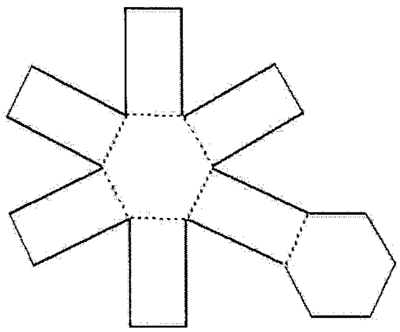
◇ 문항

<보기>는 주어진 전개도로 만들 수 있는 입체도형의 꼭짓점과 모서리의 개수를 구하는 식을 나타냅니다. ㉠과 ㉡에 들어갈 알맞은 식을 쓰시오.

<보 기>



◆ 꼭짓점의 개수 : 4×2 = 8
◆ 모서리의 개수 : 4×3 = 12



◆ 꼭짓점의 개수 : (㉠)
◆ 모서리의 개수 : (㉡)

이 문항에서 '6×2=12, 6×3=18'과 같이 바르게 식을 세워 구한 학생은 26명 중 3명으로 11.5%이다. 한 가지만 바르게 구하여 1점을 받은 학생은 4명으로 15.4%였는데, 이 학생들은 꼭지점의 개수만을 '6×2=12'와 같이 바르게 구하였다. 0점을 받은 학생은 모두 19명으로 73.1%였는데, 이 중 8명은 '5×4=20, 3×9=27'과 같이 유추와 관련이 적고, 정답을 구하기 힘든 식을 세웠다. 다른 8명은 본인이 생각한 수만 썼는데 정답이 아니며, 5명은 무응답이다. 이 문제는 정육각기둥을 묻는 것으로 학생들에게는 생소할 수 있는 문항이지만, 학생들이 유추에 의해 해결할 가능성을 높이기 위하여 만들어진 문항이다. 문항의 생소함과 더불어 유추라는 생각 자체가 학생들에게는 어렵게 느껴진 것으로 풀이된다.

2. 문제해결

문제 해결의 문항을 외적 문제 해결과 내적 문제 해결 문항으로 구분하였으며, 이에 대한 문항의 예는 다음과 같다.

가. 외적 문제해결

외적 문제해결 문항의 예는 다음의 <표 5>와 같다. 정육면체 모양의 상자 속에 정육면체 모양의 초콜릿을 담는 상황을 통하여 정육면체의 부피에 대한 이해를 묻고 있는 문항이다.8)

〈표 5〉 외적 문제해결 문항의 예

◇ 문항

상우는 한 변의 길이가 3cm인 정육면체 모양의 초콜릿 27개를 꽉 채워 넣을 수 있는 정육면체 모양의 선물 상자를 만들려고 하였습니다. 실수로 가로, 세로, 높이 각각의 길이를 1cm씩 작게 만드는 바람에 상자의 공간이 남아 한 변의 길이가 2cm인 정육면체 모양의 초콜릿으로 바꾸어 담았습니다. 상우는 최대 몇 개의 초콜릿을 담을 수 있는지 구하시오.

나. 내적 문제해결

내적 문제해결 문항의 예는 다음의 <표 6>과 같다. 정육면체의 전개도, 넓이, 둘레와의 관계를 묻는 문항으로 정답인 56을 제시하면 2점, 그렇지 않은 경우 1점인 문항이다.

〈표 6〉 내적 문제해결 문항의 예

◇ 문항

정육면체의 전개도의 넓이가 96㎠라고 합니다. 이 전개도의 둘레의 길이를 구하시오.

○ 답 : (   )cm

8) 외적 문제해결에 대한 문항은 이미 많은 연구가 이루어져 있으므로 실험 결과는 다루지 않기로 한다.

이 문항에 대하여 2점을 받은 학생은 3명으로 11.5%였다. 0점을 받은 학생 23명 중 11명의 답은 96을 2 또는 4, 6으로 나눈 답이다. 6으로 나눈 16으로 답한 학생이 5명, 2로 나눈 48로 답한 학생이 4명, 4로 나눈 24로 답한 학생이 2명이었다. 0점을 받은 학생 중 7명은 의미를 알기 어려운 수로 답하였으며 92, 960 등이 그러한 예이다. 나머지 5명은 무응답이었다. 이 문항에서 학생들이 어려웠던 부분은 정육면체의 전개도의 넓이를 정사각형 6개의 넓이로 보는 것이었을 것으로 추측할 수 있을 뿐이다. 사실 이 문항은 '정육면체의 전개도', '전개도는 넓이가 같은 정사각형 6개로 구성된다는 사실', '나눗셈을 이용하여 정사각형의 넓이 구하기', '정사각형의 한 변의 길이 구하기', '전개도의 둘레 구하기'라는 최소 5가지 사실의 관계를 이용해야 한다는 점에서 학생들에게 어려웠던 것으로 풀이된다.

3. 의사소통

일반적으로 말하기, 쓰기, 듣기, 읽기를 의사소통이라고 통용되듯이 본 연구에서도 말하기, 쓰기, 듣기, 읽기로 구분하여 평가문항을 개발하였다.

가. 말하기

말하기 문항의 예는 다음의 <표 7>과 같다. 이 문항은 '재원'이와 '수진'이라는 두 아동의 대화 상황을 통하여 짝수와 홀수와 관련된 상황에서 이유를 말하듯이 쓰도록 하고 있다. 적절한 대화를 쓰면 1점, 그렇지 않으면 0점이다.

〈표 7〉 의사소통(말하기) 문항의 예

◇ 문항

재원이와 수진이가 홀수와 짝수 찾기 놀이를 하고 있습니다.

재원 : 짝수 찾기 놀이 해볼래?
수진 : 좋았어. 내 출석 번호 26번.
재원 : 우리 아파트 동수 402호.
수진 : 내 핸드폰 뒷 번호 5000.
재원 : 틀렸다! 수진아. 5000은 홀수야. 뒷자리 0도 그렇고 앞자리 5도 2로 나누어지지 않아.
수진 : ________________________________

여러분이 수진이라고 생각하고 밑줄 그은 부분에 들어갈 문장을 완성하시오.

이 문항에서 적절한 대화를 써서 1점을 받은 학생은 26명 중 12명으로 46.2%이다. 정답을 한 학생들의 대화는 대부분 '5000은 2로 나누어떨어지므로'라는 말을 포함하고 있다. 이 문항에서 0점을 받은 학생은 14명으로 53.8%였는데, 그 유형을 크게 4가지로 나누어볼 수 있다. 14명 중 5명의 반응은 '재원아 앞 자리는 소용이 없어.'와 같이 불완전한 이유로 대화를 완성한 경우이다. 다른 5명의 반응은 '그럼 5002는 어때?'와 같이 수진이가 자신이 틀렸다고 인정하고 다른 대안을 제시하는 것이며, 3명의 반응은 '아하 그렇구나!'와 같이

수진이가 자신이 틀렸다고 인정하는 대화이다. 1명만이 무응답이었다.

여기서 수진이가 틀렸음을 인정하는 대화로 완성한 8명의 반응은 매우 흥미롭게 느껴진다. 그 이유는 만약 위와 같은 대화 상황이 실제 상황이라면 충분히 일어날 수 있는 일이기 때문이다. 두 명의 친구가 대화를 하다가 옳은 의견을 제시했지만 친구가 틀렸다고 함으로써 자신이 틀렸다고 인정하거나 다른 대안을 찾는 것은 매우 자연스러워 보인다. 이러한 결과가 주는 시사점은 학생들에게 대화 상황 자체는 거부감 없이 받아들여질 수 있다는 점이다. 이 문항에 대하여 12명이 정답을 했고, 8명은 '실제' 대화인 듯이 생각하여 오류를 인정하는 답을 하였으며, 5명은 정답을 시도했지만 논리적 결함이 있는 답을 하였다. 즉 말하기 형식 자체에 대한 거부감은 없다고 보는 것이 타당한 것으로 생각되며, 수학적으로 보다 정교하게 문항을 제시하는 것이 학생들의 정확한 반응을 얻을 수 있는 개선책이 될 것이다.

나. 쓰기

쓰기 문항의 예는 다음의 <표 8>과 같다. 실제로 쓰기 문항은 기존의 서술형 지필 평가 문항과 큰 차이는 없으며, 두 가지 답 모두 적절하면 2점, 한 가지만 적절하면 1점, 그 외의 경우 0점이다.

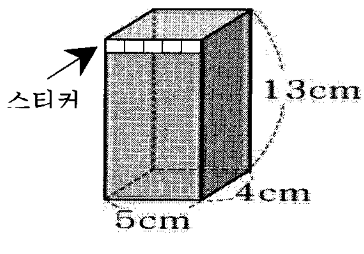
〈표 8〉 의사소통(쓰기) 문항의 예

◇ 문항

다음 이야기를 읽고, 동호가 생각하는 방법으로 문제를 해결하는 과정을 식으로 나타내고 답을 구하시오.

민수는 그림과 같은 직육면체의 모든 면에 한 변의 길이가 1cm인 정사각형 모양의 스티커를 서로 겹치지 않게 이어 붙여 꾸미기를 하려고 합니다. 민수는 우선 최소한 몇 장의 스티커가 필요한지를 알아보기로 했습니다. 그래서 각각의 면에 붙여야 하는 스티커의 개수를 구하고 있습니다. 민수의 친구인 동호가 그 장면을 보고 다음과 같이 이야기하였습니다.

"에이, 직육면체의 성질을 이용하면 모든 면을 다 구하지 않고도 간단하게 구할 수 있는데."



<보여줄 그림>

○ 동호가 이용한 직육면체의 성질 : 마주보는 3쌍의 면은 서로 합동이다.

○ 해결과정 및 답

이 문항에서 적절히 해결하여 274라는 정답을 구하여 2점을 받은 학생은 22명 중 5명으로 22.7%이다. 1점은 없었으며, 0점은 17명으로 77.3%였다. 17명 중 3명은 계산 과정의 오류로 틀린 경우이고, 나머지 14명은 무응답이었다. 이 문항은 쓰기의 어려움도 있었겠지만, 주어진 문제 상황이 결국 겉넓이와 관련된다는 사실을 인식하지 못한 데서 오는 어려움이 학생들에게 다소 어렵게 느껴진 것으로 보인다.

다. 듣기

듣기 문항의 예는 다음의 <표 9>와 같다. 교사용 듣기 자료를 같이 첨부하여 개발하였으며, 식으로 바르게 나타내면 1점, 그렇지 않은 경우 0점이다.

〈표 9〉 의사소통(듣기) 문항의 예

◇ 문항

선생님이 들려주시는 글을 듣고 알맞은 식으로 나타내시오.

◦ 식 :

[교사가 들려줄 듣기 자료]

민주는 주어진 세 수를 약수와 배수로 그 관계를 설명하였습니다. 민주의 이야기를 듣고 하나의 식으로 나타내시오.

· 13은 104의 약수입니다.

· 104는 8의 배수입니다.

이 문항에서 1점을 받은 학생은 26명 중 14명으로 53.8%이다. 이 학생들은 주로 $13 \times 8 = 104$와 같이 곱셈식을 세워서 답하였다. 0점을 받은 학생은 12명으로 46.2%였는데, 학생들의 반응은 크게 세 가지로 나누어진다. 8명의 반응은 $104 \times 8 = 832$ 또는 14×7과 같이 문항과 관련 있는 식은 세웠지만 정답과는 관련이 적거나 없는 경우이다. 2명의 반응은 '13은 104의 약수, 104는 8의 배수'와 같이 선생님이 들려 준 이야기를 그대로 옮겨 쓴 답이며, 2명은 무응답이다. 이 문항으로부터 듣기라는 형식 자체로 인한 어려움은 그리 크지 않은 것으로 볼 수 있다.

라. 읽기

읽기 문항의 예는 다음의 <표 10>과 같다. 이 문항의 답은 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19이며, 문항에서 제시하고 있듯이 '표시'가 있을 때 2점, '표시'는 없지만 답이 맞으면 1점, 답이 틀리면 0점이다.

<표 10> 의사소통(읽기) 문항의 예

◇ 문항

다음 글을 읽고 아래에 주어진 수를 '에라토스테네스의 체'에 의해 표시하고, 1에서 20까지의 수 중에서 약수가 2개인 수를 모두 찾으시오.

> 자연수를 잘 관찰해 보면 약수가 2개인 수가 있습니다. 가령 2, 3, 5, 7, …등입니다. 이 수들은 1과 그 자신만을 약수로 가집니다. 즉, 2개의 자연수의 곱으로 나타낼 수 있는 방법이 다음과 같이 오로지 한 가지뿐인 수입니다.
>
> $$2 = 1 \times 2$$
> $$3 = 1 \times 3$$
> $$5 = 1 \times 5$$
> $$7 = 1 \times 7$$
>
> 약수가 2개인 수를 찾는 방법에는 그리스 시대부터 알려진 '에라토스테네스의 체'가 있습니다. 이 방법은 1에서 100까지의 자연수를 배열해 놓고 먼저 1을 지웁니다. 다음에 2를 남기고 2의 배수를 모두 지웁니다. 다음에 3을 남기고 3의 배수를 모두 지웁니다. 이와 같은 일을 계속하면 약수가 2개인 수만 남고 그렇지 않은 수는 모두 지워집니다.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

◦ 약수가 2개인 수 : ____________________

이 문항에서 2점을 받은 학생은 26명 중 8명으로 30.8%이다. 이 학생들은 정답인 8개의 수를 정확히 찾아내었다. 학생들의 표시 방법은 두 가지로 나누어지는데, 정답에만 표시한 학생이 4명, 답이 아닌 수에만 표시한 학생이 3명, 동시에 서로 다른 표시를 한 학생이 1명이었다.

1점을 받은 학생은 2명으로 7.7%였다. 두 학생 모두 답은 정확했지만, 아무 '표시'를 하지 않았다. 이 학생들은 문항에서 요구하는 '읽기' 능력에 다소 문제가 있는 것으로 해석할 수 있다.

0점을 받은 학생은 16명으로 61.5%였다. 이 중 11명의 학생은 아무 '표시' 없이 정답이 아닌 수를 나열하였고, 1명은 표시는 있지만 정답이 아닌 9를 포함하여 실수를 한 것으로 해석된다. 나머지 4명의 학생의 반응은 무응답 또는 의미 없는 반응이었다.

V. 결론 및 제언

본 연구는 2년에 걸쳐 이루어진 초등학교 3, 4학년 및 5, 6학년 평가 문항 개발을 위한 신준식 외(2010, 2011)의 연구 중 특히 수학적 추론, 문제해결, 의사소통의 3개 영역을 수학적 사고력으로 규정하고, 이들 영역의 문항 개발 방향과 예시 문항, 그 적용 결과를 소개하였다.

본 연구를 통하여 추론, 문제해결, 의사소통으로 나누어 예시 문항과 학생들의 결과를 살펴보았으며, 이러한 결과로부터 다음과 같은 시사점을 얻을 수 있다.

첫째, 추론과 관련하여 5학년 학생들은 연역적 추론을 통한 사고가 가능하다는 점이며 연역 추론이 요구되는 문항을 제시함으로써 학생들의 연역적 추론을 자극할 필요가 있다는 점이다. 또한 귀납 추론 문항은 모든 경우를 해보기보다는 '진정한' 귀납 추론을 통하여 해결하는 것이 바람직한 문항을 출제하는 것이 적절하다는 점이다.

둘째, 2007 개정 수학과 교육과정에서 새로이 추가된 의사소통 영역과 관련하여 말하기, 읽기, 쓰기, 듣기 등의 형식의 영향은 문항 난이도에 결정적인 영향을 미치지는 않는다는 점이다. 이보다는 문항에서 요구하는 수학적 상황이 더 많은 영향을 주는 것으로 풀이된다.

본 연구를 통하여 수학 학습 평가의 개선을 위한 몇 가지 제언을 하고자 한다.

첫째, 이번에 이루어진 수학 평가 문항 개발 연구는 지속적으로 광범위하게 이루어질 필요가 있다는 점이다. 초등학교 교사 대부분은 업무와 수업으로 인한 많은 부담을 가지고 있으며, 여러 교과목을 지도하고 있다. 이로 인하여 특정한 한 교과에 대하여 전문적인 평가 문항을 개발하기는 쉽지 않은 것 같다. 실제로 본 연구를 진행하면서 만났던 교사들 대부분은 외부에서 개발한 문항을 다소 변형하여 활용하는 정도였고, 스스로 학생들을 위한 평가 문항을 개발하는 교사는 많지 않았다. 따라서 다양한 평가 문항의 예를 교사들에게 제공해 주는 것은 현장에서 수학 학습 평가를 개선하고, 이를 통하여 학생들의 수학 학습에 도움을 주는 데 좋은 대안이 될 수 있을 것이다. 특히 2007 개정 수학과 교육과정부터 새로이 강조되고 있는 의사소통 영역에 대한 평가문항은 이번 2년간의 연구에서 개발된 문항으로는 부족하다. 따라서 풍부한 문항 자료를 개발하여 초등학교 교사들이 선택적으로 쉽게 활용할 수 있게 하기 위한 지원이 확대될 필요가 있다.

둘째, 평가 틀의 정립과 그 활용 방안에 대한 후속 연구가 이루어질 필요가 있다. 수학 학습의 평가에 있어서 여러 가지 관점이 존재하고 있다. 우선 전통적인 Bloom의 인지적 영역은 지식, 이해, 적용의 3가지가 대표적이고, 여기에 분석, 종합, 평가를 더할 수도 있다. 국가수준 학업 성취도 평가에서는 계산, 이해, 추론, 문제해결, 의사소통을 인지적 영역으로 구분하고 있다. 그런가하면 OECD 국가간 PISA 평가는 재생, 연결, 반성이라는 수학적 과정의 틀을 이용하고 있다. 또한 NCTM에서는 하나하나의 구분되는 기능을 평가하기보다는 학생들의 전반적이고 종합적인 능력을 평가하기를 권장하고 있다. 실제로 문항 개발과 검토 과정에서 자주 논란이 된 것은 예컨대 문제해결 영역의 문항이지만 연역 추론도 섞여 있다는 것이고, 문제해결 문항을 서술형으로 출제하게 되면 의사소통 중 쓰기 능력도 관련이 되므로, 한 가지 인지적 영역을 구분하기 어렵다는 점이다. 이러한 어려움으로 인하여 신준식 외(2010, 2011)의 연구에서는 문항을 해결하는 데 있어서 가장 많이 관련되는 영역으로 인지적 영역을 구분하였으며, 두 가지 인지적 영역이 비슷하게 관련되는 경우에는 두 가지 인지적 영역을 동시에 제시하기도 하였다.

서동엽(2001)의 연구에서는 수학 학습 평가에서 인지적 영역과 관련된 문제를 다음과 같이 제시하였다.

> 평가틀과 관련하여 내용 영역과 행동 영역이라는 이원분류, 특히 행동 영역의 구분을 포함해야 하는 이유를 밝히는 작업이 필요할 것으로 보인다. 일반적인 수학 평가에서 계산이나 지식, 추론, 외적 문제 해결 중에서 특정한 영역에 편중된 문항을 포함하는 것이 바람직하지 않다는 것은 당연해 보인다. 하지만, 앞서 논의한 바와 같이 행동 영역의 구분을 내용 영역의 구분에서처럼 서로 배타적인 성격의 영역으로 하는 것이 바람직한지

그리고 행동 영역에 따른 평가 결과의 분석이 의미 있도록 구분하는 방법이 무엇인지를 검토해야 할 것이다. 또한, 행동 영역에 따라 결과를 분석하는 일이 큰 의미가 없는 일이라면 행동 영역의 구분은 단지 문항을 출제할 때 특정한 영역에 편중되지 않게 해 주는 '경보 장치' 정도의 역할만 하면 되는 것인지, 그리고, 이 정도의 역할만을 수행한다고 할 때 행동 영역을 나눌 필요가 있는지에 대한 검토도 필요하다고 본다.

당초 Bloom이 제시했던 인지적 영역은 수학 학습 평가에서는 별로 사용되지 않은 경향이 있으며, 계산, 이해, 추론, 문제해결, 의사소통은 NCTM에서 구분한 수학적 사고와 관련되어 많이 활용되고 있다. 그러나 수학 학습 평가 문항에서 이렇듯 인지적 영역 또는 행동 영역을 구분하는 목적이 무엇인지 생각해볼 필요가 있다. 학생의 수학 학습에 대한 정보를 얻는다는 차원에서 보면, 예컨대 어떤 학생은 문제해결력은 뛰어나지만 추론 능력은 다소 부족하며, 특히 연역 추론 능력이 많이 부족하다는 식의 정보를 줄 수 있어야 할 것이다. 이러한 정보를 얻는 일이 중요하다면 한 가지 평가 문항에서 한 가지 인지적 영역만 측정할 필요는 그리 크지 않다고 할 수 있다. 왜냐하면 한 가지 문제를 해결하는 학생의 과정을 관찰하거나 답안지를 분석함으로서, 추론, 문제해결, 의사소통에 대한 종합적인 판단을 하는 일도 가능하기 때문이다.

그러므로 인지적 영역을 파악하고 이에 적합한 평가 도구를 개발하는 것은 여전히 의미 있는 일이라고 생각되며, 한 문항은 한 가지 인지적 영역만 측정해야 한다는 식의 사고는 지양하는 것이 바람직할 것으로 생각된다. 또한 학생이 평가 문항을 해결할 때 일어나는 사고 과정에 따라 재생, 연결, 반성으로 구분한 Jan de Lange의 연구 결과도 참조할 필요가 있을 것 같고(정영옥, 2004), 이러한 평가 틀은 OECD 국가간 PISA 평가에서 활용되고 있다.

셋째, 수학 학습 평가와 관련된 교원 연수를 확대할 필요가 있다고 본다. 평가에서 가장 중요한 조건 중 하나는 문항의 내용 타당도를 확보하는 일이 될 것이다. 학생들의 연역 추론 능력을 측정하기 위한 평가 문항이라면, 학생들이 연역 추론을 통하여 문제를 해결하였는지를 판단할 수 있도록 문항을 출제해야 하며, 학생들이 주어진 문항을 해결하기 위하여 요구되는 수학적 사고력 중 가장 결정적인 것이 연역 추론이 되어야 한다. 그러나 이러한 조건을 충족하여 수학 학습 평가 문항을 개발하는 일은 매우 어렵다고 생각되며, 이와 관련된 많은 경험이 축적되어야 할 것이다. 따라서 교사들에게 이러한 경험을 제공할 수 있는 좋은 방법은 수학 평가 문항 개발과 관련된 교원 연수를 확대하는 일이 될 것이다.

참 고 문 헌

강문봉, 강홍규, 김수미, 박교식, 박문환, 서동엽, 송상헌, 유현주, 이종영, 임재훈, 정동권, 정은실, 정영옥 (2007). **초등수학교육의 이해(제2판)**. 서울 : 경문사.

교육부 (1997). **제 7차 수학과 교육과정**. 서울 : 교육부.

교육인적자원부 (2007). **2007 수학과 교육과정**. 서울 : 교육인적자원부.

교육과학기술부 (2011). **2011 수학과 교육과정**. 서울 : 교육과학기술부.

김경희, 김수진, 김미영, 김선희 (2009). **PISA와 TIMSS 상위국과 우리나라의 교육과정 및 성취 특성 비교 분석**. 서울: 한국교육과정평가원.

박경미, 최승현 (2002). 학업성취도 국제 비교 연구(PISA)에 나타난 수학적 소양의 성별 차이에 대한 고찰. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 41**(3), 319-328.

박정, 정은영, 김경희, 한경혜 (2004a). **수학·과학 성취도 추이변화 국제비교 연구 - TIMSS 2003 결과 보고서**. 서울: 한국교육과정평가원.

박정, 정은영, 김경희, 한경혜, 전현정 (2004b). **교수, 수업, 그리고 학생 성취 - TIMSS 1999 결과를 중심으로**. 서울: 한국교육과정평가원.

서동엽 (2000). 제 3차 수학·과학 성취도 국제비교 반복 연구에서 우리나라 중학교 2학년 학생들의 수학 성취도 국제 비교. 한국교육과정평가원. 우리나라 중학생의 수학·과학 성취 결과, 국제수준은 어떠한가? **- 제3차 수학·과학 성취도 국제 비교 반복 연구(TIMSS-R) 결과 발표 세미나,** 25-66.

서동엽 (2001). 수학 지필 평가의 실제 분석. **한국초등수학교육학회지, 5,** 19-36.

신준식, 고정화, 권성룡, 김성준, 남승인, 류성림, 박문환, 서동엽 (2010). **초등학교 3, 4학년 수학 평가 문항 개발 연구 보고서**. 서울: 한국과학창의재단.

신준식, 고정화, 권성룡, 남승인, 류성림, 박문환, 박성선, 서동엽 (2011). **초등학교 5, 6학년 수학 평가 문항 개발 연구 보고서**. 서울: 한국과학창의재단.

이종희, 김선희 (2003). **수학적 의사소통**. 서울: 교우사.

전은주 (1999). **말하기 듣기 교육론**. 서울: 박이정.

정영옥 (2004). RME의 수학 학습 평가틀에 대한 고찰 - Jan de Lange의 수학 학습 평가틀을 중심으로. **수학교육학연구, 14**(4), 347-366.

National Academy of Science (1993). *Measuring what Counts : A conceptual guide for mathematics assessment.* Washington, DC : National Academy Press.

<Abstract>

Development of the Items for the Assessment of Mathematical Thinking

Shin, Joon-Sik[9]; & Ko, Jung-Hwa[10]; & Park, Moon-Hwan[11]
; & Park Sung-Sun[12]; & Seo, Dong-Yeop[13]

The study aims the introducing the items for the assessment of mathematical thinking including mathematical reasoning, problem solving, and communication and the analyzing on the responses of the 5th grade pupils. We categorized the area of mathematical reasoning into deductive reasoning, inductive reasoning, and analogy; problem solving into external problem solving and internal one; and communication into speaking, reading, writing, and listening. And we proposed the examples of our items for each area and the 5th grade pupils' responses. When we assess on pupil's mathematical reasoning, we need to develop very appropriate items needing the very ability of each kind of mathematical reasoning. When pupils solve items requesting communication, the impact of the form of each communication seem to be smaller than that of the mathematical situation or sturucture of the item. We suggested that we need to continue the studies on mathematical assessment and on the constitution and utilization of cognitive areas, and we also need to in-service teacher education on the development of mathematical assessments, based on this study.

Keywords : mathematical assessment, mathematical reasoning, problem solving, communication, development of item for mathematical assessment

논문접수: 2011. 11. 20
논문심사: 2011. 12. 02
게재확정: 2011. 12. 17

9) joonsik@cnue.ac.kr
10) jhko@cnue.ac.kr
11) pmhwan@cnue.ac.kr
12) starsun@cnue.ac.kr
13) dseo@cnue.ac.kr