한국초등수학교육학회지 15(3) 509-531. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 15(3) 509-531.
2011. 12. 31 December 31. 2011.

평면도형의 넓이 측정 지도에 대한 고찰

김정하[1] · 강문봉[2]

이 연구는 현재와 같은 평면도형의 넓이 지도가 효과적인 방법인가를 알아보려는 것이다. 지금까지 학교에서 평면도형의 넓이를 지도할 때는 학생들이 실측하는 활동이 없다. 도형의 필요한 곳에 수치 정보가 주어져 있고 필요한 보조선이 그어져 있다. 이런 상황에서 학생들이 넓이를 구하는 과제에서 실제로 하는 것은 주어진 수치를 공식에 대입하여 계산하는 것 뿐이다. 이 연구는 그렇게 학습한 학생들은 올바른 넓이 측정 능력을 획득하지 못했다는 점을 밝히고, 어떤 방향으로 도형 넓이 지도가 개선되어야 할 것인지를 제안하고 있다.

[주제어] 도형의 넓이, 측정, 실측, 오류, 밑변, 높이

Ⅰ. 서 론

측정 영역은 일상생활, 수학, 그리고 다른 교육과정 분야의 여러 측면에서 없어서는 안되는 중요한 영역이다(Baroody, Coslick, 1998). 즉, 측정은 수학이 일상생활에서 유용한 것임을 알게 하는 데 효과적이며, 수학이 여러 영역과 연결되어 있음을 깨닫게 하는 데도 도움이 된다. 길이, 무게, 부피 등을 재면서 어림하게 되고 여러 측정 공식을 사용하면서 수를 대입하고 계산을 하기도 한다. 수학의 여러 영역 사이의 연결성을 드러낼 뿐만 아니라 과학이나 문학, 일상생활과의 연결도 측정을 통해 드러나곤 한다. 다시 말해 측정 영역은 초등학교 수학 교육과정 중에서 일상생활에서 가장 많이 사용되는 내용이며 수학의 다른 내용을 학습하는 데 이용될 수 있기 때문에 중요하다(강문봉 외, 1999, p.492).

측정 지도는 일반적으로 비교하기(직접비교와 간접비교), 임의단위를 이용하여 측정하기, 표준단위를 이용하여 측정하기, 간접측정하기의 4단계를 거치게 된다(이용률, 2010, p.192). 이 각각의 단계는 모두 중요한 의미를 가진다. 비교하기를 통해서 양 개념을 형성함과 동시에 단위의 필요성을 인식하게 되고, 임의단위를 이용하여 측정하면서 단위의 발생 및 표준단위의 필요성을 깨닫게 된다. 표준단위를 이용하여 측정하면서 보다 더 편리한 간접측정 방법을 창조하게 된다. 간접측정은 공식을 이용하여 계산에 의해 측정하는 것을 말한다. 그러나 간접측정에서도 간접측정해야 할 어떤 양과 함수적인 관계가 있는 다른 양을 직접 측정한 후 이 값과 공식을 이용하여 계산해 내게 된다. 그러므로 마지막 단계인 간접

---

1) [제1저자] 인천 일신초등학교
2) [교신저자] 경인교육대학교 수학교육과

측정을 할 때도 그전 학습에서 이루어졌던 직접측정이 바탕이 될 수밖에 없다. 직접측정을 통해 얻어진 측정 감각과 표준 단위를 이용하여 도형의 필요한 성분들의 길이를 직접 측정하고 이러한 활동을 통하여 길이를 축소하거나 확대하거나 또는 함수적인 관계로 생각하여 간접측정을 완성하게 된다. 그러나 학교 교육에서는 직접측정하는 활동이 아주 미약하며 특히 넓이나 부피를 구할 때는 직접측정하는 일이 거의 없고, 오히려 직접측정해야 할 곳의 측정값이 주어지고 있다. 모눈종이를 이용하여 직접측정을 간접적으로 경험할 뿐이다.[3] 이런 지도를 통해 우리는 학생들이 실생활에서 어떤 영역의 넓이를 잘 구할 수 있을 것이라고 기대하고 있다.

실생활에서 넓이를 구하기 위해서 학생들은 다음과 같은 절차를 거쳐야만 한다.

첫째, 실생활에서 측정해야 할 영역을 다각형이나 원으로 이상화한다.
둘째, 넓이 공식을 알고 있는 도형으로 이를 변형한다.
셋째, 밑변과 높이, 가로와 세로 등 필요한 곳의 길이를 측정한다.
넷째, 공식을 이용하여 넓이를 계산한다.

보조선이나 수치가 주어진 도형의 넓이를 계산하게 하는 현재의 교과서 방식은 위의 네 번째 단계에만 초점을 맞추고 있는 것으로 보인다. 문제해결 능력을 기르기 위해서 문제해결 전략과 발견술을 지도하듯이, 제대로 된 측정 능력을 기르기 위해서는 위의 두 번째 단계와 세 번째 단계에 대한 지도가 필요할 것이다.

이 연구는 사다리꼴을 포함한 사각형의 넓이를 배운 5학년 학생들을 대상으로 하여 학생들이 도형을 실측하여 넓이를 구할 수 있는지를 알아보려는 것이다. 학생들이 제대로 실측하여 도형의 넓이를 구할 수 있다면 현재와 같은 방식의 도형 넓이 지도는 효과적인 것이 되겠지만, 그렇지 않다면 도형 넓이 지도에 문제가 있다고 판단할 수 있을 것이다. 이를 위하여 실측하는 문제와 꼭 필요한 정보만 있거나 불필요한 정보도 가지고 있지만 실측하지 않는 문제를 해결하는 능력을 비교할 것이다. 이 연구는 이를 토대로 하여 도형의 넓이 지도 방식에 대한 시사점을 줄 것이다.

Ⅱ. 선행연구 분석

평면도형의 넓이와 관련한 선행연구로는 크게 학생들의 오류나 이해에 대한 연구(장영은, 2003; Battista, 2003; Stephan & Clements, 2003; 송미정, 2004; 박현웅, 2009)와 넓이 지도 방안 연구(배춘석, 2002; 원봉희, 2002; 정말숙, 2004; 정필원, 2005; 임아름, 박영희, 2011), 평면도형의 넓이 지도 수업에 대한 분석 연구(안선영, 방정숙, 2006; 이선영, 2006), 넓이 구하는 문제와 사고력 사이의 관련 연구(정동권, 2001; 유연자, 방정숙, 2008) 등이 있다. 그리고 넓이를 구하는 과정에서 직접측정하는 활동과 관련한 연구로는 이선영(2006),

3) 5학년 1학기 "평면도형의 넓이" 단원에서 모눈종이를 이용하여 필요한 길이를 알아볼 수 있게 한 도형이 17개, 필요한 변의 길이가 주어진 도형이 18개 있으며, 직접 높이를 재어보게 한 도형은 2개에 불과하다(교육과학기술부, 2011a).

유연자, 방정숙(2008), 박현웅(2009), 강수희(2010) 등의 연구가 있다.

이선영(2006, p.1)은 "실생활에서 넓이를 구할 때 구하려는 도형에 수치가 제시되어 있는 경우는 없다. 교과서에서는 공식 적용에 필요한 길이와 그 수치가 모두 제시되어 있어서 아동들은 진정한 넓이 측정 상황을 경험할 수 없다."는 문제 인식 하에 학생들이 넓이 공식을 어떻게 구성해 나가는지를 알아보려고 하였다.

이선영은 우리나라 교과서와 일본의 교과서 및 미국의 Everyday Mathematics와 Mathematics In Context를 비교 분석하였다. 우리나라 교과서에는 등적변형, 배적변형, 반적변형 등 여러 가지 변형 방법이 다양하게 제시되어 있기는 하지만 그러한 변형 방법을 학생들이 발견하게 하는 것이 아니라 교과서에 일방적으로 제시하고 있으며, 평행사변형을 세줄 모눈종이에 제시하여 다양한 변형 방법을 발견하기 어렵게 하고 있다고 지적하였다. 또한 넓이를 구하는 데 필요한 변의 길이를 제시하고 있으며 평행사변형의 밑변이 교과서의 아랫부분과 평행하게 제시되어 평행사변형이 비스듬한 경우에 밑변을 생각하기 어렵게 하고 있으며 높이가 도형의 외부에 있는 평행사변형은 다루지 않고 있다고 지적한다. 반면, 일본 교과서는 수치가 제시되지 않은 도형과 높이가 외부에 있는 평행사변형도 다루고 있다고 말한다. 미국의 EM 교과서와 MIC 교과서 역시 수치를 제시하지 않고 비스듬하게 위치해 있는 평행사변형도 다루고 있다고 분석하였다.

이선영은 연구를 통하여 넓이를 구하기 위해 도형을 변형하는 방법은 여러 가지 있지만 아동들에게 자연스러운 방법이 있으며, 도형 변형의 결과를 공식으로 표현하는 활동이 필요하다고 제안하였다.

유연자, 방정숙(2008)은 학생들이 공식에 대한 필요성을 느끼지 못하고 하나의 완성된 형태로 공식을 수용하고 기계적 계산에 의존하여 넓이를 구하게 된다고 지적하면서, 초등학교 5학년 학생들을 대상으로 다양한 해결 방법을 강조하는 수업을 실시하여 학생들이 평면도형의 넓이를 어떤 방법으로 구하는지를 알아보려고 하였다. 이 연구를 통해 그들은 분할, 변형, 제거 등 다양한 방법으로 넓이를 구해볼 수 있는 기회를 제공하는 것이 중요하며 직접 조작해 보는 활동을 통해 넓이 구하기 지도가 이루어져야 한다고 지적하였다.

박현웅(2009)은 평면도형의 넓이를 구하는 데 나타나는 오류 유형과 그 원인을 분석하였다. 박현웅이 제시하는 오류 유형은 ① 언어의 어려움 때문에 생기는 오류, ② 특별한 정보를 획득하는 어려움 때문에 생기는 오류, ③ 필수적인 기능, 사실, 개념에 관한 미숙함 때문에 생기는 오류, ④ 잘못된 연합 또는 사고의 경직 때문에 생기는 오류, ⑤ 수학적 모델로 인해서 생기는 오류, ⑥ 기술적 오류의 여섯 가지를 제시하였다.

이와 같은 선행 연구를 고찰해 보면, 기본적으로 교과서적인 측정 문제, 즉 보조선이 그어지고 꼭 필요한 수치 정보가 주어진 도형의 넓이를 구하는 활동에 대한 연구임을 알 수 있다. 이러한 관점은 이 연구가 문제 삼는 관점과는 다르다는 점을 알 수 있다. 특히 이러한 교과서적인 문제에서의 오류는 실측해야 하는 상황에서의 오류와 또 다를 수도 있을 것이다.

강수희(2010)는 실측할 때와 실측하지 않을 때의 넓이 계산 능력에 차이가 있는지에 의문을 가지고, 5학년 학생들을 대상으로 연구를 시작하였다. 연구 결과 실측해야 하는 문제에서의 넓이 측정 능력은 비실측 문제에서보다 유의미하게 낮았음을 발견하였다. 또한 이와 관련하여 다음과 같은 오류 유형을 제시하였다.

<표 1> 강수희가 제시한 측정에서의 오류 유형

구분	검사지 문항 유형	오류 유형
Ⓐ	삼각형, 직사각형, 평행사변형, 사다리꼴, 마름모	적당한 곳의 길이를 재지 못함: (가로)나 (세로), (밑변)이나 (높이) 등을 제대로 이해하지 못해 필요한 곳의 길이를 제대로 재지 못함
Ⓑ		공식을 잘 못 알고 있음: 공식을 잘 모르거나 다른 공식에 대입하여 문제를 해결함
Ⓒ	복합도형의 경우	풀기 쉽게 도형을 분할하지 못함
Ⓓ		도형을 분할했으나 적절한 공식을 이용하여 넓이를 구하지 못함
Ⓔ		구해야할 면적 이외의 곳까지 구함
Ⓕ	해석 불가	주어진 정보만 임의대로 더하거나 곱하는 등 계산만 해버림
◆	길이 재기 실수	재야할 곳을 쟀으나 길이재기 실수를 함
◇	공식 대입 실수	검사지 A를 살펴보아 공식을 알고 있었으나 검사지 B에서 단순 공식 대입 실수나 계산 실수를 보인 경우 또는 그 반대의 경우
•	문제를 풀지 않음	

강수희의 연구가 주는 시사점이 많기는 하지만, 이 연구는 식의 계산에 따른 영향을 많이 받게 되는 문제점이 있으며, 실측과 비실측 상황의 차이를 좀 더 명확히 규명할 필요가 있음을 알게 되었다. 따라서 이런 선행연구 분석을 통해 이 연구에서는 검사 도구의 문항 수를 줄이고 계산에 불필요한 시간과 노력을 낭비하지 않도록 식만 쓰게 하는 것이 바람직하다는 점을 인식하였다. 또한 수치 정보를 제공한 전통적인 넓이 계산 문제 외에도 불필요한 수치 정보도 제공함으로써 학생들이 넓이를 구할 때 꼭 필요한 수치 정보를 이용하는가를 파악할 필요도 인식하게 되었다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

이 연구는 인천시 소재의 I 초등학교 5학년 4개 반 학생 102명을 대상으로 하였으며, 그 중 두 가지 검사지 모두에 반응하지 않은 학생은 제외하여 총 88명을 분석 대상으로 하였다. 이 학교 학생들의 학력은 인천시 지역 학교에서 중위에 해당한다. 학생들은 이 연구를 시작하기 직전에 삼각형과 직사각형, 평행사변형, 사다리꼴, 마름모의 넓이를 구하는 공식을 배웠다.

2. 검사 도구

이 연구는 평면도형의 넓이를 구하는 능력을 알아보기 위한 것으로 두 개의 유사한 검사 도구를 사용하였다. 검사지는 삼각형, 평행사변형, 사다리꼴, 복합도형의 넓이를 구하는 문제로 각각 9문항으로 구성되었다. A형 검사지는 도형 이외에는 아무런 정보가 제시되지

않았으며, 길이를 재기 위해 학생들은 자를 사용할 수 있다. B형 검사지는 기존의 교과서나 문제지에서처럼 도형과 넓이를 구하기 위해 필요한 보조선 및 길이의 수치가 주어져 있으며, A형과 동일하거나 약간 회전시킨 도형을 사용하였다. 그러나 실제의 길이가 아니라 계산하기 편리한 수치를 제시하였다. (A, B형 검사지는 부록 참조)

두 검사지의 평가 의도는 다음 <표 2>와 같다.

<표 2> A형과 B형 검사지의 평가 의도

문항 번호	A형 검사의 평가 의도 (도형만 제시된 문항)	B형 검사의 평가 의도 (길이 정보가 주어진 문항)
1	삼각형의 밑변과 높이를 아는가? 필요한 곳의 길이를 바르게 재었는가? 공식을 잘 적용하였는가?	높이가 내부에 있는 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?
2	삼각형의 밑변과 높이를 아는가? 필요한 곳의 길이를 바르게 재었는가? 공식을 잘 적용하였는가?	높이가 외부에 있는 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?
3	삼각형의 밑변과 높이를 아는가? 필요한 곳의 길이를 바르게 재었는가? 공식을 잘 적용하였는가?	어느 변도 검사지 밑변과 평행하지 않은 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?(불필요한 정보 포함)
4	평행사변형의 밑변과 높이를 아는가? 필요한 곳의 길이를 바르게 재었는가? 공식을 잘 적용하였는가?	평행사변형의 밑변과 높이를 알고 넓이를 구할 수 있는가?(불필요한 정보 포함)
5	평행사변형의 밑변과 높이를 아는가? 필요한 곳의 길이를 바르게 재었는가? 공식을 잘 적용하였는가?	높이가 외부에 있는 평행사변형의 밑변과 높이를 알고 넓이를 구할 수 있는가?(불필요한 정보 포함)
6	평행사변형의 밑변과 높이를 아는가? 필요한 곳의 길이를 바르게 재었는가? 공식을 잘 적용하였는가?	어느 변도 검사지 밑변과 평행하지 않은 평행사변형의 밑변과 높이를 알고 넓이를 구할 수 있는가?(불필요한 정보 포함)
7	사다리꼴의 밑변과 윗변, 높이를 아는가? 필요한 곳의 길이를 바르게 재었는가? 공식을 잘 적용하였는가?	어느 변도 검사지 밑변과 평행하지 않은 사다리꼴의 밑변, 윗변, 높이를 알고 넓이를 구할 수 있는가?(불필요한 정보 포함)
8	복합도형을 적절히 변형할 수 있는가? 필요한 곳의 길이를 바르게 재었는가? 공식을 잘 적용하였는가?	복합도형을 두 개의 사다리꼴로 분할하여 넓이를 구할 수 있는가?
9	복합도형을 적절히 변형할 수 있는가? 필요한 곳의 길이를 바르게 재었는가? 공식을 잘 적용하였는가?	복합도형을 세 개의 삼각형으로 분할하여 넓이를 구할 수 있는가?

A형 검사지는 길이를 재기 위해 자를 사용하도록 하였으며, 두 검사지 모두 넓이를 구하기 위한 식을 쓰되, 답을 구하기 위한 계산은 하지 않도록 하였다. 이는 계산하는 공식을 이해하는가를 평가하기 위함이지 계산이 가능한지를 평가하기 위함이 아니기 때문이다. 또한 질문지의 도형의 길이를 섬세하게 재는 학생들이 변의 길이가 소수로 나오는 경우

계산 과정에 어려움이 생길 수 있다는 것을 감안한 것이다.

3. 연구 방법

5학년 4개 반에 같은 날 같은 시간에 A형 검사지를 투입하고 나서, 3일 후에 같은 방법으로 B형 검사지를 투입하였다.

A형 검사에서 학생들은 도형의 길이를 실제로 측정하는 활동을 해야 하기 때문에 40분의 시간을 배정하였으며, B형 검사는 시간을 제한하지 않았지만 20분의 시간으로 충분하였다.

4. 평가

각 문항당 1점 만점으로 하였으며, 계산이나 표현 능력을 파악하려는 것이 아니라 도형의 넓이를 구할 수 있느냐를 알아보려는 것이므로 식을 잘못 표현한 경우도 맞는 것으로 처리하였다. 예를 들어, (5+3)×3÷2와 같이 표현해야 하는데, 5+3×3÷2와 같이 괄호를 사용하지 않은 경우도 종종 있었다. 그런데 이러한 학생들은 식만 쓰지 않고 계산 결과까지 기록하였는데 괄호가 있는 것처럼 계산하여 옳은 답을 구하였기 때문에 넓이를 구하거나 계산하는 능력이 부족한 것이 아니라 식을 표현하는 능력이 부족한 것으로 판단하여 정답으로 처리하였다.

또한, 길이를 실측해야 하는 A형 문항에서는 5mm 정도의 오차는 허용하였다. 높이는 밑변에 수직이어야 하지만 수직이 되지 않게 그린 경우도 지나친 경우가 아니면 정답으로 인정하였다.

Ⅳ. 연구 결과 분석

1. A형 검사와 B형 검사의 평균 비교

A형 검사와 B형 검사의 평균 점수는 다음 <표 3>과 같다.

<표 3> 두 검사의 평균 점수 및 검증

검사 유형	N	평균 (9점 만점)	표준편차	자유도	t	유의확률 (양쪽)
A형 검사	88	5.01	3.124	174	-5.377	0.000
B형 검사	88	7.23	2.278			

이 표에서 알 수 있는 것처럼 학생들이 교과서 방식의 문제를 해결하는 능력은 9점 만점에 7.23으로 상당히 높다고 할 수 있다. 특히 복합도형의 문제가 2개 있으며, 불필요한 정보를 포함한 문제도 5문제가 있기 때문에, 만약 꼭 필요한 정보만을 가지는 문제로 검사를 했다면 이 점수는 더 높게 나왔을 것이다. 이러한 결과에 의하면 학생들은 도형의 넓이를 구할 수 있는 능력이 상당히 높다고 판단된다. 그러나 길이를 실제로 측정해서 넓이를 구해야 하는 상황에서는 다른 결과가 나왔다. A형 검사는 9점 만점에 5.01로서, 교과서 방식보다 2.22점이 낮다.[4] 이 점수는 100점 만점으로 환산할 때 25점의 차이를 의미한다. 이

러한 차이가 1% 유의 수준에서 아주 유의미하기 때문에 학교교육의 커다란 문제점을 드러낸다고 할 수 있다.

A형 문제는 실측을 해야 하며, B형 문제에는 필요한 정보들이 주어져 있기 때문에, 학생 개인별로 볼 때 B형 검사의 점수가 더 높은 것은 당연하다. 그럼에도 불구하고, 다음 <표 4>를 보면 A형 문항의 점수가 더 높은 경우도 있음을 알 수 있다(9.0%). B형과 A형의 점수가 같은 경우를 포함하여, B형의 점수가 더 낮거나 같은 학생은 모두 24명(27.2%)이었다. 그런데 A형 점수와 B형 점수가 모두 같은 학생을 조사해 보면 9점 만점인 학생이 9명, 0점인 학생이 2명으로 이 학생들을 제외하면, A형 점수가 더 높거나 같은 나머지 학생들은 불필요한 정보에 현혹되거나 사다리꼴의 넓이를 구하면서 2로 나누지 않는 실수 또는 우연에 의한 실수를 범한 것으로 판단해도 무리는 없어 보인다.

한편, 이 표에서 9점은 B형에서 9점을 받았지만 A형에서는 0점을 받은 것을 의미한다. 8점은 B형 9점, A형 1점 또는 B형 8점, A형 0점인 경우이다. 그러므로 이 학생들의 비율이 5.7%(5명)로 적은 수이기는 하지만, B형에서 8점 또는 9점은 학교 교육에서는 매우 우수한 학생으로 평가되기 때문에 심각한 상황이라고 판단된다. 사실, B형 검사에서 9점을 받고 A형 검사에서 3점을 받는 경우 등까지 생각하면 이 수치는 결코 무시할 수치는 아니라고 생각한다.

<표 4> 점수 차의 빈도(비실측 점수에서 실측 점수를 뺀 값)

B-A점수	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
빈도	4	4	16	14	18	9	9	3	5	1	2	3
퍼센트	4.5	4.5	18.2	15.9	20.5	10.2	10.2	3.4	5.7	1.1	2.3	3.4

이런 학생들의 A형 검사지를 살펴보면 전통적인 방법이 학생들의 측정 영역에 대한 능력을 길러주는 데 얼마나 부족한지를 알 수 있다. B형에 9점을 받고 A형에 0점을 받은 학생 3명은 모두 A형에서 밑변과 높이를 재는 대신 아무 변이나 그 길이를 재어 계산하고 있다. 즉, 삼각형의 두 변의 길이를 재어서 삼각형의 넓이 공식에 대입하고 있다. 사다리꼴에서도 마찬가지 현상이 나타났으며, 특히 수평선과 평행한 선분을 밑변으로 생각하여 잘못 계산하고 있다. 이러한 오류에 대해서는 나중에 다시 논의될 것이다.

우리는 교육의 목적상 학습한 내용과 유사한 내용도 학생들이 해결할 수 있기를 기대한다. 측정 영역에서는 실측하지 않고 넓이를 구하도록 배운 학생들이 실측해야 하는 상황의 문제도 해결할 수 있기를 기대한다. 그러나 다음 <표 5>를 보면 그런 기대가 잘못이라는 것이 드러난다. 비실측과 실측 상황 문제를 모두 맞은 정답자의 수가 가장 전형적으로 제시되는 삼각형(문제 1, 밑변이 지평선과 평행하고 높이가 내부에 있는 삼각형)에서 69.3%이며 다른 삼각형의 경우에서는 겨우 56%를 넘는다.

B형을 해결할 수 있다면 A형 역시 해결할 수 있을 것이라고 기대하겠지만, B형만 맞은 비율이 4번 문항의 경우 17.0%이며, 그 외의 다른 문항들은 모두 21%를 넘어서며, 7번과 9번의 경우는 34.1%에 이르고 있다. 이는 비실측 상황에서의 학습 효과가 실측 상황으로 쉽게 전이되지 않고 있음을 의미한다.

4) 강수희(2010)의 연구에서는 이 차가 17점 만점에 1.54로 나타났다. 강수희의 연구에서는 불필요한 정보를 가지는 문제가 없었기 때문에 본 연구에서 이 차가 더욱 크게 나타났음을 알 수 있다.

<표 5> 문항별 A, B형의 정답자 빈도

문항	1	2	3	4	5	6	7	8	9
모두 틀림 (%)	3 (3.4)	3 (3.4)	9 (10.2)	19 (21.6)	18 (20.5)	8 (9.1)	15 (17.0)	23 (26.1)	23 (26.1)
B형만 맞음 (%)	23 (26.1)	34 (38.6)	23 (26.1)	15 (17.0)	19 (21.6)	27 (30.7)	30 (34.1)	29 (33.0)	30 (34.1)
A형만 맞음 (%)	1 (1.1)	1 (1.1)	5 (5.7)	6 (6.8)	7 (8.0)	5 (5.7)	3 (3.4)	2 (2.3)	5 (5.7)
모두 맞음 (%)	61 (69.3)	50 (56.8)	51 (58.0)	48 (54.5)	44 (50.0)	48 (54.5)	40 (45.5)	34 (38.6)	30 (34.1)
합계	88	88	88	88	88	88	88	88	88

2. 문항별 분석

이번에는 각 문항별로 분석해 보자. 각 문항별 정답률은 다음 <표 6>과 같다.

<표 6> 문항별 정답자 빈도

문항번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B형 문항의 정답자 수(%)	84 (95.5)	84 (95.5)	74 (84.1)	63 (71.6)	63 (71.6)	75 (85.2)	70 (79.5)	63 (71.6)	60 (68.2)
A형 문항의 정답자 수(%)	62 (70.5)	51 (58.0)	56 (63.6)	54 (61.4)	51 (58.0)	53 (60.2)	43 (48.9)	36 (40.9)	35 (39.8)

B형의 1번 문항과 2번 문항은 정답률이 95.5%로 가장 높다. 3번 문항은 1번 문항과 동일하나 삼각형이 약간 기울어져 있고 불필요한 정보가 있는 문제이다. 이 경우 정답률은 95.5%에서 84.1%로 뚝 떨어진다. 밑변이 5cm, 높이가 3cm이나 다른 한 변이 4cm라는 불필요한 정보가 주어지니까 다음과 같은 오답을 하는 경우들이 있다.

$$(5+4)\times3\div2 \qquad 5\times3+4\times3\div2 \qquad 5\times3+4$$

다시 <표 6>을 보자. 4번과 5번, 6번은 평행사변형의 넓이를 구하는 문제로, 불필요한 정보를 가지고 있는 문제이다. 그래서 4번과 5번 문제의 정답율도 71.6%로 삼각형의 넓이를 구하는 문제보다 정답률이 떨어진다. 그러나 같은 상황임에도 6번 정답률은 85.2%로 상당히 높게 나오고 있다.

7번은 불필요한 정보가 있는 사다리꼴의 넓이를 구하는 문제로서 평행사변형의 넓이보다 더 어려울 것으로 판단되지만 4번, 5번보다 조금 더 정답률이 높다. 정확한 이유는 알 수 없지만, 사다리꼴의 넓이를 구하는 공식을 가장 최근에 배웠기 때문으로 추정된다.

8번과 9번은 불필요한 정보는 없지만 도형을 분할해서 구하는 문제로서, 8번은 2개의 사다리꼴, 9번은 3개의 삼각형으로 분할하도록 보조선이 그어져 있다. 그러나 복잡한 문제라서 이 두 문제의 정답률은 가장 낮다.

A형 문항의 정답률은 모든 문항에서 B형 문항의 정답률보다 의미 있게 낮다. 이는 불필요한 정보가 포함되든 아니든 상관없이 변의 길이에 대한 정보가 주어진 문제의 난이도가 실측해야 하는 문제의 난이도보다 더 낮다는 것을 의미한다. 정보가 주어지면 그 중 어느 것인가는 밑변과 높이가 되지만, 아무 정보도 주어지지 않은 경우에는 학생들이 도형의 밑변과 높이를 제대로 찾아내지 못하는 경우가 많으며, 8번과 9번의 경우에도 도형을 삼각형

이나 평행사변형, 사다리꼴로 변형했어도 각각의 부분 도형에서 밑변과 높이를 잘못 이해해서 실패하고 있음을 알 수 있다. 이것은 오류 유형을 분석하는 과정에서 자세히 살펴보게 될 것이다.

다음 <표 7>은 불필요한 정보가 있는 문항과 필요한 정보만 있는 문항의 평균점수를 비교한 것이다. B형 1번 문항과 B형 3번 문항은 거의 유사한 문항이지만 밑변이 약간 기울어져 있고 불필요한 정보가 포함되어 있는 문항이다.

<표 7> 불필요한 정보가 없는 문항과 있는 문항의 평균 차

대응	대응차					t	자유도	유의확률 (양쪽)
	평균	표준편차	평균의 표준오차	차이의 95% 신뢰구간				
				하한	상한			
B1 - B3	.114	.319	.034	.046	.181	3.340	87	.001

※ B1은 B형 1번 문항 점수, B3은 B형 3번 문항 점수임.

B1의 평균은 0.95점이며 B3의 평균은 0.84점으로, B3의 평균이 0.114점 낮고 이 차이는 5% 수준에서 유의미한 것으로 드러났다. 이는 한 문항만을 가지고 일반화하기는 어렵겠지만, 불필요한 정보가 포함된 문제의 난이도가 꼭 필요한 정보만 있는 문제의 난이도보다 더 높다는 것을 의미한다.

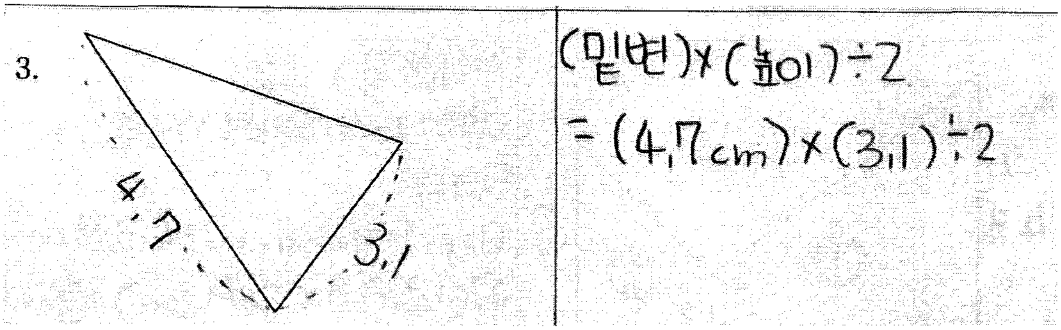
3. 오류 유형

이 연구에서 드러난 오류에는 강수희(2010)가 밝힌 오류 유형들이 모두 포함된다. 이 연구에서는 강수희의 오류를 포함한 측정 오류들을 밑변과 높이에 대한 오류, 평행사변형의 공식 오류, 복합도형의 잘못된 분할-합성 오류, 도형 인식에 대한 오류, 복합도형의 넓이 합차의 오류 등으로 재구분하여 설명한다.

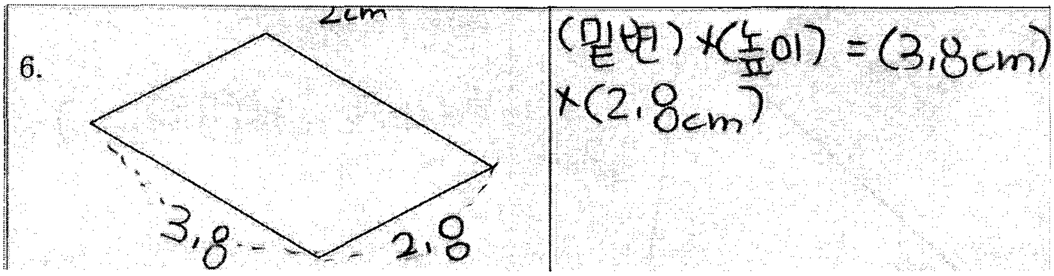
학생들이 범하는 오류 중에서 식의 표현의 오류가 있다. 이것은 여러 연산이 함께 사용되는 식을 표현할 때 나타나는 현상으로 이 검사에서는 사다리꼴의 넓이를 구할 때 이런 오류가 보인다. 즉, (5+4)×3÷2, (3+1)×2÷2와 같이 표현해야 하는데, 괄호를 사용하지 않고 5+4×3÷2, 3+1×2÷2와 같이 표현하는 것이다. 그러나 이렇게 표현한 학생들이 식만 쓰지 않고 괄호가 있는 것처럼 계산하여 옳은 답을 구하였기 때문에 이 연구에서는 이런 학생도 맞은 것으로 처리하였다. 또한 식 (5+4)×3÷2를 한꺼번에 나타내지 않고 몇 단계를 거치면서 5+4=9×3=27÷2와 같이 표현하는 경우도 있다. 이와 같은 식의 표현의 오류는 측정에서의 오류라고 할 수 없기 때문에 여기서 더 이상 언급하지 않고 넘어갈 것이다.

측정에서 나타나는 첫 번째 오류는, 삼각형이나 평행사변형, 사다리꼴에서 밑변과 높이를 제대로 찾지 못하는 밑변과 높이에 대한 오류로서, 가장 심각하고 빈번하게 나타나는 오류이다. 밑변과 높이에 대한 오류는 (1) 밑변과 높이에 대한 무지와 (2) 밑변과 높이에 대한 잘못된 이해의 두 가지로 분류할 수 있다.

다음 [그림 1]과 [그림 2]는 밑변과 높이에 대한 무지의 대표적인 예들이다. 이런 학생들은 어쩌면 밑변과 높이의 개념에 대한 이해 없이, 무조건 삼각형의 넓이를 구할 때는 두 개의 수치를 곱하고 2로 나누며, 평행사변형은 두 개의 수치를 곱하기만 하면 된다는 식으로 넓이 공식을 도구적으로 이해하고 있을지도 모른다.

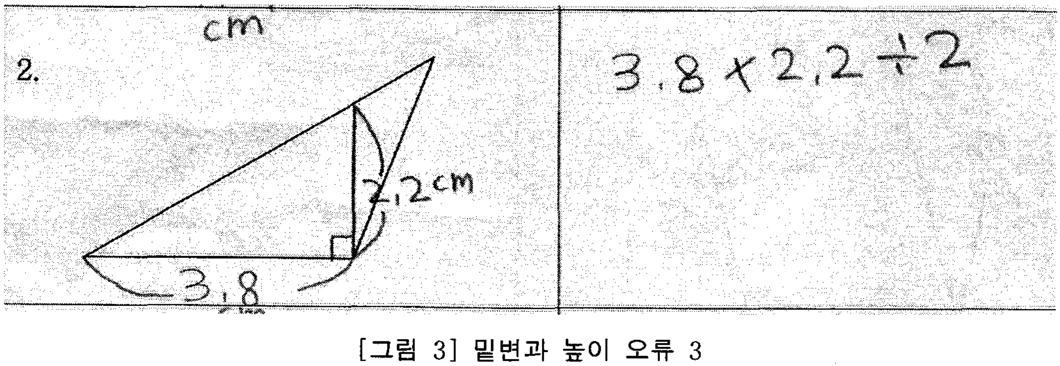


[그림 1] 밑변과 높이 오류 1



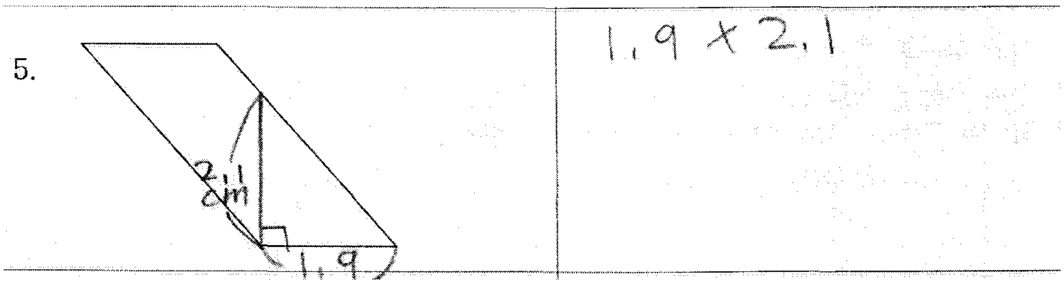
[그림 2] 밑변과 높이 오류 2

다음 [그림 3], [그림 4], [그림 5]는 밑변과 높이에 대한 잘못된 이해로부터 비롯된 오류라고 할 수 있다. 이 학생들은 밑변은 수평선에 평행한, 밑에 있는 변을 말하는 것이고, 높이는 그렇게 생각한 밑변에서 수직으로 세운 가장 긴 선분을 의미하는 것으로 이해하고 있는 것 같다.[5] [그림 5]를 보면 "사다리꼴에서 평행한 두 변을 밑변이라고 한다."는 정의가 무색해지고, 밑에 있는 변이 밑변, 위에 있는 변이 윗변으로 이해되고 있음을 알 수 있다.만약 그렇다면 이 학생들은 '밑'이라는 일상적인 언어의 의미에 깊이 사로잡혀 있기는 하지만 도구적으로만 이해한 앞의 학생들보다 밑변과 높이에 대한 약간은 진일보한 이해를 하고 있다고 봐야 할 것이다.

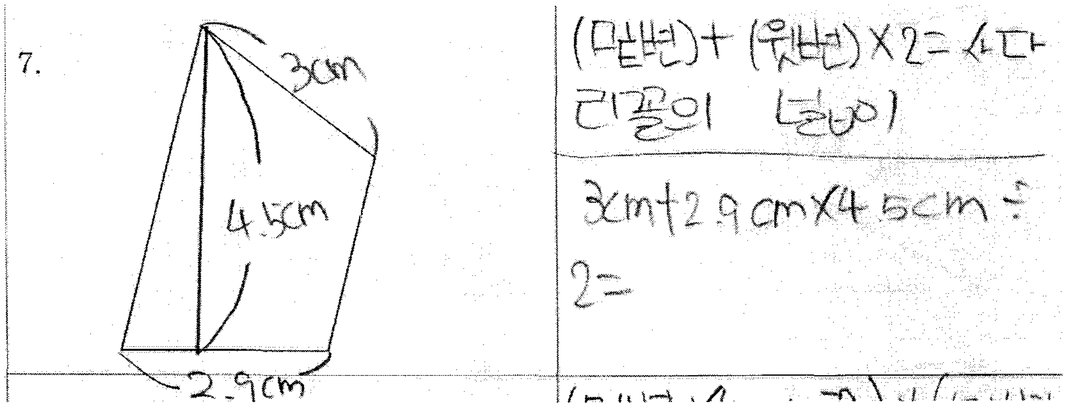


[그림 3] 밑변과 높이 오류 3

5) 이러한 오류는 임승현, 박영희(2011)의 연구에서도 나타나고 있다.

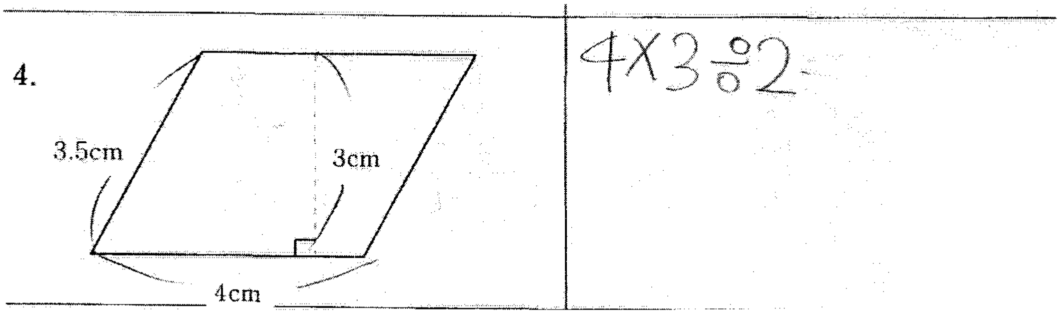


[그림 4] 밑변과 높이 오류 4

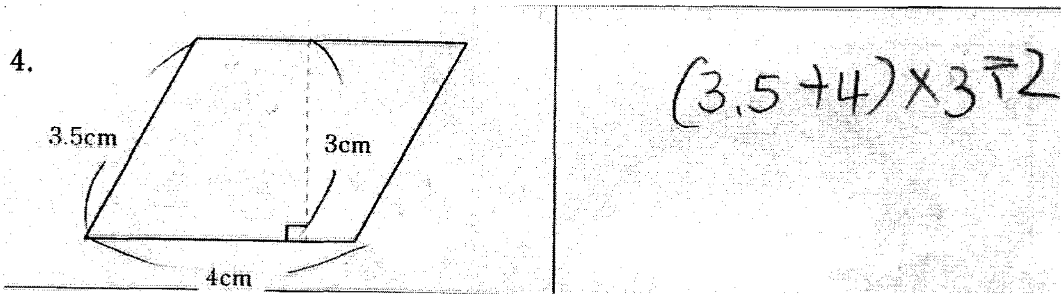


[그림 5] 밑변과 높이 오류 5

두 번째 오류는, 평행사변형의 넓이를 (밑변)×(높이)÷2와 같은 공식으로 구하는, 평행사변형의 넓이 공식 오류이다. 평행사변형의 넓이를 구할 때마다 이런 오류를 범하는 학생이 있는가 하면, 일부 문제에서만 이런 오류를 범하는 학생들도 있다. [그림 6]과 [그림 7]의 학생은 일관되게 이런 오류를 보이는 것이 아니라 몇몇 문제에서만 이런 오류를 범하고 있다. 이와 같은 오류는 수치 정보가 있는 문제든 실측하는 문제든 상관없이 나타나고 있다. 이런 오류의 원인은 삼각형의 넓이나 사다리꼴의 넓이를 구할 때 모두 2로 나누기 때문에 평행사변형의 넓이를 구할 때도 무심코 그런 반응을 보이기 때문이 아닐까 하고 생각된다.

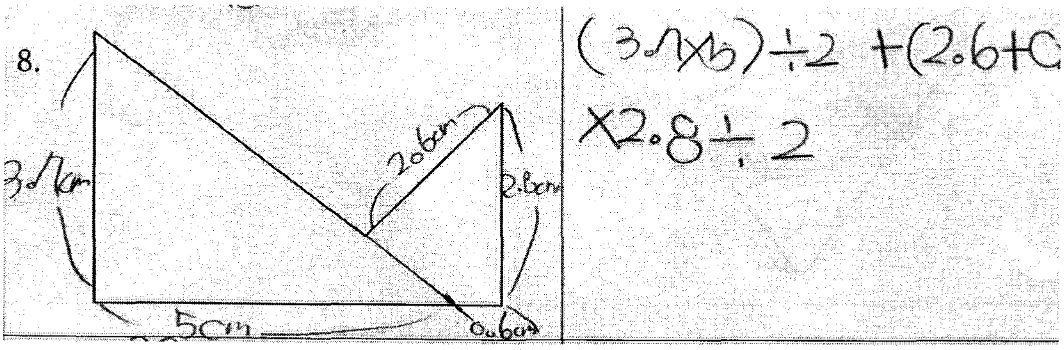


[그림 6] 평행사변형의 공식 오류 1



[그림 7] 평행사변형의 공식 오류 2

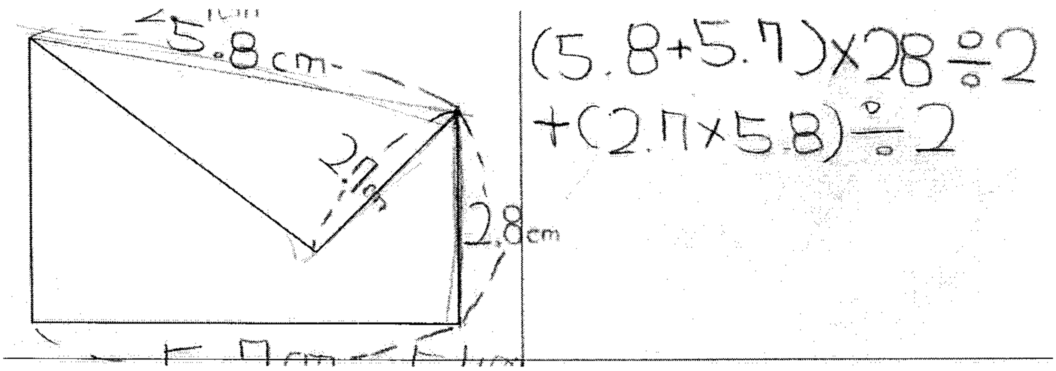
세 번째 오류는 복합도형의 잘못된 분할-합성 오류이다. 복합도형의 넓이를 구하기 위해서는 이 도형을 삼각형, 직사각형, 평행사변형, 사다리꼴 등과 같이 넓이 공식을 적용할 수 있는 도형으로 분할 또는 합성해야 하는데 그러지 못하는 학생들이 있었다. [그림 8]을 보면 이 도형을 큰 삼각형으로 분할한 것은 바람직하다. 나머지 작은 사각형을 다시 두 개의 삼각형이나 삼각형과 사다리꼴로 분할해야 하는데, 이 사각형에 사다리꼴의 넓이 공식을 적용하여 (2.6+0.6)×2.8÷2와 같이 계산하였다. 여기서도 밑변과 높이에 대한 이해의 부족이 나타나고 있다.



[그림 8] 복합도형의 잘못된 분할-합성 오류

네 번째, 위의 오류와 관련하여 공식을 잘못 적용시키는 경우가 많았는데, 박현웅(2009)은 이것을 '잘못된 연관 때문에 생기는 오류'라고 불렀다. 그러나 연구자는 이것을 도형 인식의 오류라고 부르겠다. 임의의 사각형에 사다리꼴의 넓이 공식을 적용하거나 사다리꼴에 평행사변형의 넓이 공식을 적용하는 경우들이 복합도형에서 가끔 나타나는 오류였다.

다섯 번째 오류는 복합도형의 넓이를 구할 때 다른 도형을 합하였으나 계산에서는 이를 빼지 않고 더해버리거나 그 반대의 오류로서, 연구자는 이를 복합도형의 넓이 합차의 오류라고 부르겠다. 다음 [그림 9]를 보면 복합도형에 삼각형을 추가하여 사다리꼴을 만들었다. 이 사다리꼴의 넓이에서 합성한 삼각형의 넓이를 빼야 하는데, 이 학생은 이를 더하는 오류를 범하였다. 물론 이 학생은 사다리꼴의 밑변과 높이에 대한 오류도 함께 범하고 있다. 이런 오류는 학생들이 주로 분할하는 경우만 많이 경험했기 때문에 생기는 것이라고 판단된다.

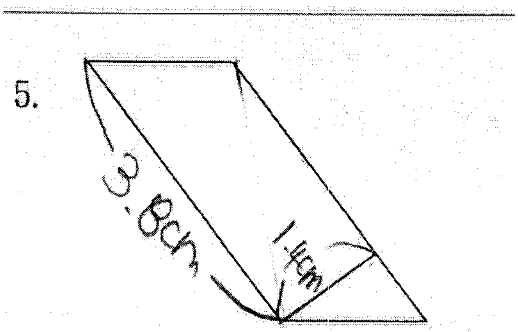


[그림 9] 복합도형의 넓이 합차의 오류

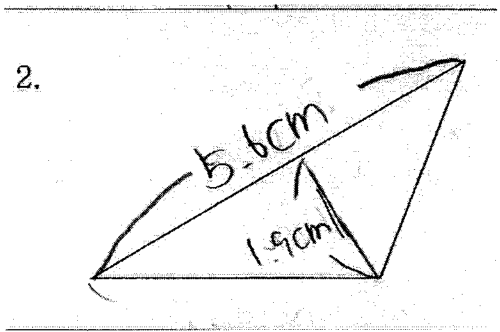
이외에도 강수희(2010)는 '길이 재기 실수'를 오류 유형으로 제시하였다. 그러나 강수희 연구에서나 이 연구에서 모두 5mm 정도의 오차는 인정할 수밖에 없기 때문에 사실상 길이 재기 오류는 문제가 되지 않을 것으로 생각한다. 다만, 이 연구에서도 일부 학생들이 실제로 측정하여 기록한 길이는 2.8cm이지만 식에서는 3.8로 기록한 경우가 있었다. 그러나 이런 실수는 오류라기보다는 실수로 보는 게 타당하다고 생각하여 오류 유형에 넣지는 않았다.

4. 특이한 해법

학생들이 도형의 넓이를 일반적인 방법과 다르게 해결한 경우는 그리 많지 않았다. 특히, 높이가 삼각형(또는 평행사변형)의 외부에 있는 경우 밑변을 다른 것으로 선택하면 다음 [그림 10], [그림 11]처럼 높이가 도형의 내부에 있도록 할 수 있다. 그러나 그런 방법으로 문제를 해결한 학생은 88명 중에서 2명에 불과하였다.

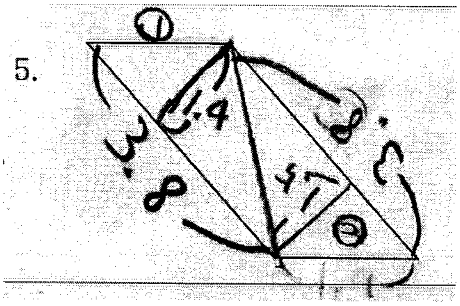


[그림 10] 특이한 풀이 1-2

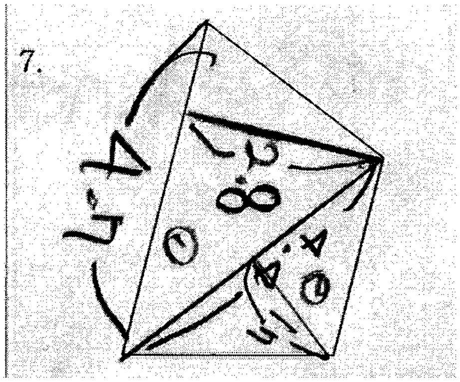


[그림 11] 특이한 풀이 1-1

이러한 현상은 '밑변'이라는 용어가 기준변이라는 의미보다는 '밑에 있는 변'이라는 의미로 아주 강하게 학생들에게 어떤 강제성을 부여하고 있기 때문이라고 생각할 수 있다. 이러한 판단은 위의 [그림 9]에서 윗변과 밑변, 높이를 잘못 적용한 것과 같은 사례에서 더욱 지지된다고 생각된다. 또는, 교과서나 교사가 학생들에게 고정된 한 가지 방법으로만 문제를 해결하고 또 다른 유연한 방법을 찾아보도록 지도하지 않는 데서 비롯되었다고도 생각할 수 있다.



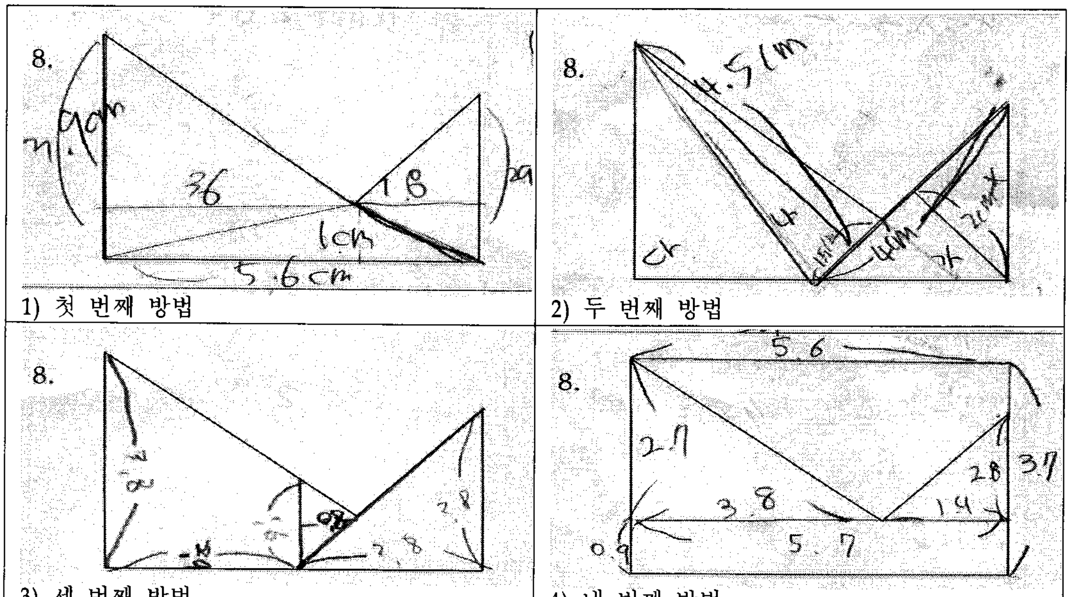
[그림 12] 특이한 풀이 2-1



[그림 13] 특이한 풀이 2-2

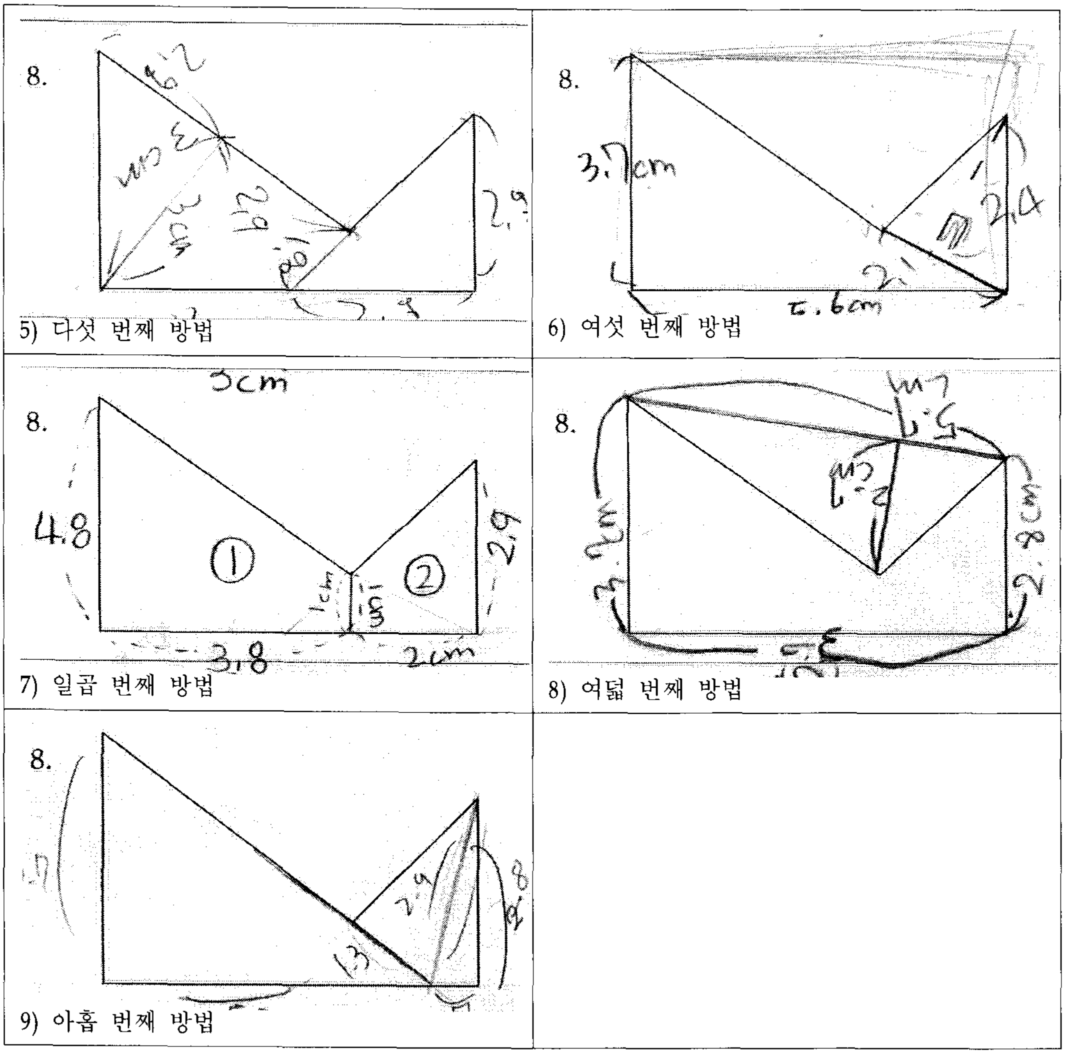
평행사변형이나 사다리꼴의 넓이를 구할 때 이를 두 개의 삼각형으로 분할하여 넓이를 구한 학생도 88명 중에서 2명 있었다. 물론 이 학생들은 수치 정보가 주어진 B형 검사에서는 이런 방법으로 해결하지 않고, 각각 평행사변형과 사다리꼴의 넓이 공식으로 문제를 해결하였다.

복합도형의 넓이를 구하는 문제에서는 도형의 합성 또는 분할 과정에서 다른 재미있는 방법들이 발견되었다. 8번 문제의 경우 [그림 14]와 같이 9가지 분할 또는 합성 방법이 나타났다. 그 중에서 두 개의 사다리꼴로 분할하는 7번째 방법이 가장 흔하였으며, 3번과 4번, 8번도 비교적 많이 등장하였다. 6번 방법이 특이한 사항인데, 이렇게 분할한 경우도 꽤 있었다. 엄밀한 의미에서 보면 이것은 틀린 방법이다. 그러나 초등학생들의 눈으로 볼 때 직선으로 제대로 분할한 것으로 보일 수도 있을 것 같다는 생각이 들었다. 또한 실제 상황에서는 이 정도의 오차는 용납될 수도 있을 것이라고 생각한다.

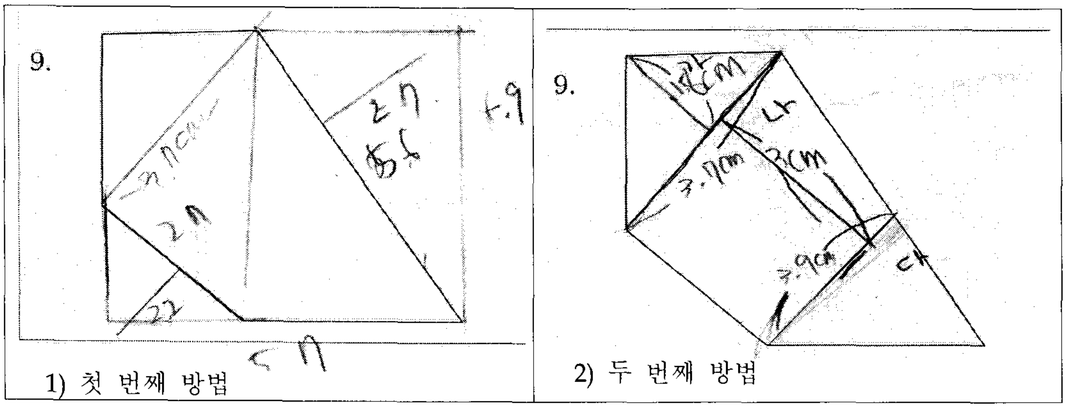


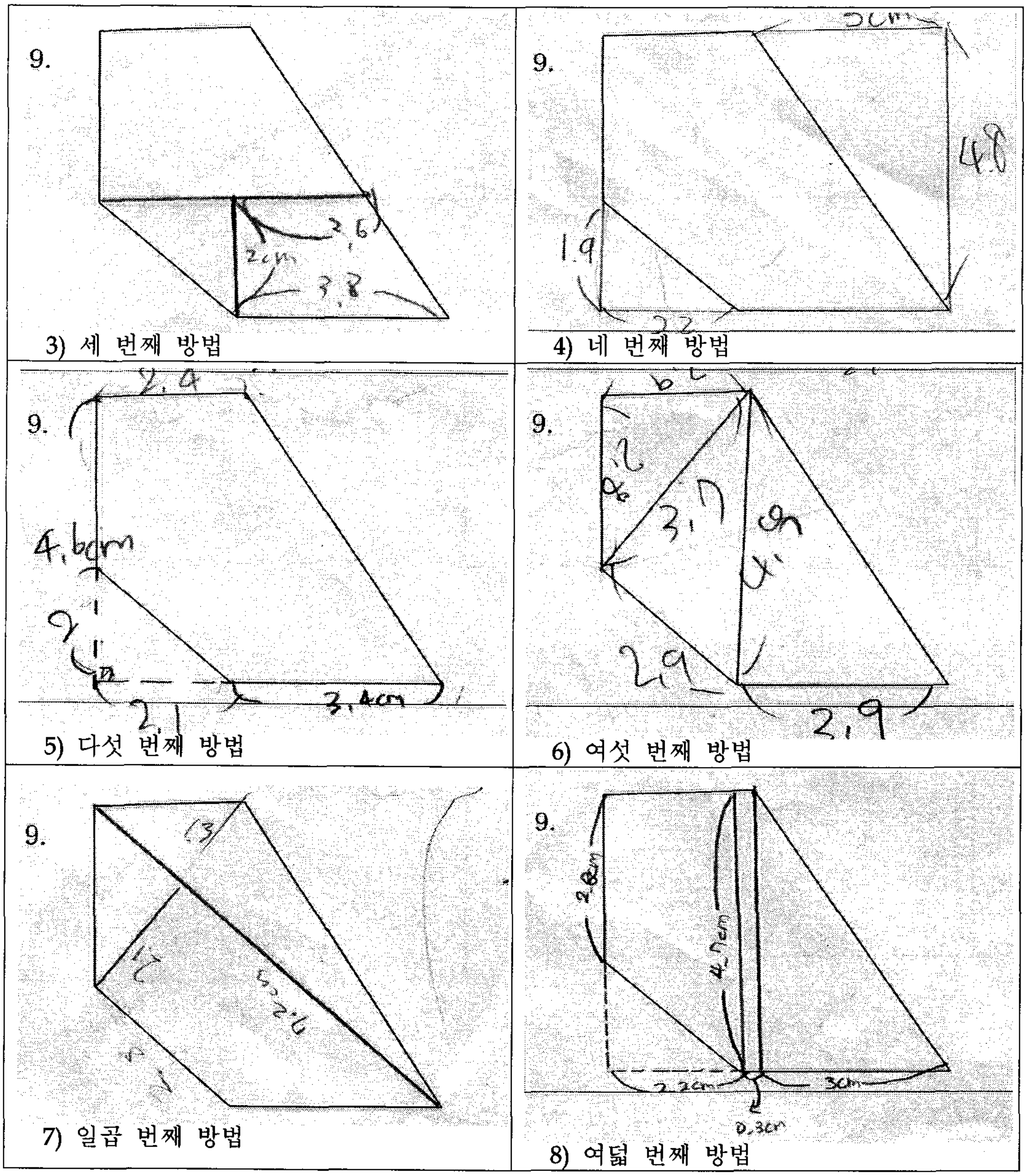
1) 첫 번째 방법 2) 두 번째 방법

3) 세 번째 방법 4) 네 번째 방법



[그림 14] 8번 문항의 다양한 풀이





[그림 15] 9번 문항의 다양한 풀이

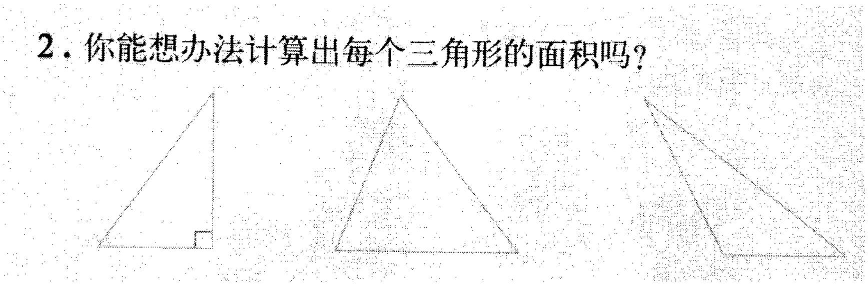
9번 문제의 경우에도 [그림 15]와 같이 다양한 방법들이 등장하였다. 연구자는 여섯 번째 방법과 같이 여러 개의 삼각형으로 분할하는 것을 예상하였는데, 여러 학생들이 이런 방법을 사용하기는 하였지만 그 외 다양하고 기발한 분할 방법도 나타났다. 이러한 현상은 학생들이 창의적으로 생각하고 있음을 보여주는 것이라고 할 수 있다. 이와 같은 합성과 분할의 과정에서 밑변과 높이가 정확하게 수직이 되지 않는 경우나 도형이 정확하게 사다리꼴이 되지 않는 경우도 있었지만 이는 초등학생 수준에서 허용될 수 있는 부분이라고 생각한다.

5. 연구 결과 발견 사항 및 논의

이상의 분석을 통하여 알게 된 사실은 다음과 같다.

첫째, 교과서 방식의 문제와 불필요한 정보가 있는 문제, 실측해야 하는 문제에서 실측해야 하는 문제의 난이도가 가장 높고 교과서 방식의 문제의 난이도가 가장 낮다는 사실을 알 수 있었다. 이것은 학생들이 도형의 넓이 공식에 대해 관계적으로 이해했다기 보다는 도구적으로 이해하여 사용하고 있을 것이라는 해석을 가능하게 한다고 할 수 있다. 그러므로 넓이 개념에 대해 충분한 이해를 시키고, 수치 정보가 없는 문제를 좀 더 많이 다루게 할 필요가 있을 것이다.

둘째, 실측해야 하는 문제의 성취 점수가 교과서 방식의 문제의 성취 점수보다 유의미하게 낮은 것으로 보아, 교과서 방식의 교육을 통해서는 실측해야 하는 문제, 더 나아가서 실생활에서의 측정 문제를 해결할 수 있는 능력을 기르는 데 한계가 있을 것으로 판단된다. 실측 문제에서는 어디를 측정해야 하는지, 밑변과 높이가 무엇인지 모르는 학생들이 많이 있었다. 밑변과 높이에 대한 오류가 많이 발생하고 있음은 안선영, 방정숙(2006)의 연구에서도 밝혀졌다. 그러므로 보조선이나 수치 정보가 주어지지 않은 문제를 해결해 보는 경험을 가지게 할 필요가 있다. 우리나라 교과서에서는 이런 문제가 제시되지 않지만 중국의 교과서에서는 다음 [그림 16]처럼 삼각형의 그림만 제시하고 삼각형의 넓이를 구하게 하는 문제들이 몇 개 주어져 있다(인민교육출판사 교과서 5상, 86-7 페이지).



[그림 16] 인민교육출판사 교과서 5상, pp.86-7

셋째, 학생들은 밑변을 검사지의 가로선과 평행한 선분으로 생각하는 경우가 많다는 사실을 알 수 있었다. 이것은 교과서나 문제집 등에서 그러한 도형을 주로 제시하기 때문에 비롯되었다고 볼 수도 있으며 '밑'이라는 일상 언어가 주는 의미에서 비롯되었다고 할 수도 있을 것이다. 사실, 초등학교 5학년 1학기 수학 교과서 도형의 넓이 단원을 보면 18페이지에 이르는 부분에서 사다리꼴 하나만 회전하여 제시되어 있고 삼각형의 경우도 하나만 가로변이 아닌 다른 변을 밑변으로 제시하고 있으며, "삼각형 ㄱㄴㄷ에서 변 ㄴㄷ을 밑변으로 하고"와 같이 표현하여, 삼각형에서 어느 변이든 밑변이 될 수 있다는 사실을 인지할 수 없도록 정의하고 있는 문제점이 있다. 그러나 일상 언어는 인식론적 장애 형성에 큰 영향을 주는 요인 중 하나(박선화, 1998)라는 점에서, 우리나라 교과서와 지도서는 이런 요인을 너무 가볍게 생각하는 것으로 보인다.[6] 그러므로 Dienes의 수학적 다양성의 원리를

6) 교사용 지도서에는 "평행사변형과 달리 삼각형에서는 밑변을 단어의 의미에서 나타낸 것으로 해석하여 '밑에 있는 변'으로 해석해도 큰 혼란은 없을 듯하다."(교육과학기술부, 2011b, p.289)와 같이 기술하고 있다. 그러나 이것은 일상어가 주는 인식론적 장애 요인을 너무 간과한 것으로 판단된다.

적용해서 가급적 아주 다양한 도형을 제시할 필요가 있으며, 밑변이라는 용어를 '기준변'과 같은 용어로 변경할 필요도 있다고 생각한다.7) 그러나 오래 사용해 온 용어를 변경하는 것은 쉽지 않기 때문에 용어의 개정에만 매달릴 것이 아니라, 이러한 용어에서 비롯된 인식론적 장애를 교과서 저자와 교사가 충분히 인식함으로써 학생들이 오개념을 형성하지 않도록 충분한 노력을 기울일 필요가 있는 것이다.

넷째, 평행사변형의 넓이 공식 오류를 범하는 학생들이 많이 있었다. 이러한 오류는 넓이 공식을 도구적으로만 받아들일 때 범할 가능성이 높다. 평행사변형의 넓이, 삼각형의 넓이, 사다리꼴의 넓이 사이의 관계를 고려하면 이런 오류는 줄어들 것이라고 생각한다.

다섯째, 도형의 분할과 합성에서 목적 없이 무조건적으로 행하는 경우들이 있다는 사실을 알 수 있다. 도형의 분할과 합성은 기존 지식과의 관련을 짓기 위한 것이다. 그러므로 학생 자신이 어떤 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 잘 파악하고 그런 도형으로 합성 또는 분할하도록 목표 지향적 활동을 요구해야 한다.

여섯째, 비록 측정해야 할 곳을 측정하지 못하거나 공식을 잘못 적용한 경우도 있지만, 8번과 9번 문제를 해결하는 과정을 보면, 학생들은 창의적으로 복합도형을 다양하게 분할 또는 합성할 수 있음을 알 수 있다. 이는 학생들의 생각을 존중하는 수업이 가능하다는 것을 의미한다고 할 수 있다.

V. 결 론

이 연구는 필요한 보조선과 수치 정보가 주어져 있는 평면도형의 넓이를 측정하게 하는 전통적인 지도 방법의 문제점을 지적하고 반성하려는 것이다. 그래서 이 연구는 전통적인 방법으로 지도받은 학생들에게 불필요한 정보가 있는 문제와 실측해야 하는 문제를 제시하여 그 차이를 비교하였다.

평면도형의 넓이를 구하는 공식을 배운 초등학교 5학년 4개 반 학생들을 대상으로 하여 비교한 결과 실측해야 하는 문제의 점수가 전통적인 문제의 점수보다 유의미하게 낮았으며(100점 만점에 약 25점), 불필요한 정보를 가진 문제의 점수가 그렇지 않은 문제의 점수보다 역시 유의미하게 낮았음을 알 수 있었다. 이것은 전통적인 방법에 의한 지도가 가지는 문제점을 분명하게 드러낸다고 할 수 있을 것이다. 현재와 같은 방법으로 도형의 넓이를 가르치면 학생들은 넓이 공식을 도구적으로 이해하여 주어진 수치를 계산만 할 뿐, 실생활에서는 어디를 재어야 하는지를 알 수 없게 된다.

이 연구를 통해서 학생들은 넓이를 구할 때 밑변과 높이에 대한 오류, 평행사변형의 공식 오류, 복합도형의 잘못된 분할-합성 오류, 도형 인식에 대한 오류, 복합도형의 넓이 합차의 오류와 같은 오류를 범하고 있음을 알 수 있었다. 이러한 오류는 교과서와 교사의 지도 방법에 더 기인한다고 할 수 있다. 즉, 교과서에 제시되어 있는 도형들은 거의 모두가 밑변이 교과서의 가로와 평행한 '표준적인' 도형이라는 점, 밑변은 교과서의 가로와 평행한 변이라는 인상을 주는 교과서의 정의, 필요한 수치 정보와 보조선이 주어짐으로써 학생들은 변을 선택하기 위한 판단을 할 필요도 없이 기계적으로 계산만 하도록 하는 문제 등

7) 평행사변형이나 삼각형의 밑변에 해당하는 영어 단어는 base이다. Everyday Mathematics를 비롯한 다른 외국의 교과서((M. Serra의 Discovering Geometry) 등에서는 base라는 용어를 사용하기 때문에 우리와 같은 오개념은 적을 것으로 예상된다.

이 복합적으로 이런 오류를 야기하고 있다.

현재와 같은 지도 방법으로는 측정 영역은 교육적 장점, 즉 측정이 일상생활에서 가장 많이 사용되는 내용이며 수학의 다른 내용을 학습하는 데 이용될 수 있다는 이점을 살리지 못하고, 오히려 수학의 가치에 대해 더욱 부정적인 인상을 심어줄 가능성이 높다. 우리는 오히려 많은 힌트를 제공한 문제를 해결하는 학생들을 보면서 '학생들이 올바른 대답을 하고 나는 제대로 가르쳤다.'고 착각하는, 소위 토파즈 효과(우정호, 2000)에 빠지고 있는 것은 아닌가 하는 우려를 하게 된다.

우리는 도형의 넓이를 지도하고 있는 현재의 이런 문제점을 심각하게 깨닫고 넓이 지도 방법에 대해 깊은 반성을 해야 할 것이다. 그러한 반성 위에서 측정 지도에 대해서 다음과 같이 개선책을 제안한다.

첫째, 넓이가 무엇인지, 밑변과 높이가 무엇인지, 그 개념을 명확하게 지도해야 한다. 밑변은 가장 밑에 있는 변이 아니라 기준이 되는 변이며 이런 의미를 부각시키기 위해 '밑변'이라는 용어를 '기준변'으로 변경하는 것도 검토할 필요가 있다. 그러나 그 보다 앞서 '밑'이라는 용어가 줄 수 있는 인식론적 장애의 심각성을 인식하고 이를 극복할 수 있는 방안을 교과서와 교사용 지도서에 제시하여야 할 것이며, 실측 활동이 밑변과 높이 개념에 대한 이해를 높이는 중요한 방법이 될 것이라고 생각한다.

둘째, 수학적 다양성의 원리를 적용하여, '표준적인' 도형만 아니라 회전하여 위치가 변한 도형도 제시하며, 불필요한 정보가 주어진 문제도 제시하여 학생들이 선택 또는 판단할 수 있는 여지를 확대하고, 수치 정보가 전혀 없는 문제도 제시하여 실측하는 활동도 할 수 있게 해야 한다.

셋째, 평면도형의 넓이 공식들을 개별적인 것으로 이해하게 하지 말고 공식 사이의 관련성을 이해하게 할 필요가 있다. 사다리꼴의 윗변의 길이가 0이 되면 삼각형이 되고 윗변이 밑변과 같으면 평행사변형이 되고, 사다리꼴이 평행사변형과 삼각형으로 분해될 수 있다는 사실 등을 이해시키고 통합적인 사고를 하게 하는 것은 여러 측정 오류를 방지하는 데 효과가 있을 것이다.

이 연구는 많은 학생을 대상으로 하여 조사한 것이 아니기 때문에 이 연구의 결과를 일반화하기는 무리일 수 있다고 본다. 그러나 어떤 결과를 일반화하기보다는 실측 활동을 수반하지 않는 넓이 지도가 초래하는 문제점을 드러내는 데는 문제가 없을 것이다.

참 고 문 헌

강문봉 외 (1999). **초등수학 학습지도의 이해**. 서울: 양서원.

강수희 (2010). **평면도형 넓이 구하기에서 나타나는 초등학생의 실측 활동 분석**. 경인교육대학교 석사학위논문.

교육과학기술부 (2011a). **수학 5-1**. 두산동아.

교육과학기술부 (2011b). **수학 지도서 5-1**. 두산동아.

배춘석 (2002). **구체적 조작 자료를 활용한 복합도형의 넓이 지도 방안 연구**. 춘천교육대학교 석사학위논문.

박선화 (1998). **수학적 극한 개념의 이해에 관한 연구**. 서울대학교 박사학위 논문.

박현웅 (2009). **평면도형의 넓이 구하기에서 나타나는 오류 유형과 원인 분석**. 경인교육대학교 석사학위논문.

송미정 (2004). **수학학습의 측정 영역에 대한 초등학생의 학업성취도 분석**. 진주교육대학교 석사학위논문.

안선영, 방정숙 (2006). 평면도형의 넓이에 대한 교사의 교수학적 내용 지식과 수업 실제와의 관계 분석. **수학교육학연구, 16**(1), 25-41.

우정호 (2000). **수학 학습-지도의 원리와 방법**. 서울: 서울대학교출판부.

원봉희 (2002). **평면도형의 넓이를 관계적으로 이해시키기 위한 지도 방안 연구**. 경인교육대학교 석사학위논문.

유연자, 방정숙 (2008). 초등학교 5학년 평면도형의 넓이 구하기 수업에서 나타난 학생들의 해결방법 분석. **학교수학, 10**(3), 443-461.

이선영 (2006). **초등학생의 평면도형 넓이 공식 구성 활동 분석**. 경인교육대학교 석사학위논문.

이용률 (2010). **초등학교 수학의 중요한 지도 내용**. 서울: 경문사.

임승현, 박영희 (2011). 초등학교 6학년 학생들의 도형의 높이 개념 이해에 대한 연구. **한국초등수학교육학회지, 15**(1), 141-159.

임아름, 박영희 (2011). 개방형법에 따른 평면도형의 넓이 지도에 대한 연구 -평행사변형, 삼각형, 사다리꼴, 마름모를 중심으로-. **한국초등수학교육학회지, 15**(2), 361-383.

장영은 (2003). **도형과 관련된 문제해결 과정에서 초등학생의 오류유형과 원인분석 연구**. 전주교육대학교 석사학위논문.

정동권 (2001). 평면도형의 넓이 지도를 통한 수학적 사고의 신장. **인천교육대학교 교육논총, 13**, 1-36.

정말숙 (2004). **평면도형의 넓이 지도방안**. 부산대학교 석사학위논문.

정필원 (2005). **초등학교 평면도형의 넓이 지도에서 큐지네르 막대의 활용에 관한 연구**. 경인교육대학교 석사학위논문.

과정교재연구소 (2005). **수학 5학년 상권**. 北京: 人民教育出版社.

Baroody, A. J., & Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power; An investigative approach to K-8 mathematics instruction*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Battista, M. T. (2003). Understanding students' thinking about area and volume measurement. In D. H. Clements, & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement*(pp. 122-142). Reston, VA: NCTM.

Stephan, M., & Clements, D. H. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. In D. H. Clements, & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement*(pp. 3-16). Reston, VA: NCTM.

<Abstract>

Review on Teaching of Measuring the Area of Plane Figures

Kim, Jeong Ha[8]; & Kang, Moonbong[9]

This study is to determine if teaching of measuring the area of plane figures in elementary school is successful. While they teach to measure the area of figures in elementary school, students don't measure the segment of the figure directly until now. The figures are presented with auxiliary line and numerical information. When students measure the area of such figure, they do only substitute the number and calculate it.

This study found that such teaching is not successful and propose the new teaching method of measuring the plane figures.

Key words: area of the plane figure, measure, actual measurement, error, the base, height

논문접수: 2011. 11. 11
논문심사: 2011. 12. 02
게재확정: 2011. 12. 16

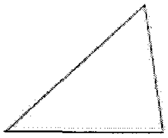
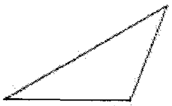
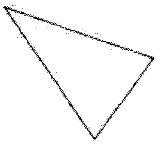
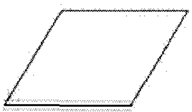
8) seakjh@hanmail.net
9) mbkang@ginue.ac.kr

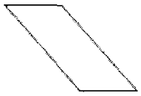
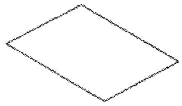
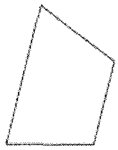
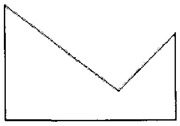
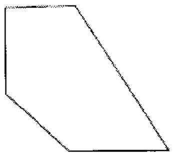
<부록 1>

도형의 넓이 구하기(A)

번호:

1. 자로 길이를 재어 넓이를 구하세요.
2. 어느 부분을 재었는지, 그 길이가 얼마인지를 표시해야 합니다.
3. 넓이를 구하는 식을 쓰면 답까지 계산하지 않아도 됩니다.

문 제	풀 이
1. 	
2. 	
3. 	
4. 	

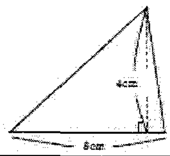
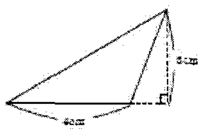
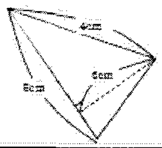
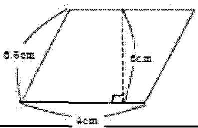
문 제	풀 이
5. 	
6. 	
7. 	
8. 	
9. 	

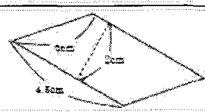
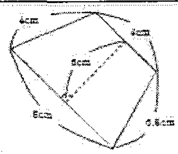
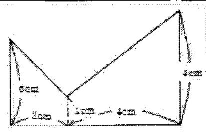
<부록 2>

도형의 넓이 구하기(B)

번호:

※ 넓이를 구하는 식을 쓰면 답까지 계산하지 않아도 됩니다.

문 제	풀 이
1. 	
2. 	
3. 	
4. 	

문 제	풀 이
5. 	
6. 	
7. 	
8. 	
9.