

불규칙 가진의 크기에 따른 탄성진자 계의 안정성 검토

이신영*

(논문접수일 2011. 03. 24, 수정일 2011. 07. 28, 심사완료일 2011. 08. 02)

Stability of an Elastic Pendulum System due to Random Excitations

Sin-Young Lee*

Abstract

Responses of multi degree of freedom systems under random excitations can be estimated by using Monte Carlo simulation. The equations of motion of an elastic pendulum system include nonlinear terms and show irregular characteristics under random excitation. While the magnitude of random excitation is small the response of an elastic pendulum shows borderlines. As the magnitudes of excitation increase, the responses show divergence with very large amplitudes of motion and the tendency is diverse dependent on the magnitude and type of random excitations and the ratio of natural frequencies.

Key Words : Random excitation(불규칙 가진), Elastic pendulum(탄성진자), Stability(안정성), Monte Carlo simulation(몬테카를로 시뮬레이션)

1. 서론

진동하는 시스템에 작용하는 가진력의 주파수 특성이 구체적으로 주어지는 가진에 대해서는 널리 알려진 여러 가지 방법을 사용하여 계의 응답 및 응답의 특성을 해석하는 것이 용이하다. 한편, 정확한 크기와 진동수를 예측할 수 없는 불규칙 가진을 받는 일반적인 다자유도계의 응답은 해석적인 해를 구하기 쉽지 않고 몬테카를로 시뮬레이션에 의하여 그 통계적 응답을 구할 수 있다^(1,2).

본 논문에서는 일반적인 비선형 다자유도 계의 일례로 탄성진자를 설정하고 불규칙 가진을 받을 때의 응답 특성에 대하여 조사하고 불규칙 가진의 크기가 변화할 때 계의 특성에 따른 응답의 안정성을 검토하고자 한다. 계의 특성으로는 길이 방향 고유진동수와 회전 방향 고유진동수의 비율을 설정하고, 가진

은 지지점에 수평 방향 및 수직 방향의 두 방향으로 불규칙 가진이 작용하는 것으로 설정한다. 불규칙 가진의 여러 가지 크기에 대하여 계의 특성이 변화함에 따른 응답을 몬테카를로 방법에 의하여 시뮬레이션하고 시뮬레이션 결과 주어지는 응답 제곱의 기대치에 의하여 안정성을 검토하고자 한다.

2. 탄성 진자 계

수직 방향과 수평 방향으로 불규칙 가진을 받는 탄성진자계는 Fig. 1과 같이 모델링 할 수 있다^(3,4).

진자 계가 지지점에서 수직방향과 수평방향으로 불규칙 가진 $y(t)$ 와 $z(t)$ 을 받고, 스프링의 길이 방향 운동과 회전진자 운동에 점성감쇠가 존재한다고 가정한다. 이 진자가 평면 운동을 한다고 가정하면 이 진자의 수직 및 수평 위치는

* 군산대학교 기계자동차공학부 (sinylee@kunsan.ac.kr)
주소: 573-701 전북 군산시 대학로 558

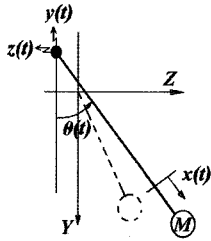


Fig. 1 A spring-pendulum system

$$Y = (l_0 + x_{st} + x)\cos\theta - y(t) \quad (1)$$

$$Z = (l_0 + x_{st} + x)\sin\theta - z(t) \quad (2)$$

여기에서 l_0 는 진자의 원래 길이, x_{st} 는 정적 변형을 나타낸다. 시간 미분으로부터 속도 항을 구할 수 있고 속도로부터 운동에너지를, 질량의 위치와 변형에너지로부터 위치에너지를 구할 수 있다. 운동에너지와 위치에너지로부터 Lagrange 운동방정식을 이용하여 시스템의 운동방정식을 구하고, 점성 감쇠력 $c_1\dot{x}$ 과 $c_2\dot{\theta}$ 을 추가하면⁽³⁾

$$M\ddot{x} + c_1\dot{x} + kx + Mg(1 - \cos\theta) - M(l+x)\theta^2 - M\dot{y}\cos\theta - M\dot{z}\sin\theta = 0 \quad (3)$$

$$M(l+x)^2 + 2M(l+x)\dot{x}\dot{\theta} + c_2\dot{\theta} + M(l+x)(\dot{y}\sin\theta - \dot{z}\cos\theta) + Mg(l+x)\sin\theta = 0 \quad (4)$$

여기에서 $l = l_0 + x_{st}$ 를 나타낸다. 식 (3)과 (4)는 변위의 제곱항과 삼각함수가 포함되므로 탄성진자 계는 비선형 계이다. 다음과 같은 무차원 변수를 도입하고,

$$\frac{k}{M} = \omega_1^2, \quad \frac{c_1}{M} = 2\zeta_1\omega_1, \quad \tau = \omega_1 t, \quad u = \frac{x}{l}, \quad \frac{g}{l} = \omega_2^2, \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = r, \quad \frac{c_2}{M\omega_2} = \zeta_2, \quad \frac{\dot{y}}{l} = w_y(\tau), \quad \frac{\dot{z}}{l} = w_z(\tau) \quad (5)$$

식 (3)과 (4)를 정리하고, $u = X_1, \theta = X_2, \dot{u} = X_3, \dot{\theta} = X_4$ 라고 놓으면

$$\dot{X}_1 = X_3 \quad (6)$$

$$\dot{X}_2 = X_4 \quad (7)$$

$$\dot{X}_3 = -X_1 - r^2(1 - \cos X_2) - 2\zeta_1 X_3 + (1 + X_1) X_4^2 + \cos X_2 w_y(\tau) + \sin X_2 w_z(\tau) \quad (8)$$

$$\dot{X}_4 = -\frac{2\zeta_2 r}{(1 + X_1)^2} X_4 - \frac{2}{1 + X_1} X_3 X_4 - \frac{r^2}{1 + X_1} \sin X_2 - \frac{\sin X_2}{1 + X_1} w_y(\tau) + \frac{\cos X_2}{1 + X_1} w_z(\tau) \quad (9)$$

위 방정식 (6)~(9)는 일반적인 가진을 받는 탄성진자의 응답을 구하는 운동방정식이고, 가진함수 $w_y(\tau)$ 및 $w_z(\tau)$ 를 입력하여 해를 구할 수 있다.

확률론적 방법에 의하여, 불규칙 가진의 스펙트럼 밀도를 K , 시간 간격을 Δt , 정규분포하는 불규칙 변수를 u_k 라고 하면, 실 백색잡음(real white noise)의 n 번째 표본함수 $W_n(t_k)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다⁽⁵⁾.

$$W_n(t_k) = \sqrt{\frac{2\pi K}{\Delta t}} u_k \quad (10)$$

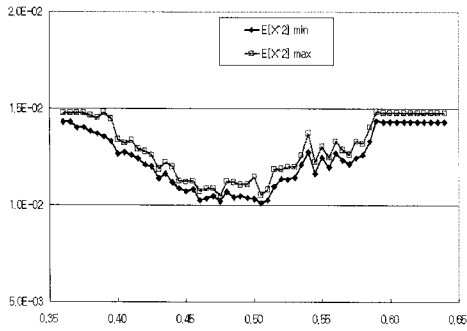
3. 몬테카를로 시뮬레이션

몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation)은 계산을 수행하기 위하여 난수(random number)의 수열을 이용하는 방법을 가리키는 일반적인 용어이다⁽⁶⁾. 몬테카를로 시뮬레이션의 기본 절차는 불규칙 입력 생성, 시스템 모델, 시스템 출력 및 출력치의 통계적 처리이다.

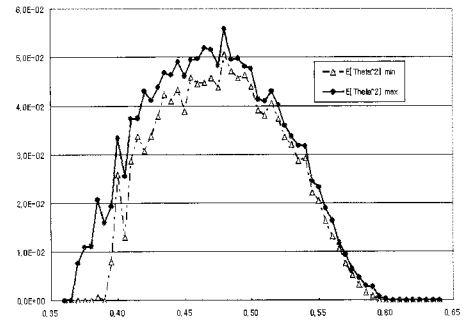
본 연구에서 사용한 난수발생법은 선형 조화 발생기(linear congruential generator)이고, 이 방식에 의하여 균일하게 분포하는 수열을 구할 수 있다. 선형조화발생기에 의하여 구한 균일하게 분포하는 실수의 수열은 여러 방법에 의하여 특정한 분포를 갖는 수열로 변환할 수 있다. 본 연구에서는 정규분포의 수열을 구하는 박스뮐러(Box-Muller) 방법을 이용하였다^(6,7). 본 논문에서 비선형 시스템의 시간이력 해석을 위하여 룬게쿠타(Runge-Kutta) 방법을 사용하였다^(8,9). 룬게쿠타 방법으로 구한 각 시각에서의 응답을 이용하면 변위 제곱의 기댓값을 구할 수 있다.

4. 수치 해석 결과

시스템모델링, 확률론적 방법 및 MCS 기법을 종합하여 전산 프로그램을 작성하고 주어진 변수에 대한 해석을 수행하였다. 전체적인 변수로 감쇠비 $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.01$ 로 설정하였고, Y 방향과 Z 방향의 불규칙 가진 스펙트럼밀도 K_{yy}, K_{zz} 및 진동수비 r 을 변화시켜 가며 해석하였다.



(a) $E[X^2]$ vs. frequency ratio



(b) $E[\theta^2]$ vs. frequency ratio

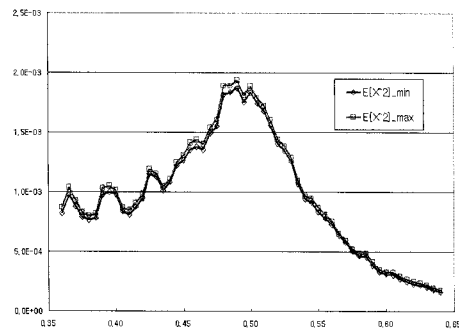
Fig. 2 Expected values in the case of $(K_{yy} = 10^{-4}, K_{zz} = 0)$

Fig. 2와 3은 각각 $K_{yy} = 10^{-4}, K_{zz} = 0$ 인 경우와 $K_{yy} = 0, K_{zz} = 2 \times 10^{-5}$ 인 경우의 시뮬레이션 결과를 나타낸다. 각 그림에서 가로축은 진동수 비 $r(\omega_2/\omega_1)$ 을 나타내고 세로축은 길이방향 무차원응답의 제곱의 기대치를 나타낸다. Fig. 2의 경우에는 무차원 응답 제곱의 기대치가 진동수 비 0.5 정도를 기준으로 하여 대칭에 가까운 모양을 나타내고 있는데 대하여, Fig. 3의 경우에는 매우 미세하기는 하나 길이방향 기대치에서 작은 피크들을 볼 수 있으며 각도 방향 기대치에서는 대칭성이 완전히 사라지고 진동수 비가 작은 구역에서 상대적으로 값이

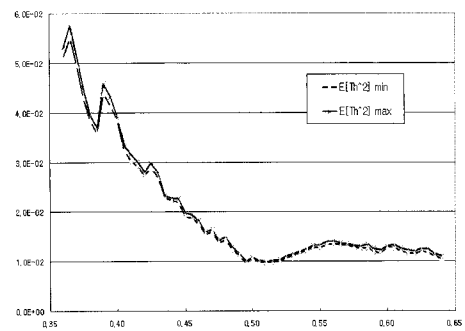
큰 결과를 나타내고 있다.

Fig. 4는 $K_{yy} = 1.0 \times 10^{-4}, K_{zz} = 2.0 \times 10^{-5}$ 인 경우를 나타내고 Fig. 5는 $K_{yy} = 1.2 \times 10^{-4}, K_{zz} = 2.0 \times 10^{-5}$ 인 경우를 나타낸다. Fig. 4에서 길이 방향 기대치는 Fig. 1에 비하여 대칭성이 약해졌을 뿐 별다른 변화가 나타나지 않았으나, 진동수 비 $r=0.39$ 이하의 범위에서 각도 방향의 기대치가 매우 크며 이로부터 불안정 구간임을 알 수 있다.

Fig. 5의 길이 방향은 가진 폭의 증가에서 예상되는 바와 같이 Fig. 4에 비하여 기대치의 값이 증가하였는데, 각도 방향에서는

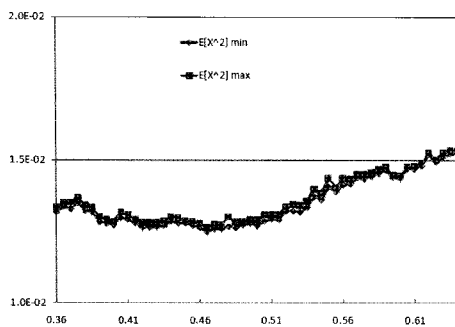


(a) $E[X^2]$ vs. frequency ratio

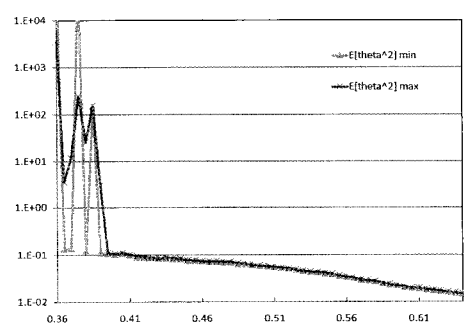


(b) $E[\theta^2]$ vs. frequency ratio

Fig. 3 Expected values in the case of $(0, 2.0 \times 10^{-5})$

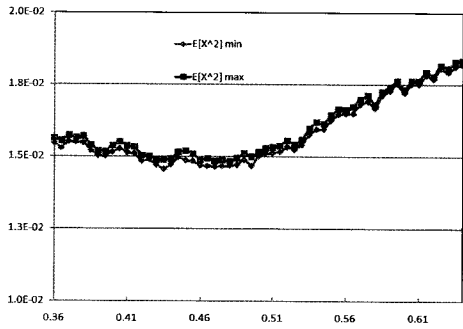


(a) $E[X^2]$ vs. frequency ratio

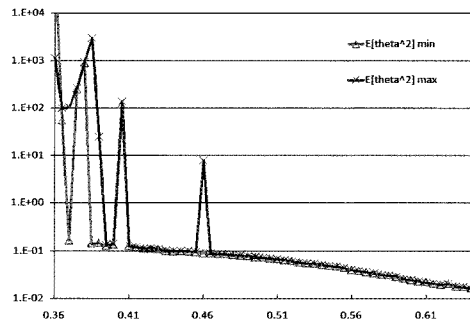


(b) $E[\theta^2]$ vs. frequency ratio

Fig. 4 Expected values in the case of $(10^{-4}, 2 \times 10^{-5})$

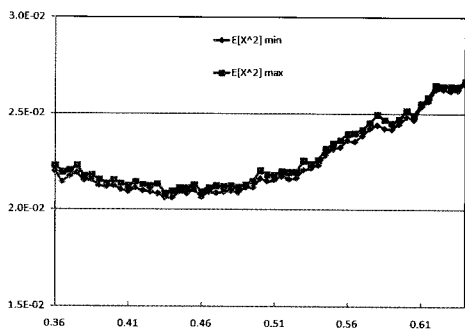


(a) $E[X^2]$ vs. frequency ratio

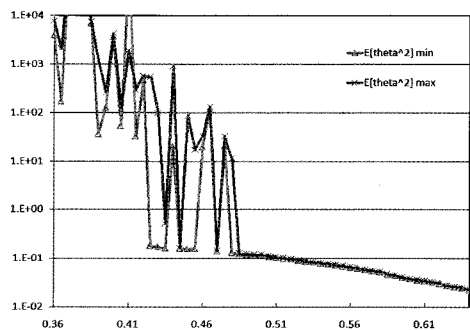


(b) $E[\theta^2]$ vs. frequency ratio

Fig. 5 Expected values in the case of $(1.2 \times 10^{-4}, 2.0 \times 10^{-5})$

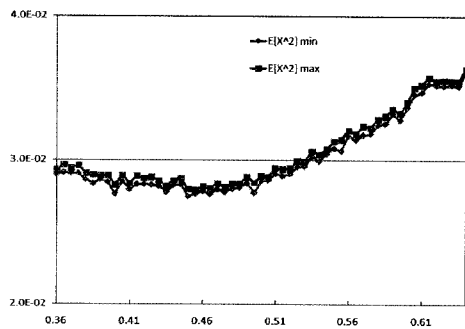


(a) $E[X^2]$ vs. frequency ratio

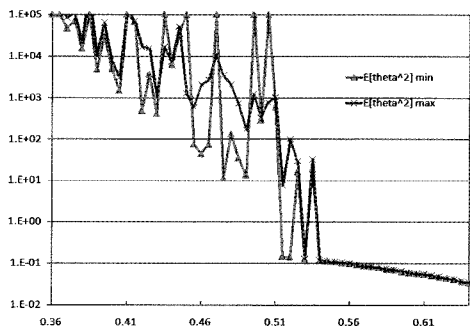


(b) $E[\theta^2]$ vs. frequency ratio

Fig. 6 Expected values in the case of $(1.8 \times 10^{-4}, 2.0 \times 10^{-5})$

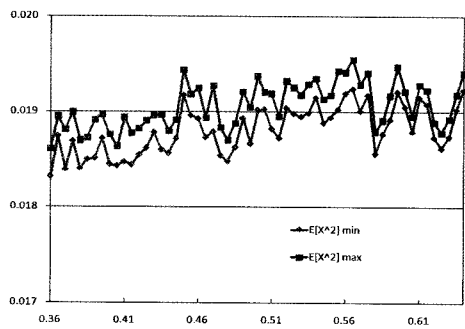


(a) $E[X^2]$ vs. frequency ratio

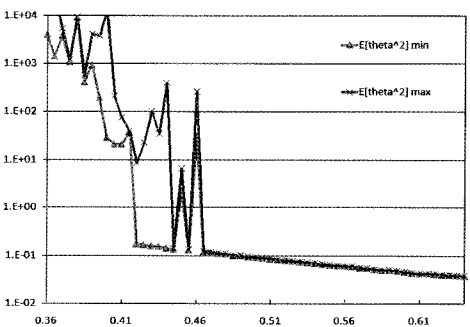


(b) $E[\theta^2]$ vs. frequency ratio

Fig. 7 Expected values in the case of $(2.5 \times 10^{-4}, 2.0 \times 10^{-5})$

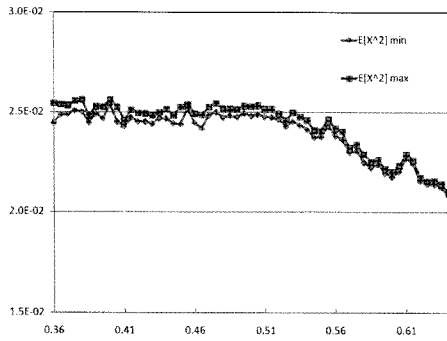


(a) $E[X^2]$ vs. frequency ratio

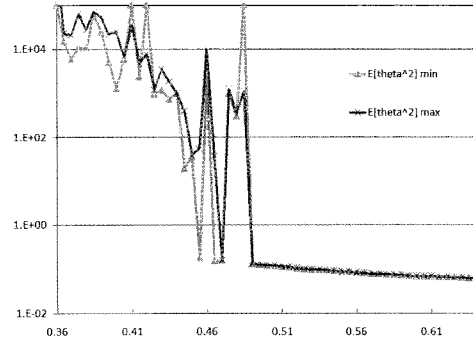


(b) $E[\theta^2]$ vs. frequency ratio

Fig. 8 Expected values in the case of $(1.2 \times 10^{-4}, 6.0 \times 10^{-5})$



(a) $E[X^2]$ vs. frequency ratio



(b) $E[\theta^2]$ vs. frequency ratio

Fig. 9 Expected values in the case of $(1.2 \times 10^{-4}, 1.2 \times 10^{-4})$

불안정 구역의 범위가 증가하였고, 진동수 비 0.46의 경우 새로운 피크가 나타나 결과적으로 조사대상 구간 $r=0.36 \sim 0.64$ 중에서 $r=0.36 \sim 0.405$ 및 $r=0.460$ 의 경우 불안정을 나타내었다.

Fig. 6은 $K_{yy} = 1.8 \times 10^{-4}$, $K_{zz} = 2.0 \times 10^{-5}$ 인 경우를 나타내고 Fig. 7은 $K_{yy} = 2.5 \times 10^{-4}$, $K_{zz} = 2.0 \times 10^{-5}$ 인 경우를 나타낸다. Fig. 6을 보면 조사대상 구간으로 설정한 $r=0.36 \sim 0.64$ 중에서 $r=0.36 \sim 0.485$ 의 경우 불안정을 나타내었고, Fig. 7을 보면 $r=0.36 \sim 0.535$ 의 범위에서 불안정을 나타내었다.

Fig. 8은 $K_{yy} = 1.2 \times 10^{-4}$, $K_{zz} = 6.0 \times 10^{-5}$ 인 경우를 나타내고 Fig. 9는 $K_{yy} = 1.2 \times 10^{-4}$, $K_{zz} = 1.20 \times 10^{-4}$ 인 경우를 나타낸다. Fig. 8을 보면 조사대상 구간 $r=0.36 \sim 0.64$ 중에서 $r=0.36 \sim 0.460$ 의 경우 불안정을 나타내었고, Fig. 9를 보면 $r=0.36 \sim 0.485$ 의 범위에서 불안정을 나타내었다.

Fig. 4~7은 K_{yy} 의 값을 차례로 증가시킨 경우이고, Fig. 4와 Fig. 8~9는 K_{zz} 의 값을 차례로 증가시킨 사례를 나타낸다. 이

두 가지 경우를 보면 불규칙 가진의 종류 및 크기에 따라 불안정 구간이 변화하는 것을 알 수 있다. 이 경향을 정리하여 Table 1과 2에 나타내었다.

Table 1에서 보면 K_{zz} 가 일정할 때 K_{yy} 의 값이 증가함에 따라 불안정 영역이 넓어짐을 볼 수 있다. 이 경우 K_{zz} 의 값에 따른 차이는 K_{yy} 의 변화 효과가 큰 때문에 두드러지지 않았다고 판단된다. Table 2를 보면 K_{yy} 가 일정할 때 K_{zz} 의 값이 증가함에 따라 불안정 영역이 넓어짐을 볼 수 있다.

이 경우는 Table 1에 비하여 불안정영역 증가비율이 상대적으로 작다고 할 수 있다.

5. 결론

일반적인 비선형 다자유도 계의 일례로 탄성진자를 설정하고 불규칙 가진을 받을 때의 응답 특성에 대하여 해석하고 불규칙 가진의 크기가 변화할 때 계의 특성에 따른 응답의 안정성을 검토하였다. 수평방향과 수직 방향의 불규칙 가진 스펙트럼밀도 및 진동수 비를 변화시켜 가며 해석하였다. 해석 결과를 보면 각 불규칙 가진 스펙트럼밀도 및 진동수 비에 따라 불안정 영역이 변화하였다. 불규칙 가진 스펙트럼밀도가 증가함에 따라 불안정 영역이 넓어졌고, 진동수 비가 작을수록 불안정함을 나타내었다.

참고 문헌

- (1) Marek, P., Brozzetti, J., and Gustar, M., 2001, *Probabilistic Assessment of Structures using Monte Carlo Simulation*, Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Praha Czech.
- (2) Landau, D. P., and Binder, K., 2000, *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Table 1 Unstable region r according to K_{yy}

K_{yy}	$K_{zz}=2.0 \times 10^{-5}$	$K_{zz}=3.0 \times 10^{-5}$
1.1×10^{-4}	0.360~0.390	0.360~0.405
1.2×10^{-4}	0.360~0.405, 0.460	0.360~0.420
1.5×10^{-4}	0.360~0.470	0.360~0.460
1.8×10^{-4}	0.360~0.485	0.360~0.470
2.5×10^{-4}	0.360~0.535	0.360~0.580

Table 2 Unstable region r according to K_{zz}

K_{zz}	$K_{yy}=1.0 \times 10^{-4}$	$K_{yy}=1.2 \times 10^{-4}$
2×10^{-5}	0.360~0.390	0.360~0.405, 0.460
4×10^{-5}	0.360~0.420	0.360~0.425, 0.460
6×10^{-5}	0.360~0.420	0.360~0.460
8×10^{-5}	0.360~0.450	0.360~0.485
12×10^{-5}	0.360~0.470	0.360~0.485

- (3) Cho, D. S., 2001, "Nonlinear Vibration Responses of a Spring-pendulum System under Random Base Excitations," *J. of KSPE*, Vol. 18, No. 3, pp. 175~181.
- (4) Lee, S. Y., 2009, "Response of an Elastic Pendulum under Random Excitations," *Trans. of the KSMTE*, Vol. 18, No. 2, pp. 187~193.
- (5) Lin, Y. K., and Cai, G. Q., 2004, *Probabilistic Structural Dynamics: Advanced Theory and Applications*, McGraw-Hill, New York.
- (6) Grigoriu, M., Ditlevsen, O., and Arwade, S. R., 2003, "A Monte Carlo Simulation Model for Stationary Non-gaussian Processes," *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 18, pp. 87~95.
- (7) Pradlwarter, H. J., and Schueller, G. I., 1997, "On Advanced Monte Carlo Simulation Procedures in Stochastic Structural Dynamics," *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol. 12, pp. 735~744.
- (8) Meirovitch, L., 1985, *Introduction to Dynamics and Control*, John Wiley & Sons, New York.
- (9) Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., and Vetterling, W. T., 1988, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, New York.