Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering
Vol. 34, No. 4, pp.162－168, December 2011.

Busy Period 기대값을 사용하여 가장 일반화된 삼변수 운용방침의 분석

이 한 교

한남대학교 산업경영공학과

Decomposition of the Most Generalized Triadic Operating Policy Using its Corresponding Expected Busy Period

Hahn-Kyou Rhee

Department of Industrial and Management Engineering Hannam University

The most generalized form of the triadic operating policy for a controllable *M/G/1* queueing model is analyzed to obtain fundamental relations among the other forms of operating policies based on its corresponding expected busy period. Since it consists of three decision variables N, T and D, it could be possible to decompose into the simple, the dyadic and other forms of the triadic operating policies. The procedures to decompose the most generalized triadic policy into other forms of operating policies could provide a general methodology to identify each element associated with it.

Keywords : Decomposition, Expected Busy Period, Operating Policy, *M/G/1* Queueing Model

1. 서 론

원하는 서비스를 받기 위해 서비스를 제공해 주는 서비스창구에 도착했을 때 이미 도착해 있는 고객이 있는 경우 이들의 서비스가 완료될 때까지 기다려야 하는 경우가 보편화 되어 있다. 이와 같은 모든 삶의 현장 어디에서나 접할 수 있는 다양한 형태의 기다림을 과학적 방법으로 분석하여 유용한 정보를 도출하기 위해 개발된 대기모형은 일반적인 대기모형(ordinary queueing model)과 조정가능한 대기모형(controllable queueing model) 두 가지 형태로 분류할 수 있다. 두 모형의 가장 큰 차이점은 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 대기시스템에 없을 때의 서비스를 제공해주는 사람, 즉 서비스인(server)의 역할과 서비스를 받기 위해 처음으로 도착하는 고객이 언제 서비스를 받을 수 있는지에 달려있다. 만약 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없을 때, 처음으로 도착한 고객은 아무런 조건 없이 도착 즉시 서비스를 받을 수 있을 경우는 일반적인 대기모형에 속한다. 이러한 형태의 서비스를 제공하기 위해서는 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없어도 server는 서비스를 제공하는 창구에서 앞으로 도착할 고객에게 즉시 서비스를 제공할 수 있도록 항상 대기상태를 유지해야만 한다. 다시 말해 서비스를 기다리는 고객의 유무에 관계없이 server는 항상 서비스창구에서 대기상태를 유지해야 하기 때문에 고객의 입장에서는 편리성이 담보되지만 대기시스템을 운영하는 입장에서는 server의 업무활용도가 낮아지게 됨을 감수해야 한다. 일반적인 대기모형에서 나타나는 이러한 문제점, 즉 server의 업무활용도를 향상시키

논문접수일 : 2011년 10월 25일 게재확정일 : 2011년 12월 17일
† 교신저자 hkrhee@hnu.kr
※ 이 논문은 2011년 한남대학교 학술조성연구비 지원에 의하여 연구되었음.

기 위해 제안된 방법이 대기모형의 또 다른 형태로 분류되는 조정가능한 대기모형이라고 할 수 있다. 조정가능한 대기모형에서는 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없으면 서비스를 제공하는 창구를 즉시 폐쇄한 다음 server는 다른 업무를 수행해야 한다. 이러한 규칙으로 인해 server는 서비스창구에서의 업무 그리고 서비스창구 폐쇄 후 또 다른 업무를 수행해야 하기 때문에 server의 업무활용도를 향상시킬 수 있다. 또한 일단 폐쇄된 창구는 미리 정해진 조건이 만족되어야만 server는 다른 업무의 수행을 중단하고 서비스를 기다리는 고객들을 위하여 서비스창구로 복귀하여 원래 수행해야 할 서비스제공을 재개할 수 있다. 다시 말해 창구 폐쇄 후 도착한 고객은 미리 정해진 조건을 만족하지 않을 경우 서비스를 제공받을 수 없다. 이러한 폐쇄된 서비스창구를 다시 재개할 수 있도록 미리 정해진 조건을 조정가능한 대기모형의 운용방침(operating policy)라고 한다. 따라서 조정가능한 대기모형에서는 폐쇄된 서비스창구가 재개되기 위한 시스템 상태를 규정하는 운용방침의 역할이 매우 중요하다. 다양한 형태의 운용방침이 제안되어 활용되고 있지만(Kella[5], Teghem[13]) 일반적으로 이러한 운용방침들은 시스템상태를 표현하는 입력변수의 개수에 따라 한 개인 경우 단순 운용방침(simple operating policy), 두 개인 경우 이변수 운용방침(dyadic operating policy) 그리고 세 개인 경우 삼변수 운용방침(triadic operating policy)으로 분류된다.

하나의 입력변수가 포함된 단순 운용방침에는 첫째, Yadin and Naor[14]가 제안한 것으로 시스템 내부에 고객이 없어 폐쇄된 서비스창구는 그 후 서비스를 받기 위해 기다리는 고객의 수가 처음으로 $N(N \geq 1)$명이 되는 순간 서비스창구를 재개하여 기다리는 고객에게 서비스를 제공하는 N 운용방침(N-policy), 둘째, Heyman[4] 등이 제안한 운용방침으로 서비스창구가 폐쇄된 후 T 단위시간이 경과한 뒤, 만약 서비스를 기다리는 고객이 있을 경우 서비스창구를 재개하여 서비스의 제공이 재개되는 T 운용방침(T-policy) 그리고 마지막으로 Balachandran and Tijms[1]이 제안한 것으로 서비스창구가 폐쇄된 이후 시스템 내부에서 서비스를 기다리는 고객의 예상되는 서비스의 시간의 합이 처음으로 D 단위시간을 초과하는 순간부터 기다리는 고객에게 서비스제공을 재개하는 D 운용방침(D-policy)이 있다.

고객이 없어 폐쇄된 서비스창구의 재개를 위해 단순 운용방침이 적용되는 조정가능한 대기모형은 server를 일반적인 대기모형보다는 효과적으로 활용할 수 장점이 있지만, 다양한 시스템의 상태를 표현할 수 있는 많은 조건들 중에 한 가지 시스템 상태에만 의존하여 폐쇄된 서비스창구가 재개되기 때문에 시스템 운영에 유연성이 결여되어 있음을 지적할 수 있다. 이러한 문제점을 보완하기 위해 하나의 단순 운용방침에 또 다른 하나의 시스템 내부 조건을 나타내는 단순 운용방침이 결합한 새로운 형태의 운용방침, 즉 이변수 운용방침(dyadic operating policy)이 Gakis, Rhee, and Sivazlian[3]에 의해 제안되었다. 폐쇄된 서비스창구가 재개될 수 있는 조건에 유연성이 추가된 이변수 운용방침은 단순 운용방침들 중 선정된 두 운용방침이 특이한 형태로 결합된 것으로 여기에는 $Min(N, T)$, $Max(N, T)$, $Min(N, D)$, $Max(N, D)$, $Min(T, D)$ 그리고 $Max(T, D)$ 운용방침이 포함된다. 이러한 형태의 이변수 운용방침들의 적용방법, 즉 정의는, 예를 들면, $Min(N, D)$ 운용방침과 $Max(N, D)$은 다음과 같다. $Min(N, T)$ 운용방침이 적용될 경우에는 N 혹은 D 운용방침에 따른 두 조건 중 어느 조건이나 먼저 만족되는 순간 폐쇄된 서비스창구에서 즉시 서비스제공이 재개되어야 하며, $Max(N, D)$ 운용방침이 적용될 경우에는 N 운용방침과 D 운용방침 두 조건 모두가 처음으로 만족될 때 폐쇄된 서비스창구에서 서비스제공이 즉시 재개되어야 한다. 다른 이변수 운용방침도 유사한 의미로 정의된다(Gakis, Rhee, and Sivazlian[3]). 보다 현실적인 관점에서 보면 이변수 운용방침은 단순 운용방침보다는 고객 혹은 server에게 보다 많은 유연성이 부여되어진다는 것은 커다란 장점으로 평가될 수 있으며 또한 더 광범위한 영역에서도 활용될 수 있다.

이러한 이변수 운용방침의 장점에도 불구하고 대기시스템에 추가적으로 유연성을 증가시키고 활용 영역의 다양성을 확보하려는 일환으로 이변수 운용방침과 유사한 형태를 유지하면서 세 가지 단순 운용방침이 모두 결합된 $Min(N, T, D)$ 운용방침과 $Max(N, T, D)$ 운용방침과 같은 삼변수 운용방침(triadic operating policy)이 Rhee and Oh[9, 10]에 의해 제안되었다. $Min(N, T, D)$ 운용방침이 적용되는 경우 서비스를 기다리는 고객이 없어 창구가 폐쇄된 다음 N 혹은 T 혹은 D 운용방침의 세 조건 중 어느 것이나 가장 먼저 만족되는 순간 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 폐쇄된 창구에 복귀하여 기다리는 고객들에게 서비스제공을 재개하여야 한다. 또한 $Max(N, T, D)$ 운용방침이 적용되는 경우 서비스를 기다리는 고객이 없어 창구가 폐쇄된 다음 N과 T와 D 운용방침의 모든 조건이 처음으로 모두 다 만족되는 순간 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 폐쇄된 창구에 복귀하여 기다리는 고객들에게 서비스제공을 재개하여야 한다. 제안된 $Min(N, T, D)$ 운용방침은 고객의 입장에서는 많은 유연성이 확보되어 있지만 대기시스템을 운영하는 입장에서는 그러하지 않을 수 있다. 또한 $Max(N, T, D)$ 운용방침은 대기시스템 운영자에게 지나친 유연성을 제공하지만 서비스를 제공받는

고객의 입장에서는 많은 대기시간을 감수해야하는 불편함이 따른다. 따라서 유연성을 확보하면서 고객과 대기시스템의 운영자의 입장을 동시에 고려할 수 있는 새로운 형태의 삼변수 운용방침이 개발되어 활용되면 효과적일 수 있다.

2. 연구 목적

제안된 $Min(N, T, D)$와 $Max(N, T, D)$ 삼변수 운용방침들은 단순 혹은 이변수 운용방침들 보다는 운용에 따른 많은 유연성이 보장된다는 장점이 있다. 그러나 정의된 구조적인 특징으로 인해 각각의 삼변수 운용방침으로 얻어질 수 있는 이변수 운용방침에 관련된 정보는 제한적일 수 밖에 없다는 단점을 지적할 수 있다. 이러한 상황을 보완하기 위한 방편으로 두 삼변수 운용방침을 결합하는 의미를 갖는 다음과 같은 $Med(N, T, D)$ 삼변수 운용방침이 Rhee[10]에 의해 제안되었다.

$Med(N, T, D)$ 운용방침이 적용될 경우, 대기시스템 내부에 서비스를 받기 위한 고객이 없으면 server는 서비스 창구를 폐쇄하고 다른 업무를 수행한다. 그 후, 서비스를 기다리는 고객수가 N명이 되어야 서비스가 재개되는 N 운용방침의 조건, $mT(m=0, 1, 2, \cdots)$ 단위시간이 경과할 때 최소한 한 명의 고객이 있어야 서비스가 재개되는 T 운용방침의 조건, 그리고 기다리는 모든 고객에게 소요되는 서비스시간의 합이 최초로 규정된 값 D 단위시간보다 커야 서비스가 재개되는 D 운용방침의 조건 중 처음으로 두 가지의 조건이 만족되는 순간 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 서비스창구로 복귀하여 기다리는 고객들에게 서비스를 제공하기 시작하여 다시 고객이 없을 때까지 서비스제공을 계속한다. 만약 $D \to \infty$이면 $Med(N, T, D)$ 운용방침은 $Max(N, T)$ 운용방침과 동일하게 되며, 만약 $D \to 0$이면 $Min(N, T)$과 동일하게 된다. 유사하게, 만약 $N \to \infty$이면 $Max(T, D)$ 운용방침, 만약 $N \to 1$이면 $Min(T, D)$ 운용방침과 각각 동일하게 됨을 알 수 있다. 마지막으로, 만약 $T \to \infty$ 그리고 $T \to 0$이면 $Max(N, D)$ 그리고 $Min(N, D)$ 운용방침과 각각 동일하게 된다. 따라서 조정가능한 $M/G/1$ 대기모형에 이변수$Min(N, T)$, $Max(N, T)$, $Min(T, D)$, $Max(T, D)$, Min $Max(N, D)$ 운용방침과 그리고 삼변수 $Med(N, T, D)$ 운용방침이 적용되었을 때의 busy period 기대값을 각각 $E[B_{Min(N,T)}]$, $E[B_{Max(N,T)}]$, $E[B_{Min(T,D)}]$, $E[B_{Max(T,D)}]$, $E[B_{Min(N,D)}]$, $E[B_{Max(N,D)}]$ 그리고 $E[B_{Med}(N, T, D)]$라고 정의하면 아래와 같은 결과를 얻을 수 있으며 이들의 실제 값은 식 (5)에서 식 (10) 그리고 식 (12)에 각각 주어져있다.

$$\lim_{D\to\infty} E[B_{Med(N,T,D)}] = E[B_{Max(N,T)}]$$

$$\lim_{D\to 0} E[B_{Med(N,T,D)}] = E[B_{Min(N,T)}]$$

$$\lim_{N\to\infty} E[B_{Med(N,T,D)}] = E[B_{Max(T,D)}]$$

$$\lim_{N\to 1} E[B_{Med(N,T,D)}] = E[B_{Min(T,D)}]$$

$$\lim_{T\to\infty} E[B_{Med(N,T,D)}] = E[B_{Max(N,D)}]$$

$$\lim_{T\to 0} E[B_{Med(N,T,D)}] = E[B_{Min(N,D)}]$$

삼변수 $Min(N, T, D)$ 운용방침에는 $Min(N, T)$, $Min(T, D)$와 $Min(N, D)$ 이변수 운용방침이 특수한 경우로 포함되어 있고(Rhee and Oh[8]) 또한 삼변수 $Max(N, T, D)$ 운용방침에는 $Max(N, T)$, $Max(T, D)$와 $Max(N, D)$ 이변수 운용방침이 특수한 경우로 포함되어 있는 것(Rhee and Oh[7])과는 달리 삼변수 $Med(N, T, D)$ 운용방침에는 $Min(N, T, D)$와 $Max(N, T, D)$ 운용방침에 포함되어 있는 모든 이변수 운용방침을 특수한 경우로 포함하고 있기 때문에 가장 일반화된 삼변수 운용방침이라고 할 수 있다[10].

그러나 이러한 가장 일반화 된 삼변수 $Med(N, T, D)$ 운용방침은 운용방침에 포함된 각각의 변수가 특수한 값을 취했을 경우 이변수 혹은 단순 운용방침이 적용되었을 때의 busy period 기대값을 도출할 수는 있었지만 어떠한 요소들로 구성되어 있는지에 관해서는 잘 알려져 있지 않다. 따라서 가장 일반화된 $Med(N, T, D)$이 적용되었을 때의 busy period 기대값이 실제로 어떠한 단순, 이변수 그리고 삼변수 운용방침들과 직접적인 연관성을 가지며 구성되어 있는지를 규명하여 다른 운용방침들과의 관계를 확립함을 연구의 목적으로 설정한다.

3. 대기모형의 정의

안정상태(steady-state)의 조건을 만족하고 있는 일반적인 $M/G/1$ 대기모형에 관하여 다음과 같은 사항을 가정한다.

(i) 서비스를 받기 위해 대기시스템에 도착하는 고객수는 단위시간당 평균이 λ인 포아손과정(Poisson process)에 따른다. 다시 말해, 연속된 두 고객의 평균 도착시간간격은 $1/\lambda$이다. 즉 t단위시간 동안 시스템에 도착하는 고객의 수를 나타내는 확률변수를 $N(t)$라고 하면, $n=0, 1, 2, \cdots$에 대해 $N(t)$의 확률질량함수(probability mass function)는 다음과 같이 주어진다.

$$P[N(t)=n]=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \tag{1}$$

또한 식 (1)을 사용하여 $H_n(t)$를 다음과 같이 정의한다.

$$H_n(T)=P[N(T)\geq n]=\sum_{j=n}^{\infty}\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^j}{j!} \tag{2}$$

(ii) i번째 고객에게 소요되는 서비스시간을 나타내는 확률변수를 S_i라고 정의하며 S_i는 평균이 $1/\mu$인 상호 독립이며 동일한 임의의 분포라고 가정한다. S_i의 공통 확률밀도함수(probability density function)를 $f_S(\cdot)$로 표시하며 또한 $G^{(n)}(D)$를 다음과 같이 정의한다.

$$G^{(n)}(D)=\int_0^D [f_S(t)]^{*(n)}dt \tag{3}$$

여기에서 $[f_S(t)]^{*(n)}$은 $f_S(\cdot)$의 n차 중첩(n-fold convolution)을 뜻한다.

(iii) B_o : 일반적인 $M/G/1$ 대기모형의 busy period를 나타내는 확률변수로 정의한다. B_o의 기대값을 $E[B_o]$라고 하면 $E[B_o]$는 다음과 같이 주어진다[8, 3, 7, 12].

$$E[B_o]=\frac{1}{\mu(1-\lambda/\mu)} \tag{4}$$

(iv) 기타 여기에서 정의되지 않은 사항들은 일반적인 $M/G/1$ 대기모형의 가정에 따른다.

조정가능한 $M/G/1$ 대기모형에 이변수 운용방침 $Min(N,T)$, $Min(T,D)$, $Min(N,D)$, $Max(N,T)$, $Max(T,D)$ $Max(T,D)$와 $Max(N,D)$이 적용되었을 때 busy period의 기대값들은 다음과 같이 주어진다[3, 7].

$$E[B_{Min(N,T)}]=\frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N}H_n(T) \tag{5}$$

$$E[B_{Min(N,D)}]=E[B_O]\sum_{n=1}^{N}G^{(n-1)}(D) \tag{6}$$

$$E[B_{Min(T,D)}]=\frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{\infty}H_n(T)\;G^{(n-1)}(D) \tag{7}$$

$$E[B_{Max(N,T)}]=N\,E[B_o]+\frac{\lambda TE[B_o]}{1-e^{-\lambda T}}-\frac{E[B_o]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N}H_n(T) \tag{8}$$

$$E[B_{Max(N,D)}]=E[B_o]\left\{N+\sum_{n=N+1}^{\infty}G^{(n-1)}(D)\right\} \tag{9}$$

$$E[B_{Max(T,D)}]=\frac{E[B_o]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{\infty}[H_n(T)+\{H_1(T)-H_n(T)\}G^{(n-1)}(D)] \tag{10}$$

또한 삼변수 $Min(N,T,D)$ 운용방침이 적용되었을 때의 busy period 기대값을 $E[B_{Min(N,T,D)}]$라고 하면 $E[B_{Min(N,T,D)}]$는 다음과 같이 주어진다[8].

$$E[B_{Min(N,T,D)}]=\frac{E[B_o]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N}H_n(T)\,G^{(n-1)}(D) \tag{11}$$

4. *Med(N, T, D)* 운용방침의 분석

가장 일반화된 $Med(N,T,D)$ 삼변수 운용방침이 적용되는 조정가능한 $M/G/1$ 대기모형에서의 busy period 기대값, $E[B_{Med(N,T,D)}]$는 다음과 같이 주어진다[10].

$$E[B_{Med(N,T,D)}]=\frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\left\{\sum_{n=1}^{N}H_n(T)+\sum_{n=N+1}^{\infty}H_n(T)G^{(n-1)}(D)+\sum_{n=1}^{N}[H_1(T)-H_n(T)]G^{(n-1)}(D)\right\} \tag{12}$$

따라서 식 (12)의 우변을 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}E[B_{Med(N,T,D)}]&=\frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N}H_n(T)\\&+\frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=N+1}^{\infty}H_n(T)G^{(n-1)}(D)\\&+\frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N}H_1(T)G^{(n-1)}(D)\\&-\frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N}H_n(T)G^{(n-1)}(D)\end{aligned} \tag{13}$$

식 (13)의 우변을 구성하고 있는 네 개의 항을 하나씩 분석하여 다른 운용방침들과 어떠한 연관성이 있는지를 파악한 다음, 우변 전체 즉, $E[B_{Med(N,T,D)}]$가 어떠한 요소들로 구성되어 있는지를 도출하기로 한다.

(i) $\dfrac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}H_n(T)$

식 (13)에서 주어진 $E[B_{Med(N,T,D)}]$을 구성하고 있는 첫 번째항 $\frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N}H_n(T)$는 관계식 (9)으로부터 다

음과 같은 관계가 성립함을 확인할 수 있다.

$$\frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N} H_n(T) = E[B_{Min(N,T)}] \tag{14}$$

(ii) $\frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=N+1}^{\infty} H_n(T)\,G^{(n-1)}(D)$

식 (13)에 주어진 $E[B_{Med(N,T,D)}]$을 구성하고 있는 두 번째항 $\frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=N+1}^{\infty} H_n(T)\,G^{(n-1)}(D)$은 아래와 같이 표현됨을 확인할 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned}
&\frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=N+1}^{\infty} H_n(T)\,G^{(n-1)}(D) = \\
&\frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} H_n(T)\,G^{(n-1)}(D) - \sum_{n=1}^{N} H_n(T)\,G^{(n-1)}(D)\right\} \\
&\quad = \frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{\infty} H_n(T)\,G^{(n-1)}(D) \\
&\quad - \frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N} H_n(T)\,G^{(n-1)}(D)
\end{aligned} \tag{15}$$

식 (15)와 식 (7)과 식 (11)에서 주어진 결과를 사용하면 다음과 같은 관계식을 설정할 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=N+1}^{\infty} H_n(T)\,G^{(n-1)}(D) \\
&= E[B_{Min(T,D)}] - E[B_{Min(N,T,D)}]
\end{aligned} \tag{16}$$

(iii) $\frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N} H_1(T)\,G^{(n-1)}(D)$

식 (13)에서 주어진 $E[B_{Med(N,T,D)}]$을 구성하고 있는 세 번째항 $\frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N} H_1(T)\,G^{(n-1)}(D)$을 분석하기 위해서는 항에 포함된 $H_1(T)$의 값을 유도할 필요가 있다. 따라서 식 (2)에서 주어진 $H_n(T)$를 사용하면 $H_1(T)$는 다음과 같은 값을 갖는다.

$$\begin{aligned}
H_1(T) &= P[N(T) \ge 1] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!} \\
&= 1-P[N(T)=0] = 1-e^{-\lambda T}
\end{aligned} \tag{17}$$

식 (17)에서 주어진 $H_1(T)$의 값을 식 (13)의 세 번째 항에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N} H_1(T)\,G^{(n-1)}(D) \\
&\quad = \frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N}(1-e^{-\lambda T})\,G^{(n-1)}(D) \\
&\quad = E[B_O]\sum_{n=1}^{N} G^{(n-1)}(D)
\end{aligned} \tag{18}$$

식 (6)에서 주어진 결과를 사용하면 식 (18)은 다음과 같은 관계를 형성한다.

$$\frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N} H_1(T)\,G^{(n-1)}(D) = E[B_{Min(N,D)}] \tag{19}$$

(iv) $\frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N} H_n(T)\,G^{(n-1)}(D)$

식 (13)에서 주어진 $E[B_{Med(N,T,D)}]$을 구성하고 있는 네 번째항 $\frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N} H_n(T)\,G^{(n-1)}(D)$는 식 (11)에서 주어진 결과와 동일하다. 즉,

$$\frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N} H_n(T)\,G^{(n-1)}(D) = E[B_{Min(N,T,D)}] \tag{20}$$

여기에서 $E[B_O]$는 일반적인 *M/G/1* 대기모형의 busy period의 기대값을 나타내며 식 (4)에 주어져 있고 $H_n(T)$와 $G^{(n)}(D)$는 식 (2)과 식 (3)에 각각 정의되어 있다.

식 (17)~식 (19) 그리고 식 (20)에서 유도된 결과를 식 (13)에 대입하면 다음과 같은 관계식을 구축할 수 있다.

$$\begin{aligned}
E[B_{Med(N,T,D)}] &= E[B_{Min(N,T)}] + E[B_{Min(T,D)}] \\
&- E[B_{Min(N,T,D)}] + E[B_{Min(N,D)}] \\
&- E[B_{Min(N,T,D)}]
\end{aligned}$$

위의 식을 간단히 하면, 가장 일반화된 삼변수 *Med* (*N, T, D*) 운용방침이 적용되었을 때의 busy period 기대값은 다음과 같이 다른 형태의 삼변수 운용방침과 여러 개의 이변수 운용방침들이 적용되었을 때의 busy period 기대값들로 구성되어 있음을 확인할 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned}
E[B_{Med(N,T,D)}] &= E[B_{Min(N,T)}] + E[B_{Min(T,D)}] \\
&+ E[B_{Min(N,D)}] - 2E[B_{Min(N,T,D)}]
\end{aligned} \tag{21}$$

또한 아래와 같은 이변수 운용방침들이 적용되었을 때의 busy period 기대값들 사이의 관계식[11]들을 사용

하면 또 다른 형태의 관계식, 즉 단순운용방침, 이변수 운용방침 그리고 다른 형태의 삼변수 운용방침이 적용되었을 때의 busy period 기대값으로도 표현이 가능함을 확인할 수 있다. 즉,

$$E[B_{Min(N,T)}]+E[B_{Max(N,T)}]=E[B_N]+E[B_T]$$
$$E[B_{Min(N,D)}]+E[B_{Max(N,D)}]=E[B_N]+E[B_D]$$
$$E[B_{Min(T,D)}]+E[B_{Max(T,D)}]=E[B_T]+E[B_D]$$

여기에서 $E[B_N]$, $E[B_T]$ 그리고 $E[B_D]$는 조정가능한 $M/G/1$ 대기모형에 단순 N, T 그리고 D 운용방침이 적용되었을 때의 busy period 기대값을 나타내며 다음과 같이 주어진다[3, 12].

$$E[B_N]=N[B_0]$$
$$E[B_T]=\frac{\lambda T E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}$$
$$E[B_D]=E[B_0]\sum_{n=1}^{\infty}G^{(n-1)}(D)$$

따라서 식 (21)에서 주어진 $E[B_{Med}(N,T,D)]$는 다음과 같은 다른 형태의 관계식을 만족함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}E[B_{Med(N,T,D)}] &= E[B_N]+E[B_T]-E[B_{Max(N,T)}]+E[B_N]\\ &\quad +E[B_D]-E[B_{Max(N,D)}]+E[B_T]+E[B_D]\\ &\quad -E[B_{Max(T,D)}]-2E[B_{Min(N,T,D)}]\\ &=2\{E[B_N]+E[B_T]+E[B_D]\}\\ &\quad -\{E[B_{Max(N,T)}]+E[B_{Max(N,D)}]+E[B_{Max(T,D)}]\}\\ &\quad -2E[B_{Min(N,T,D)}]\end{aligned} \tag{22}$$

마지막으로 Rhee[11]가 유도한 삼변수 $Min(N,T,D)$와 $Max(N,T,D)$ 운용방침이 적용되었을 때의 busy period 기대값과의 관계식을 사용하면 $E[B_{Med}(N,T,D)]$는 또 다른 형태로 표현이 가능해진다. 즉,

$$\begin{aligned}E[B_{Max(N,T,D)}] &= -\{E[B_N]+E[B_T]+E[B_D]\}\\ &\quad +E[B_{Max(N,T)}]+E[B_{Max(N,D)}]\\ &\quad +E[B_{Max(T,D)}]+2E[B_{Min(N,T,D)}]\end{aligned} \tag{23}$$

식 (23)을 사용하여 $-2E[B_{Min(N,T,D)}]$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}-2E[B_{Min(N,T,D)}] &= -\{E[B_N]+E[B_T]+E[B_D]\}\\ &\quad +E[B_{Max(N,T)}]+E[B_{Max(N,D)}]\\ &\quad +E[B_{Max(T,D)}]-E[B_{Max(N,T,D)}]\end{aligned} \tag{24}$$

식 (24)에서 주어진 $-2E[B_{Min(N,T,D)}]$를 식 (22)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}E[B_{Med(N,T,D)}] &= 2\{E[B_N]+E[B_T]+E[B_D]\}\\ &\quad -\{E[B_{Max(N,T)}]+E[B_{Max(N,D)}]+E[B_{Max(T,D)}]\}\\ &\quad -\{E[B_N]+E[B_T]+E[B_D]\}+E[B_{Max(N,T)}]\\ &\quad +E[B_{Max(N,D)}]+E[B_{Max(T,D)}]-E[B_{Max(N,T,D)}]\\ &= E[B_N]+E[B_T]+E[B_D]-E[B_{Max(N,T,D)}]\end{aligned} \tag{25}$$

가장 일반화된 삼변수 $Med(N,T,D)$ 운용방침이 적용되었을 때의 busy period 기대값 $E[B_{Med(N,T,D)}]$는 식 (21), 식 (22) 그리고 식 (25)에서 주어지듯이 모든 단순, 이변수 그리고 삼변수 운용방침과의 밀접한 관계가 있음을 확인하였다.

5. 결 론

새로운 형태의 삼변수 운용방침 $Med(N,T,D)$이 적용되는 조정가능한 $M/G/1$ 대기모형의 busy period 기대값은 다른 형태의 삼변수 운용방침과 모든 형태의 이변수 그리고 단순 운용방침들이 적용되었을 때의 기대값으로 구성되어 있음을 확인하였다. 유도된 다양한 형태의 관계식에 기초하면 $Med(N,T,D)$ 운용방침이 가장 일반화된 운용방침이라는 사실을 확인하였다. 또한 유도된 관계식을 활용하면 모든 삼변수, 이변수 그리고 단순 운용방침이 적용되었을 때의 busy period 기대값을 사용하여 $Med(N,T,D)$ 운용방침이 적용되었을 때의 busy period 기대값을 유도할 수 있음을 또한 확인하였다. 이는 제한된 삼변수, 이변수 혹은 단순 운용방침에 따른 busy period 기대값만이 획득가능한 상황이 발생되더라도 이들의 결과를 활용하면 직접적인 정보의 수집이 불가능한 운용방침이 적용되어야 하는 상황에 따른 문제의 해결 가능성이 있음을 확인하였다. 이러한 절차와 유도된 관계식을 활용하면 조정가능한 대기모형에 다양한 형태의 운용방침이 적용되더라도 이미 확보된 정보를 활용하여 필요한 정보를 도출할 수 있는 가능성을 확인하였을 뿐만 아니라 다른 시스템 특성치의 유도에도 활용할 수 있는 가능성을 제시하였다.

참고문헌

[1] Balachandran, K. R. and Tijms, H.; "On the D-policy for the *M/G/1* Queue," *Management Science*, 9 : 1073-1076, 1975.

[2] Conolly, B.; Lecture Notes on Queueing Systems,

Halsted, NY, 1975.

[3] Gakis, K. G., Rhee, H. K., and Sivazlian, B. D.; "Distributions and First Moments of the Busy and Idle Periods in Controllable *M/G/1* Queueing Models with Simple and Dyadic Policies," *Stochastic Analysis and Applications*, 13(1) : 47-81, 1995.

[4] Heyman, D.; "The T-policy for the *M/G/1* Queue," *Management Science*, 23(7) : 775-778, 1977.

[5] Kella, O.; "The Threshold Policy in the *M/G/1* Queue with Server Vacations," *Naval Research Logistics*, 36 : 111-123, 1989.

[6] Kleinrock, L.; *Queueing Systems*, 1 : Theory, John Wiley and Sons, New York, NY, 1975.

[7] Rhee, H. K. and Oh, H. S.; "가상확률밀도함수를 사용하여 $Max(N, T, D)$ 운용방침이 적용되는 조정가능한 *M/G/1* 대기모형의 busy period의 기대값 유도", 한국산업경영시스템학회지, 31(4) : 86-92, 2008.

[8] Rhee, H. K. and Oh, H. S.; "삼변수 운용방침이 적용되는 *M/G/1* 대기모형에서 가상확률밀도함수를 이용한 busy period의 기대값 유도", 한국산업경영시스템학회지, 30(2) : 51-57, 2007.

[9] Rhee, H. K. and Sivazlian, B. D.; "Distribution of the Busy Period in a Controllable *M/M/2* Queue Operating under the Triadic (0, K, N, M) Policy," *Journal of Applied Probability*, 27 : 425-432, 1990.

[10] Rhee, H. K.; "가장 일반화된 삼변수 운용방침 개발과 그에 따른 busy period 기대값 유도", 한국산업경영시스템학회지, 32(4) : 161-168, 2009.

[11] Rhee, H. K.; "Busy Period 기대값을 사용하여 삼변수 $Min(N, T, D)$와 $Max(N, T, D)$ 운용방침사이의 관계식 설정", 한국산업경영시스템학회지, 33(3) : 63-70, 2010.

[12] Rhee, H. K.; "Development of a New Methodology to find the Expected Busy Period for Controllable *M/G/1* Queueing Models Operating under the Multivariable Operating Policies : Concepts and Application to the Dyadic Policies," 대한산업공학회지, 23(4) : 729-739, 1997.

[13] Teghem, J.; "Control of the Service Process in a Queueing System," *European Journal of Operational Research*, 23 : 141-158, 1986.

[14] Yadin, M. and Naor, P.; "Queueing System with Removable Service Station," *Operational Research Quarterly*, 14, 393-405, 1963.