다변수 되먹임 제어기의 요구 조건

■ 강 태 삼
(건국대학교 항공우주정보시스템공학과)

다변수 입출력 제어시스템에서 제어기를 설계하기 위해서는 단일 입출력 시스템에서와 마찬가지로 저주파수영역에서는 루프전달행렬의 크기가 작은 것이 요구되고, 측정잡음 및 플랜트의 불확실성이 존재하는 고주파수 영역에서는 루프전달행렬의 크기가 작게 되도록하여, 잡음의 영향이 출력에 적게 나타나고, 제어기가 포화되지 않도록 하며, 설계된 제어기가 플랜트 모델의 불확실성을 극복할 수 있게 하는 것이 필요하다. 본 원고에서는 각 전달 행렬들의 특이치의 최대 및 최소값들을 이용하여 다변수 제어기가 갖추어야 할 조건들을 정리하였다.

1. 표준 되먹임 제어 시스템의 입출력 관계

일반적으로 제어기는 오차를 0으로 만들거나 주어진 명령을 잘 따라가도록 하기 위해 설계된다.

제어기의 성능을 평가하기 위한 요소로는 대역폭, 반응속도, 오버슈트, 정상상태 오차, 안정도의 강인성 등이 고려 대상이다.

이를 위하여 루프 전달함수의 이득을 유지하면서,안정성을 가지도록 설계하는 것이 중요하다. 본 원고에서는 MIMO (Multi-Input Multi-Output) 시스템에서 루프 전달함수가 가져야 할 특징과, 이를 구현하기 위한 방법을 살펴본다.

그림 1은 표준 되먹임 제어시스템의 구조를 보여주고 있다. 이때, 입력 루프 전달 행렬(input loop transfer matrix) L_i 와 출력 전달행렬(output loop transfer matrix) L_o는 각각 다음과 같이 정의된다 :

$$L_i = KG, \quad L_o = GK.$$

여기서 입력 루프 전달행렬은 루프를 입력단(u)에서 끊었을 때 얻어지는 루프 전달행렬이며, 출력 루프전달행렬는 루프를 출력단(y)에서 끊었을 때 얻어지는 루프 전달행렬이다. 이를 이용하여 입력감도행렬과 출력감도행렬을 다음과 같이 정의한다 :

$$S_i = \left(I + L_i\right)^{-1}, \quad S_o = \left(I + L_o\right)^{-1}$$

그리고 입력 상보감도행렬 (input complementary sensitivity matrix) 및 출력상보감도행렬은 다음과 같이 정의된다.

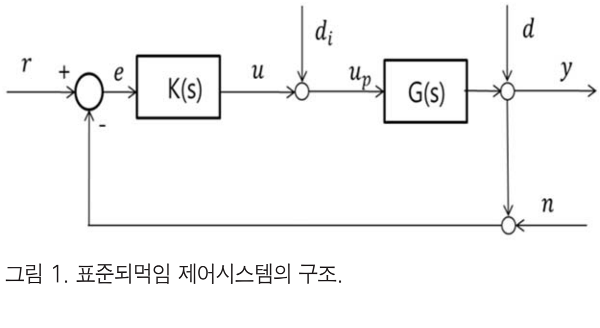

그림 1. 표준되먹임 제어시스템의 구조.

$$T_i = I - S_i, \quad T_o = I - S_o$$

이때, 내부적으로 안정된 시스템에서 다음과 같은 식이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$y = T_o(r-n) + S_oGd_i + S_od \tag{1}$$

$$r - y = e = S_o(r-d) + T_on - S_oGd_i \tag{2}$$

$$u = KS_o(r-n-d) - T_id_i \tag{3}$$

$$u_P = KS_o(r-n) - KS_od + S_id_i \tag{4}$$

2. 제어기가 갖추어야 하는 일반적 요구 조건

(1)~(4)는 되먹임 제어 시스템에 내재하는 의 근원적인 장점과 설계 목표들을 보여 준다. 즉, (1)은 입력 교란 d_i 및 출력 교란 d의 영향이 출력에 적게 나타나게 하기 위해서는 출력 감도 행렬 S_o가 작아야 함을 알 수 있다. 또한 (4)에서 입력 교란의 영향이 제어 입력 u에 영향을 덜 미치게 하기 위해서는 입력 감도 행렬 S_i의 크기가 작도록 하면 됨을 알 수 있다.

그런데 여기서 입력 감도 행렬, 출력 감도 행렬 등은 모두 행렬이므로 그 크기를 비교하기 위해서 보통 최대 특이치 ($\bar{\sigma}$) 및 최소 특이치($\underline{\sigma}$)를 이용한다.

이때, 출력 y에서 출력 교란 d의 영향을 줄이기 위해서는 $\bar{\sigma}(S_o)$가 작게, 즉,

$$\bar{\sigma}(S_o) = \bar{\sigma}\left((I+GK)^{-1}\right) = \frac{1}{\underline{\sigma}(I+GK)} \ll 1 \tag{5}$$

이 성립되어야 하고, 출력 y에서 입력 교란 d_i의 영향을 줄이기 위해서는 $\bar{\sigma}(S_oG)$가 작게, 즉,

$$\bar{\sigma}(S_oG) = \bar{\sigma}\left((I+GK)^{-1}G\right) = \bar{\sigma}(GS_i) \ll 1 \tag{6}$$

이 성립되어야 한다.

또한, 플랜트 입력 u_p에서 교란 제거(rejection)를 위해서, 플랜트 입력 단에서의 입력 교란 d_i의 영향을 줄이기 위해서는

$$\bar{\sigma}(S_i) = \bar{\sigma}\left((I+KG)^{-1}\right) = \frac{1}{\underline{\sigma}(I+KG)} \ll 1 \tag{7}$$

이 성립되어야 하고, 플랜트 출력 단에서의 출력 교란 d의 영향을 줄이기 위해서는

$$\bar{\sigma}(S_iK) = \bar{\sigma}\left(K(I+KG)^{-1}\right) = \bar{\sigma}(KS_o) \ll 1 \tag{8}$$

이 성립되어야 하는데, 특히 대부분의 교란 d 및 d_i가 유효하게 존재하는 저주파 영역에서 작게 유지되는 것이 필요하다.

특이치 관련 부등식을 활용하면, $\underline{\sigma}(GK) > 1$일때,

$$\frac{1}{1+\underline{\sigma}(GK)} \le \bar{\sigma}(S_o) \le= \frac{1}{\underline{\sigma}(GK)-1}$$

이 성립하고, $\underline{\sigma}(KG) > 1$일 때,

$$\frac{1}{1+\underline{\sigma}(KG)} \le \bar{\sigma}(S_i) \le= \frac{1}{\underline{\sigma}(KG)-1}$$

이 성립한다. 따라서, 이때, 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\bar{\sigma}(S_o) \ll 1 \Leftrightarrow \underline{\sigma}(GK) \gg 1 \tag{9}$$

$$\bar{\sigma}(S_i) \ll 1 \Leftrightarrow \underline{\sigma}(KG) \gg 1 \tag{10}$$

G와 K의 역행렬이 존재한다고 가정하면,

$$\underline{\sigma}(GK) \gg 1 \text{ 또는 } \underline{\sigma}(KG) \gg 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\bar{\sigma}(S_oG) = \bar{\sigma}\left((I+GK)^{-1}G\right) \approx \bar{\sigma}(K^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(K)} \tag{11}$$

$$\bar{\sigma}(KS_o) = \bar{\sigma}\left(K(I+GK)^{-1}\right) \approx \bar{\sigma}(P^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(P)} \tag{12}$$

따라서 출력 y에서의 좋은 성능을 위해서는 (5) 및 (9)에서, 출력 교란 d의 영향을 줄이기 위해서는 d가 유효하게 큰 값을 가지는 주파수 범위에서 다음이 만족되어야 하고,

$$\underline{\sigma}(L_o) = \underline{\sigma}(GK) \gg 1 \tag{13}$$

입력 교란 d_i의 영향을 줄이기 위해서는 (6) 및 (11)에서 d_i가 유효하게 큰 값을 가지는 주파수 범위에서 다음이 만족되어야 한다.

$$\underline{\sigma}(K) \gg 1 \tag{14}$$

같은 논리로 보면, 플랜트 입력 u_P에서 좋은 성능을 위해서는, d_i가 유효하게 큰 값을 가지는 주파수 범위에서는 (7) 과 (10)에서,

$$\underline{\sigma}(L_i) = \underline{\sigma}(KG) \gg 1 \tag{15}$$

이 성립해야 하고, 출력 교란 d가 유효하게 큰 값을 가지는 주파수 범위에서는 (8)과 (12)에서

$$\underline{\sigma}(G) \gg 1 \tag{16}$$

이 유지되어야 함을 알 수 있다. 그런데 (16)에서 플랜트 G는 고정된 것이므로, 제어기의 설계를 통하여 바꿀 수 없음을 유의할 필요가 있다. 즉, 출력 교란 d가 입력 u_p에 영향을 덜 주기 위해서는 플랜트 자체의 이득이 커야 하며, 제어기로는 변경할 수 없다.

3. 안정도 강인성을 위한 요구 조건

제어기 설계에 있어서 간과하기 쉬운 것이, 플랜트에는 항상 상당한 정도의 불확실성이 존재한다는 것이다. 이 불확실성은 플랜트 자체가 시간이 지남에 따라 변하는 경우가 있고, 또 시스템 자체의 복잡성으로 인해 각 패러미터를 세밀하게 계산할 수 없음으로 인해서 생기는 경우도 있고, 비선형 항을 선형으로 근사화하는 과정에서, 또는 고차의 시스템을 저차의 시스템으로 근사화하는 과정 등에서도 생겨나며, 바람이나 온도 등 주변 환경의 변화에 의해서도 생겨난다. 따라서 이러한 불확실성을 고려하지 않고 제어기를 설계하면 성능뿐 아니라 안정성 자체가 유지 되지 않는 경우도 많이 발생한다. 시뮬레이션에서는 잘 동작하는데, 실제 제어기로 구현해서 실험할 때는 잘 동작하지 않고, 여러 패러미터를 재 튜닝해야 되는 경우가 자주 있는데, 이것은 이러한 플랜트 자체의 불확실성을 고려하지 않고 제어기를 설계하였기 때문에 생기는 것이다.

플랜트 G가 $G(I+\Delta)$로 변했을 때를 고려하자. 여기서 불확실성 Δ는 안정하고, 기준 플랜트 G도 안정하다고 가정한다. 이때 변화된 플랜트의 폐루프 시스템은 다음 식이 우측 반평면에 영점을 갖지 않으면 된다.

$$\det\left(I+(I+\Delta)GK\right) = \det(I+GK)\det\left(I+\Delta T_o\right) \tag{17}$$

이를 위해서는 $\det\left(I+\Delta T_o\right)$가 우측 반평면에 영점을 갖지 않으면 되고, 이는 $\|\Delta T_o\|$이 작거나 또는 Δ가 크게 유지되는 영역에서 $\overline{\sigma}(T_o)$의 크기가 작게 유지되면 된다. $\overline{\sigma}(T_o)$의 크기는 대체로 폐루프 시스템이 감내할 수 있는 $\|\Delta\|$의 크기에 반비례하므로, 불확실성이 예상되는 영역에서 $\overline{\sigma}(T_o)$의 크기가 1에 비하여 클수록 안정성의 강인도는 떨어진다. 대개 또는 Δ가 크게 유지되는 영역은 고주파 영역이고, 따라서 이 영역에서 $\overline{\sigma}(T_o)$를 작게 하면 되고 이는 Δ가 크게 유지되는 고주파 영역 에서 $\overline{\sigma}(L_o)$를 작게 함으로 이루어진다.

4. 센서 잡음 감쇄를 위한 요구 조건

센서 잡음 (n)이 출력에 미치는 영향을 줄이기 위해서는 (1)에서 알 수 있듯이, $\|T_o\|$를 작게하여야 한다. 그런데 (1)에서 교란의 영향을 작게하기 위해서는 $\|S_o\|$의 크기를 작게 하여야 하며, 이는 서로 양립할 수 없다. 이는 $S_o + T_o = I$가 항상 성립하며, $\|S_o\|$와 $\|T_o\|$중 하나가 작아지면 다른 하나는 커져야 하기 때문이다.

특히 높은 주파수 영역에서 $\underline{\sigma}\left(L_o(j\omega)\right)$를 크게 유지하면 $\|S_o\| \ll 1$이되고 $T_o \approx I$가 되며, 따라서 (1)식은

$$y = T_o(r-n) + S_O G d_i + S_O d \approx r-n \tag{18}$$

이 되어 폐루프 시스템은 잡음을 그대로 식은 그대로 출력에 영향을 미침을 알 수 있다.

특히, 플래트 G의 대역폭보다 너 높은 주파수 영역에서 루프 이득을 크게 유지하려면, 즉, $\overline{\sigma}\left(G(j\omega)\right) \ll 1$일 때, $\underline{\sigma}\left(L_o(j\omega)\right) \gg 1$ 또는 $\underline{\sigma}\left(L_i(j\omega)\right) \gg 1$가 되도록 하면, (3)에서

$$\begin{aligned} u &= KS_o(r-n-d) - T_i d_i \\ &= S_i KS(r-n-d) - T_i d_i \\ &\approx G^{-1}(r-n-d) - d_i \end{aligned} \tag{19}$$

가 되어, 제어 입력 u가 매우 커져서 제어기의 포화를 야기할 수 있다. 즉, 제어시스템의 대역폭이 플랜트 G 자체의 대역폭보다 클 경우센서 잡음과 출력 교란은 크게 증폭되어 제어기를 포화시킨다.

비슷한 이유로, 루프 이득이 작을 경우 즉, $\overline{\sigma}\left(L_o(j\omega)\right) \ll 1$ 또는 $\overline{\sigma}\left(L_i(j\omega)\right) \ll 1$일 경우, $\overline{\sigma}(K)$는 너무 크지 않도록 해야 한다. 이는 (3) 이

$$u = KS_O(r-n-d) \approx K(r-n-d) \tag{20}$$

와 같이 근사화될 수 있고, 따라서 잡음과 출력 교란이 바로 제어기의 이득에 곱해져서 출력으로 나타나기 때문이다. 이런 이유로 루프 이득이 작을 경우에는 $\overline{\sigma}(K)$가 너무 크지 않도록 하는 것이 유리하다.

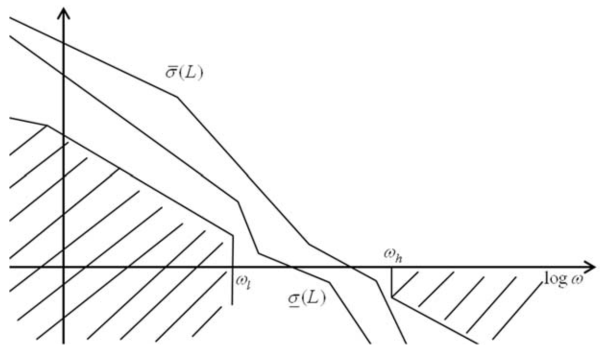

그림 2. 바람직한 루프 이득범위.

5. 좋은 제어기의 요구 조건 요약

이상에서 다음과 같은 결과를 요약할 수 있다. 즉, (1)좋은 성능을 얻기 위해서는 시스템의 동작 영역, 특히 $(0,\omega_l)$로 주어지는 저주파 영역에서

$$\underline{\sigma}(GK) \gg 1,\ \underline{\sigma}(KG) \gg 1,\ \underline{\sigma}(K) \gg 1 \tag{21}$$

이 만족되어야 하고, (2) 센서 잡음을 효과적으로 억제하고 플랜트의 불확실성 Δ에 대하여 안정성이 강인하게 유지되도록 하기 위해서는 너무 크지 않은 M에 대하여, 불확실성과 센서 잡음이 주로 존재하는 높은 주파수 영역 (ω_h,∞)에서 다음이 성립하면 된다.

$$\overline{\sigma}(GK) \ll 1,\ \overline{\sigma}(KG) \ll 1,\ \overline{\sigma}(K) \ll M \tag{22}$$

이것을 그림으로 요약하면 그림 2와 같다.

6. 실제 제어 시스템 설계시의 예

다음은 소형 무인 헬리콥터에서 롤과 피치 자세를 영 상태로 제어하기 위한 선형 모델이다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{23}$$

여기서,

$$x = \left[q\ \ \theta\ \ a_{1s}\ \ p\ \ r\ \ \phi\ \ b_{1s}\right]^T$$
$$u = \left[\delta_{long}\ \ \delta_{lat}\right]^T,$$
$$y = \left[q\ \ \theta\ \ p\ \ r\ \ \phi\right]^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 102.12 & 0 & 0 & 0 & 42.129 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -12.51 & 0 & 0 & 0 & -5.11 \\ 0 & 0 & -1.2862 & 0 & 0 & 0 & 113.64 \\ 0 & 0 & 0 & -0.54558 & -6.1743 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.422 & -1 & 0 & 0 & -12.396 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -11.694 & 3.7466 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2.3852 & 11.383 \end{bmatrix}$$

이때, 동적 제어기를 다음과 같이 설계하였다고 가정 하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= A_k x_k(t) + B_k y(t) \\ u(t) &= C_k x(t) \end{aligned} \tag{24}$$

여기서,

$$A_k = \begin{bmatrix} -12 & 11 & -66 & -252 & -50 & -65 & 5 \\ 10 & -47 & -5 & 191 & -245 & -22 & 45 \\ -60 & 28 & -378 & -1213 & -510 & -442 & 66 \\ -59 & 37 & -323 & -1439 & -442 & -363 & -94 \\ -6 & -35 & -118 & -141 & -494 & -295 & -12 \\ -9 & 32 & -18 & -192 & 87 & -60 & -55 \\ 2 & 3 & 24 & 63 & 57 & 28 & -10 \end{bmatrix},$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 3.4 & -5.93 & 0.11 & 15.8 & -22.5 \\ 5.56 & 8.94 & -0.14 & 18.9 & 20 \\ 24.7 & -18.9 & 0.2 & 35.1 & -27.9 \\ 25.8 & -40.2 & 0.41 & 38.6 & -47.4 \\ 23.5 & 6.66 & -0.02 & 21.2 & 2.51 \\ 3.04 & -4.67 & 0.02 & 4.01 & -5.97 \\ -1.28 & -0.09 & 0.03 & -1.50 & 0.29 \end{bmatrix},$$

이때, 플랜트 및 제어기의 최대 및 최소 특이치 들은 그림 3과 같이 주어진다. 여기서 보면 플랜트 자체의 대역은 약 90 rad/sec 정도이고, 제어기가 추가된 시스템의 대역폭도 비슷한

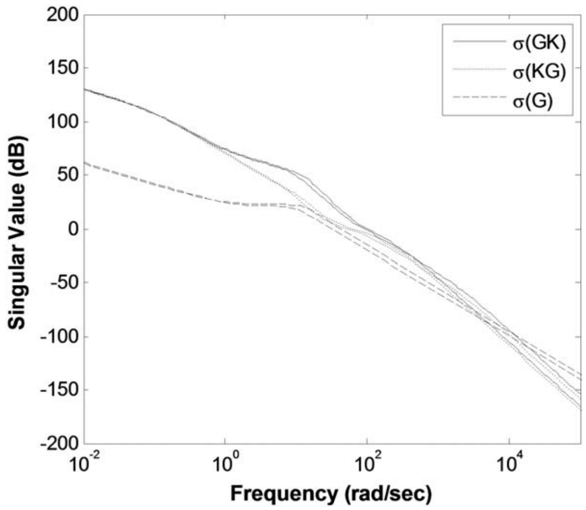

그림 3. 바람직한 루프 이득범위.

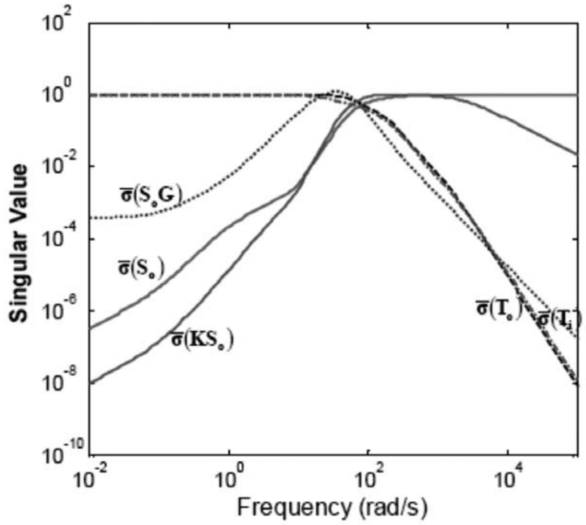

그림 4. 바람직한 루프 이득범위.

값을 가짐을 알 수 있다.

그리고 약 30 rad/sec 까지는 $\underline{\sigma}(GK) \gg 1$, $\underline{\sigma}(KG) \gg 1$이며, 그림에는 나타나지 않았지만 $\underline{\sigma}(K) \gg 1$이므로 추적 성능이 0~30 rad/sec 범위에서는 잘 유지 될 것을 예측할 수 있다.

또한 200 rad/sec 이상의 범위에서는 $\bar{\sigma}(GK) \ll 1$, $\bar{\sigma}(KG) \ll 1$가 유지되며, 또한 그림에는 나타나지 않았지만 $\bar{\sigma}(K) \ll M$이 유지된다. 따라서 200 rad/sec 이상의 범위에서 들어오는 센서 잡음의 효과가 잘 억제 될 것을 알 수 있고, 플랜트의 불확실성에 대한 안정성의 강인성도 유지될 것을 예측할 수 있다.

그림 4는 $\bar{\sigma}(T_o)$ 등을 보여주고 있는데, 고주파 영역에서 최대 크기가 1.26 정도이고, 따라서 (24)로 주어지는 제어기는 $\|\Delta\|_\infty < 1/1.26$인 변화된 플랜트 $G(I+\Delta)$에 대해 안정성을 유지한다.

7. 결론

본 원고에서는 다변수 입출력 되먹임 제어 시스템에서 어떻게 교란을 효과적으로 제어하면서 안정성의 강인성을 유지할 수 있는지를 살펴 보았다. 요약하면, 저주파 영역에서는 루프의 특이치가 크고 제어기의 특이치도 크도록 설계를 하며, 잡음 및 플랜트의 불확실성이 있는 고주파 영역에서는 루프 전달 행렬의 특이치가 작고, 제어기의 특이치도 작은 값을 유지하도록 설계하면 된다. 되먹임 제어 시스템의 대역 폭은 플랜트 자체의 대역폭보다 크지 않도록 설계하는 것이 바람직하다.

참고문헌

[1] K. Zhou, and J.C. Doyle, *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall, 1998.
[2] 김종식, 선형제어시스템 공학, 청문각, 1992.
[3] B.C.KUO, *Automatic Control Systems*, Prentice-Hall International Editions, 1991.

저 자 약 력

강 태 삼

· 1986, 1988, 1992년 서울대학교 제어계측공학과 학사, 석사, 박사졸업.
· 1999년~2001년 호서대학교 제어계측공학과 교수,
· 2001년~현재 건국대학교 항공우주정보시스템공학과 교수.
· 관심분야 : 자동제어 및 비행제어 응용, 관성 센서 및 응용