

유한 요소법을 이용한 자동차용 디스크 브레이크의 열간 저더 해석

정성필* · 박태원*† · 정원선**

* 아주대학교 기계공학부, ** 자동차부품연구원

Analysis of Hot Judder of Disc Brakes for Automotives by Using Finite Element Method

Sung Pil Jung*, Tae Won Park*† and Won Sun Chung**

* Dept. of Mechanical Engineering, Ajou Univ.,

** Korea Automotive Technology Institute.

(Received July 13, 2010 ; Revised January 31, 2011 ; Accepted February 9, 2011)

Key Words : Friction Contact(마찰 접촉), Thermo-Elastic Instability(열탄성 불안정성), Hot Spot(열섬), Hot Judder Vibration(열간 저더 진동), Intermediate Processor(중간 처리기)

초록: 차량 제동시 디스크와 패드사이의 미끄럼 접촉에 의해 발생하는 마찰열은 재료의 열 탄성 변형을 일으키고, 이는 접촉면의 압력 분포에 영향을 끼친다. 이러한 열탄성 불안정성 (Thermo-Elastic Instability, TEI)은 디스크의 고유 진동모드와 결합되어 열섬 현상 및 열간 저더 진동을 발생시킨다. 본 연구에서는 상용 유한 요소 해석 프로그램인 SAMCEF 를 이용하여 자동차용 통풍식 디스크에 대한 3 차원 열간 저더 해석을 수행하였다. Staggered approach 에 의거한 중간 처리기를 이용하여 구조-동역학 해석 결과와 열 전달 해석 결과를 교환하였다. 디스크 표면에 열섬이 발생하는 것을 확인하였고, 이를 디스크 고유 진동 모드와 비교함으로써 모드 형상과 열섬 분포의 관계를 분석하였다.

Abstract: Thermal energy generated because of the friction between the disc and pad is transferred to both sides and causes thermal expansion of the material, which affects the contact pressure distribution. This phenomenon, which is called thermoelastic instability (TEI), is affected by the natural mode of a disc. TEI results in the formation of a hot spot and causes hot judder vibrations. In this study, three-dimensional analysis of the hot judder of a ventilated disc for automotives was performed by using the commercial finite element analysis program, SAMCEF. The intermediate processor based on a staggered approach was used to exchange the result data of the mechanical and thermal model. The hot spot was formed on the surface of the disc, and the number of hot spots was compared with the natural mode of the disc.

1. 서론

디스크와 패드간의 마찰에 의해 발생하는 마찰열은 디스크의 열 탄성 변형을 일으키고, 디스크가 임계 속도보다 빠르게 회전할 때 디스크의 고유 진동 모드와 연관되어 디스크 표면에 열섬(Hot spot)이 발생한다. 열섬이 발생한 디스크의 표면은 국부 변형이 증대되고, 이로 인해 디스크와 패드사이의 접촉압이 불균일해 지면서 열간 저더(Hot judder)라 불리는 진동 현상이 발생한다. 이러

한 열간 저더 진동은 차축, 현가 및 제동 장치를 통하여 차체 또는 조향 장치로 전달되어 운전자의 불안감을 유발하고, 디스크 코너 모듈의 내구성을 약화시킨다. 따라서 차량의 제동 안정성 보장 및 내구 품질 향상을 위해, 디스크 열간 저더 현상은 저감시켜야 할 매우 중요한 요소이다.

지금까지 열간 저더의 발생 메커니즘을 규명하고, 이를 디스크의 임계 회전 속도 및 고유 진동 모드와 연관지어 열간 저더의 영향을 평가하려는 많은 연구가 진행되어 왔다. 특히 열간 저더의 근본 원인이 되는 열탄성 불안정성(Thermoelastic instability, TEI)에 대한 많은 연구가 이루어 졌는데, Faramarz⁽¹⁾는 디스크와 패드 조립체에 대한 매우 간단한 3 차원 유한 요소 모델을 생성한 후 열간

† Corresponding Author, park@ajou.ac.kr
© 2011 The Korean Society of Mechanical Engineers

저더의 근본 원인이 되는 열탄성 불안정성 및 열 저항을 계산하였다. Li⁽²⁾는 비정상 모드 해석법을 이용하여 전형적인 디스크 클러치 시스템에서의 온도와 접촉압 분포를 추정하였다. Du⁽³⁾는 유한 요소법을 이용하여 Burton의 접동법에 기반한 고유치 문제를 풀어냄으로써 임계 속도를 구한 후 이를 TEI와 연관지어 분석하였다. 이러한 방법들은 디스크가 빠른 속도로 회전할 때 고유치 문제가 수렴하지 않을 우려가 있고, 디스크의 열간 저더 현상을 직접적으로 구현하지는 못했다는 한계가 있다.

최근 컴퓨터를 이용한 해석기술의 발달로 ANSYS, ABAQUS와 같은 상용 유한 요소 해석 프로그램을 이용하여 디스크 브레이크에 대한 TEI 및 열간 저더 해석을 수행하고, 이를 바탕으로 디스크의 최적 형상을 찾아내려는 연구가 지속적으로 이루어지고 있다.⁽⁴⁻⁸⁾ 이러한 연구들은 디스크 표면에 직접 Heat flux를 가하거나 제동 모드에 따라 마찰열을 발생시켰고, 디스크 회전속도에 따른 디스크와 패드사이의 접촉력 변화는 무시한 상태에서 디스크 단품에 대한 정상상태 열전달 해석만을 수행하였다는 한계가 있다.

디스크와 패드간의 미끄럼 접촉이 일어나는 동역학 모델과 마찰열 발생에 의한 열전달에 의해 디스크 및 패드의 온도가 변화하는 열 모델을 각기 생성하고, 두 시스템을 동시에 풀어나가는 방식의 해석 기법에 대한 고무적인 연구가 Kao⁽⁹⁾와 Altuzarra⁽¹⁰⁾에 의해 수행되었다. Kao는 디스크와 패드에 대한 단순화된 3차원 유한 요소 모델을 생성하고, 같은 모델을 이용하여 동역학 해석과 열 해석을 동시에 수행하였다. 그러나 미끄럼 접촉 요소가 자세하게 모델링 되지 못했고, 이로 인해 마찰에 의한 열발생 및 재질의 열팽창에 의한 접촉압의 국부적 증대가 제대로 표현되지 못함으로써 디스크 열섬 현상은 구현하지 못했다. Altuzarra는 수학 방정식으로 이루어진 동역학 모델과 유한 요소 모델로 이루어진 열 모델을 연성시킴으로써 두 모델의 연성 해석 속도를 향상 시켰다. 그러나 이 연구도 동역학 모델과 열 모델간의 접촉이 단순한 수학 관계식으로 정의됨에 따라 열 모델의 온도 분포가 동역학 모델에 잘 반영되지 않음으로 인해 열섬 현상을 구현하지는 못했다.

본 연구에서는 상용 유한 요소 해석프로그램인 SAMCEF^(11,12)를 이용하여 디스크와 패드간의 미끄럼 접촉에 의한 열탄성 불안정성을 구현하고, 디스크 회전 속도에 따른 열섬 분포 변화를 분석하는 것을 목표로 한다. 디스크 브레이크 모델에 대

한 3차원 유한 요소 모델을 생성하였고, 비선형 구조 동역학 해석기인 SAMCEF/Mechano와 비정상 상태 열전달 해석기인 SAMCEF/Thermal을 이용하여 동역학 해석 및 열전달 해석을 각각 수행하였다. 두 해석 결과를 SAMCEF/Supervisor를 이용하여 매 시간 증분마다 교환함으로써 완전 연성된 열-기계 연성 문제의 해를 구하였다. 디스크 표면에 열섬 현상이 구현되는 것을 확인하였고, 디스크 고유 진동 모드와 디스크 열섬의 분포에 대해 분석함으로써 본 연구에서 사용한 해석 기법의 신뢰성을 검증하였다.

2. 열-기계 연성 문제 풀이 해법

서로 다른 분야의 두 지배방정식을 푸는 방법은 크게 두 방정식을 합쳐 하나의 지배방정식을 생성한 다음 수치해석 기법을 이용하여 푸는 Monolithic approach와 두 방정식을 순차적으로 풀되 각 연산과정마다 서로의 결과 데이터를 교환하여 푸는 Staggered approach가 있다.⁽¹³⁾ Monolithic approach는 두 방정식을 동시에 풀고 수렴의 정도가 좋다는 장점이 있지만, 두 방정식을 선형화 또는 차분화의 과정을 거쳐 한 개의 방정식으로 통합한 후 해를 구하기 때문에 비선형 시스템의 경우 실제와 해석 결과간 오차가 크게 발생하고, 연산 과정이 복잡하다는 단점이 있다. 이에 반해 Staggered approach는 두 방정식을 순차적으로 풀고 매 시간 증분마다 서로간의 데이터를 교환하는 방식으로 기존의 해석기를 그대로 이용할 수 있고, 따라서 비선형 연성 시스템의 해를 효율적으로 구할 수 있다는 장점이 있다. 본 연구에서는 Staggered approach 기반의 중간 처리기인 SAMCEF/Supervisor를 이용하여, 기계-열 시스템에 대한 연성 해석을 수행하였다.

구속 기계시스템의 대수 운동 방정식은 식 (1)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{q} \\ \Delta \dot{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{q} \\ \Delta \dot{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_T & \kappa B^T \\ \kappa B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^* \\ -\Phi^* \end{bmatrix} \quad (1)$$

식 (1)에서 M 은 질량행렬(Mass matrix), C_T 는 접선 감쇠 행렬(Tangent damping matrix), K_T 는 접선 강성 행렬(Tangent stiffness matrix), q 은 일반 좌표계(Generalized coordinate), κ 는 조절 계수(Scaling factor), Φ 는 구속식(Constraints), Φ_q 는 구속식의 일반좌표계에 대한 편미분 행렬(Jacobian matrix), γ^* 는 잔류 벡터(Residual vector), λ 은 라그랑지 승수

(Lagrange multiplier)이다. 한편, 비선형 열전달 방정식은 식 (2)와 같이 정의된다.

$$C(T)\dot{T} + K(T)T = Q(T) \quad (2)$$

식 (2)에서 $C(T)$ 는 열용량 행렬(Heat capacity matrix), $K(T)$ 는 열 전도율 행렬(Thermal conductivity matrix), $Q(T)$ 는 열 유속 벡터(Heat flux vector)이다. 식 (1)과 식 (2)의 연성 해석의 주 목적은 마찰에 의해 발생하는 열에너지를 교환하는 것이다. 마찰 접촉에 의해 발생하는 마찰 동력(Friction power, Q_F) 는 식 (3)과 같다.

$$Q_F = \eta\mu\sigma_t v \quad (3)$$

식 (3)에서 η 는 기계에너지가 열에너지로 변환되는 비율, μ 는 마찰계수, σ_t 는 마찰접촉응력, v 는 두 물체의 상대속도이다. 이때 두 물체 i, j 사이로 분배되어 전달되는 마찰 동력 Q_F^i, Q_F^j 의 크기는 상수 $\xi(0 < \xi < 1)$ 를 조절함으로써 결정 한다.

$$Q_F^i = \frac{\omega}{1+\omega} Q_F, \quad Q_F^j = \frac{1}{1+\omega} Q_F \quad (4)$$

식 (3)에서 η 와 μ 는 크기가 일정한 상수, σ_t 와 v 는 식 (1)의 해석 결과로부터 얻어지는 값이고, 이렇게 발생하는 마찰 동력은 열유속의 형태로 전환되어 식 (2)의 우변항에 적용된다. 식 (1), (2), (3), (4)에 대한 자세한 설명은 참고문헌 (14)을 참조하기 바란다.

Fig. 1 은 SAMCEF/Supervisor 의 데이터 교환 알고리즘을 보여준다. 먼저, 해석 초기($t=0s$)에 각 해석 모델의 정상 상태를 계산한다. 기계 모델(Mechanical model)의 경우 초기 변위, 속도 및 가속도에 따른 시스템의 초기 정적 평형 상태, 열 모델(Thermal model)의 경우 초기 온도 분포에 의한 초기 정상 상태를 계산한다. 다음, 기계 모델의 초기 절점 위치 정보가 열 모델로 전달되고, SAMCEF/Thermal 은 열 모델의 온도 분포를 절점 위치에 맞춰 수정한다. 온도 분포 결과는 다시 기계 모델로 전달되고, SAMCEF/Mechano 는 받아들인 온도를 바탕으로 기계 모델의 물성치 및 부피 변화를 계산한 후 해석에 반영한다. 이때, 마찰 접촉에 의한 마찰 에너지가 계산되어 열 모델로 전달 된다. 전달된 에너지는 열유속(heat flux)으로 환산 되어 열 모델에 적용되고, SAMCEF/Thermal 은 경계조건을 고려하여 열 모델의 정상 상태를 다시 계산한다. 이상의 과정이 해석 종료 시간까지 반복되면서 기계 모델과 열 모델간의 데이터 교환이 이루어진다.

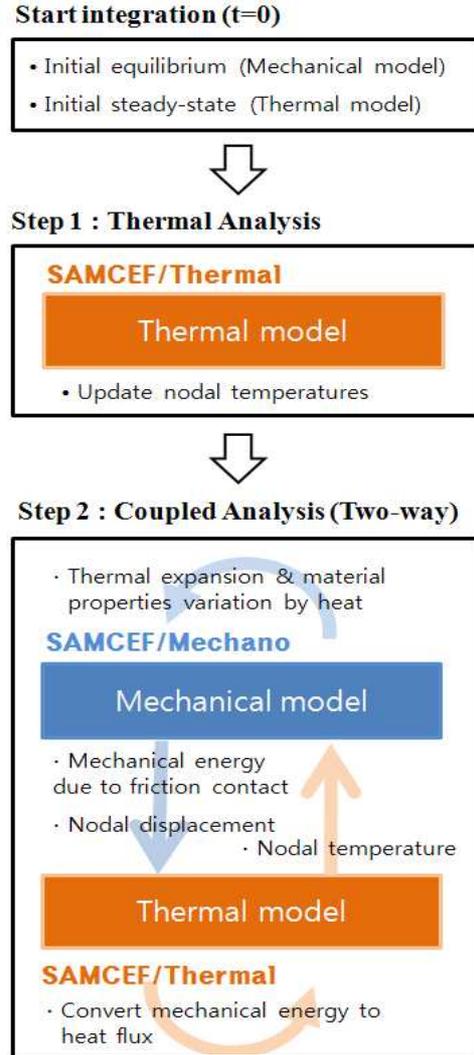
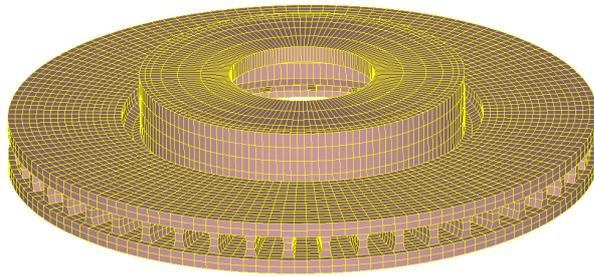


Fig. 1 Data exchange strategy

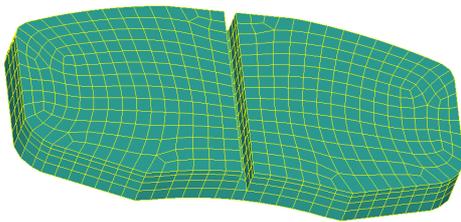
두 해석 모델의 수렴성을 증대시키기 위해 각각의 해석기는 Automatic time step control algorithm⁽¹⁵⁾을 적용하여 적분을 수행한다. 매 시간 계산된 적분 오차를 바탕으로 다음 시간 증분 간격을 결정하는데, SAMCEF/Mechano 와 SAMCEF/Thermal 가 출력하는 시간 증분 간격 중 더 작은 시간 증분을 채택하여 해석을 실시함으로써 해석의 수렴성을 향상시킨다.

3. 디스크 브레이크 유한 요소 모델

Fig. 2 와 같이 나선형 홈이 있는 벤틸레이티드 디스크(Ventilated Disc)와 패드(Pad)에 대하여 8 절점 육면체(8 node-hexahedron) 요소를 이용하여 유한 요소 해석 모델을 생성하였다. Table 1 은 각 모델의 유한 요소 정보, Table 2 는 물성치를 보여준다. 열-기계 연성 시스템 해석에서 재료의 물성치는 해석 결과에



(a) Disc



(b) Pad

Fig. 2 Finite element models of a disc and pad

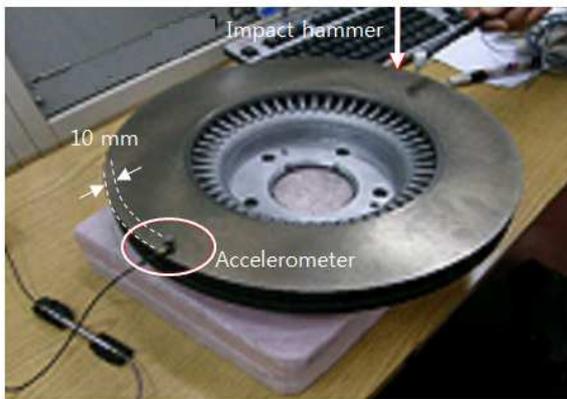


Fig. 3 Configuration of disc modal test set-up

큰 영향을 미친다. 특히 열팽창 계수는 재료의 열팽창량을 결정하며, 열팽창량의 크기에 따라 패드와 디스크 사이의 접촉력이 달라진다. 본 연구에서는 디스크와 패드의 물성치를 전문 양산 업체로부터 제공받아 해석 모델에 적용하였다.

4. 디스크 모드 실험 & 해석 결과

4.1 디스크 모드 실험

디스크 표면에 발생하는 열섬의 개수 및 분포 형상은 디스크의 고유 모드와 관련이 있다.⁽²⁾ 디스크 고유 모드와 열섬과의 관계를 분석하기 위해

Table 1 FE information

	Disc	Pad
Element type	Hexahedron	Hexahedron
No. of nodes	24,048	2,250
No. of elements	15,696	1,599

Table 2 Material properties of FE models

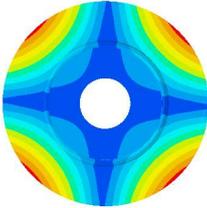
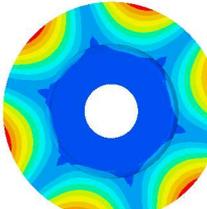
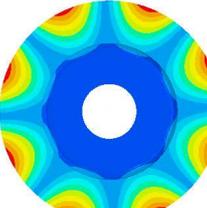
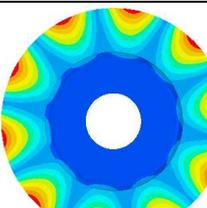
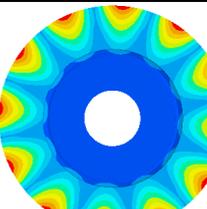
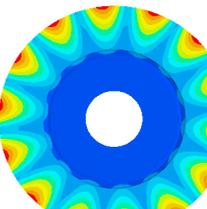
	Disc	Pad
Elastic modulus	135 GPa	3 GPa
Poisson' ratio	0.29	0.3
Mass density	7,200 kg/m ³	2,150 kg/m ³
Thermal exp. coefficient	1.05 x 10 ⁻⁵ /°C	0.76 x 10 ⁻⁵ /°C
Thermal conductivity	53 W/m°C	1.5 W/m°C
Mass Capacity	642 J/kg°C	465 J/kg°C

디스크에 대한 모드 실험 수행하였다. 또한 모드 실험 결과와 모드 해석 결과를 비교함으로써 Table 2에 표시된 디스크 물성치의 신뢰성을 검증할 수 있다. Fig. 3은 디스크 모드 실험 모습을 보여준다. 디스크 주변의 구속관계를 상쇄시키기 위하여 두께 8 cm의 발포 성형 폼(Foam)에 디스크를 올려놓았다. 가속도계(B & K 4393)를 디스크의 원주로부터 중심 방향으로 10 mm 떨어진 지점에 부착한 상태에서 Impact Hammer(B & K 8204)를 이용하여 가속도계의 반대편(180°지점)을 타격하였다.

4.2 디스크 모드 해석 및 실험 결과

Table 3은 디스크 모드실험에서 측정된 고유 진동수와 해석 결과를 비교하고 있다. 표에서 확인할 수 있듯이, 실험과 해석에서 얻은 고유진동수가 최대 오차 2.1%로 잘 일치하고 있으므로, Table 2에서 제시한 디스크의 물성치가 신뢰성이 있다고 판단할 수 있다. Table 3에서 첫 번째 모드(1,100 Hz)는 4개의 열섬, 두 번째 모드(2,464 Hz)는 6개의 열섬, 세 번째 모드(3,968 Hz)는 8개의 열섬과 관계된다.

Table 3 Modal analysis results of a disc

No.	Frequency (Hz)		Mode shape	Error (%)
	Experiment	Simulation		
1	1,100	1,108		0.7
2	2,464	2,515		2.1
3	3,968	4,036		1.7
4	5,524	5,612		1.6
5	7,140	7,221		1.1
6	8,772	8,863		1.0

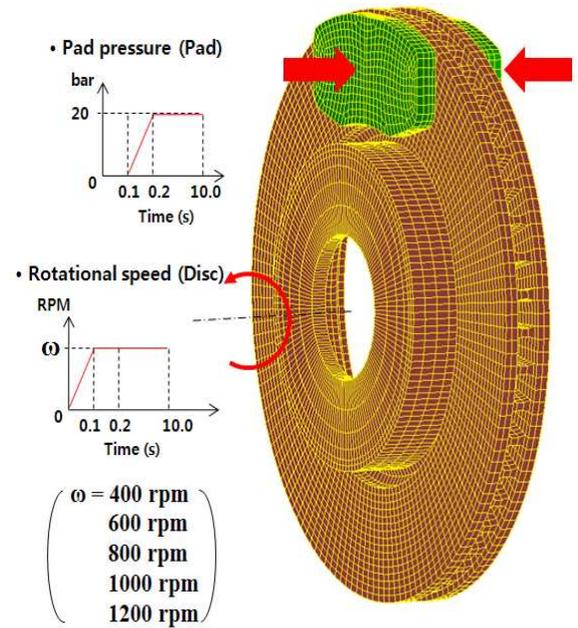


Fig. 4 Boundary conditions for hot judder simulation

5. 디스크 열간 저더 해석

디스크 열간 저더 특성을 확인하기 위하여 Fig. 4와 같이 디스크를 400 rpm (46 km/h), 600 rpm (69 km/h), 1000 rpm (115 km/h), 1200 rpm (138 km/h)의 일정 속도로 회전시키고, 20 bar의 일정 누름압을 패드에 가하였다. 팔호안의 속도는 반경 305 mm 타이어를 장착한 차량을 가정하였을 경우, 각 디스크의 회전속도에 해당하는 차량의 주행속도이다. 디스크는 0.1s에 최대 회전속도에 도달하고, 패드 누름압을 0.1s부터 가함으로써 디스크가 동적 평형상태에 있을때 패드와의 접촉이 일어나게 하였다. 디스크와 패드사이에는 마찰 계수 0.4의 마찰 접촉 조건을 부여하였고, 디스크와 패드의 초기온도는 160°C로 설정하였다. 디스크의 표면에 25°C 공기와의 대류 열전달 조건을 부여하였고, 이때 대류 열전달 계수는 주행중에 디스크표면과 공기가 접촉하는 상태로 고려하여 40W/m²°C로 설정하였다.⁽⁸⁾ 총 10 s 동안 해석을 수행하였으며, 디스크 표면에 발생한 열섬의 개수와 열섬의 최대 온도를 측정하였다.

Fig. 5(a)~(e)는 회전 속도에 따라 디스크 표면에 발생한 열섬의 분포 모습을 보여준다. Fig. 5(a)는 디스크를 400 rpm의 속도로 회전시켰을 경우로 디스크 표면에는 열섬이 발생하지는 않았지만, 패드와 디스크의 접촉면에 열이 띠(band) 형태를 이루며 발생하고 있고 일부 구간에서 열이 집중되는

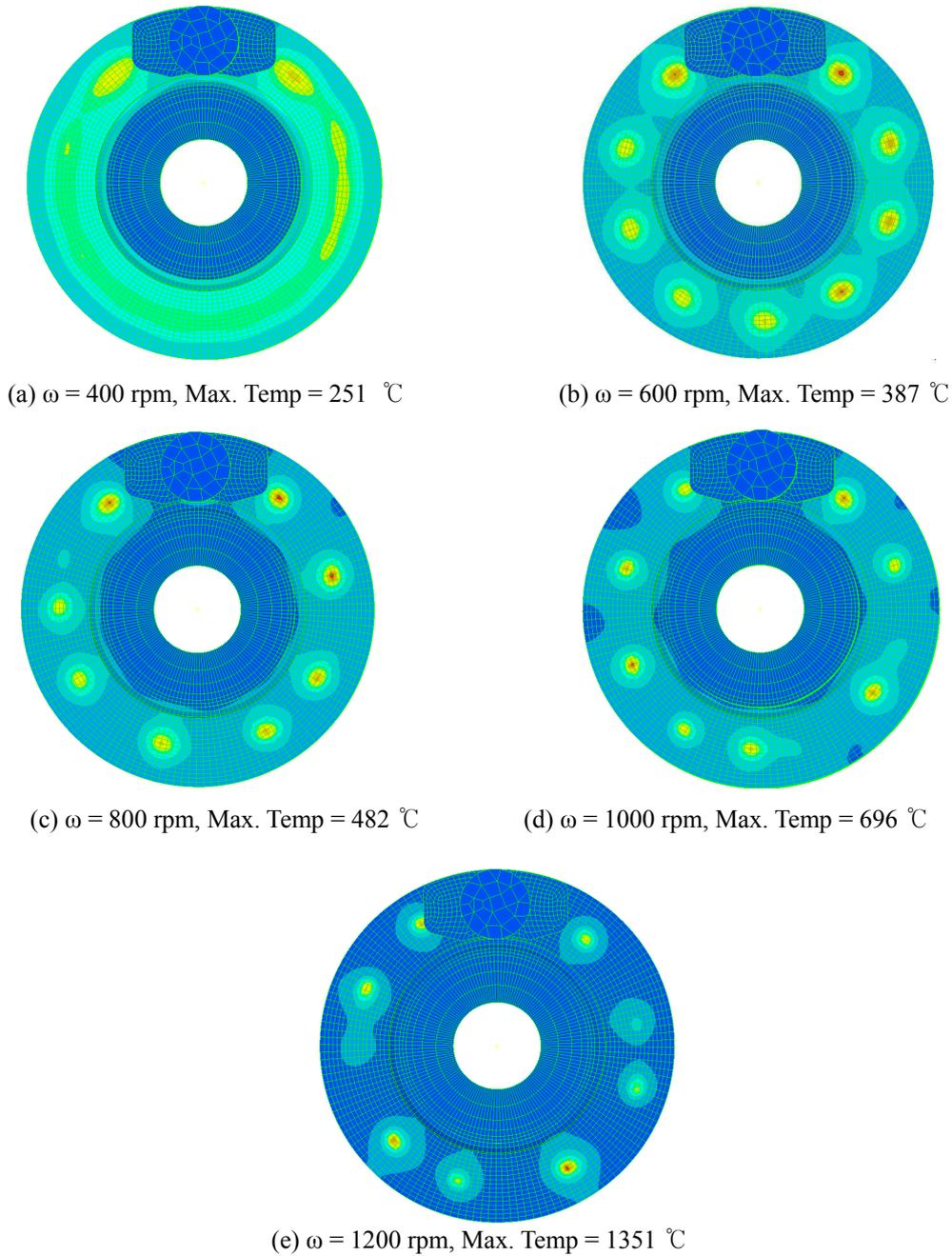


Fig. 5 Hot spot distribution according to the rotational velocity of the disc

현상을 확인할 수 있다. Fig. 5(b)는 디스크의 회전 속도가 600 rpm 일 때의 결과를 보여주는데, 디스크 표면에 10 개의 열점이 뚜렷하게 나타났음을 알 수 있다. 10 개의 열점은 Table 2 의 모드 해석 결과 중 4 번째 모드와 연관이 있다고 판단되며, 이때 열점의 최대온도는 387 °C이다.

접촉하는 두 물체사이의 상대속도가 임계속도 (Critical speed)를 넘어설 때 온도 변화 및 열유속 변화에 대한 불안정성(Instability)이 나타나게 되며

이로 인한 국부 열 집중에 의해 디스크 표면에 열점이 발생하게 된다. 디스크의 임계속도는 디스크의 고유 모드와 관계있으며, Yi 등은 Burton's perturbation method⁽¹⁶⁾를 이용하여 접촉하는 두 물체에 대한 선형 모드 해석을 통해 디스크 임계속도를 예측하였다.^(17,18)

Fig. 5(c)는 디스크 회전속도가 800 rpm 일 때의 결과를 보여주는 것으로 디스크 표면에 약 8 개의 열점이 나타났고, 따라서 디스크의 3 번째 모드와

관련이 있다. Fig. 5(d)는 디스크 회전 속도가 1000 rpm 일 때의 결과로 표면에는 8 개의 열점이 나타났다. Fig. 5(e)는 디스크 회전 속도가 1200 rpm 일 때의 결과로 표면에 열점이 발생하긴 했지만 확연히 구분되지 않고 있다. 열점부 최대 온도도 1351℃로 실제 디스크가 허용할 수 있는 온도(약 700℃)를 훨씬 넘어서고 있다. 따라서 디스크를 1200 rpm 을 10 초 동안 회전시키면서 패드와의 마찰을 유지시킬 경우, 마찰열에 의한 디스크 소성 변형이 일어날 우려가 있다.

6. 결론

본 연구에서는 유한 요소 해석 기법을 이용하여 디스크 브레이크에 대한 열간 저더 해석을 수행하였고, 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) SAMCEF 를 이용하여 디스크 브레이크에 대한 동역학 해석 모델과 열전달 해석 모델을 생성하였고, 두 가지 해석 결과를 매 시간 증분마다 교환함으로써 완전 연성된 열-기계 시스템에 대한 해석을 실시하였다.

(2) 해석 결과 디스크 표면에 열점 현상이 발생하는 것을 확인하였고, 따라서 본 연구에서 사용한 해석 모델과 해석 기법이 타당함을 입증하였다.

(3) 디스크 회전 속도 변화에 따라 발생하는 열점의 개수가 다르다는 것을 증명하였고, 디스크 모드 해석결과와의 비교를 통해 모드 형상과 열점 개수 및 분포 형상과의 관계를 분석하였다.

(4) 본 연구 결과는 디스크-패드 마찰에 의한 열점 발생을 해석 기법을 이용하여 구현한 최초의 연구로, 향후 열간 저더 진동 저감을 위한 디스크 최적 형상 설계 등의 연구에 활용될 수 있을 것으로 판단된다.

참고문헌

- (1) Faramarz, T. and Salman, J., 2009, "Analysis of Heat Conduction in a Disk Brake System," *Heat Mass Transfer*, Vol. 45, pp. 1047~1059.
- (2) Li, J. and Barber, J.R., 2008, "Solution of Transient Thermoelastic Contact Problems by the Fast Speed Expansion Method," *Wear*, Vol. 265, pp. 402~410.
- (3) Du, S. and Fash, J. W., 2000, "Finite Element Analysis of Frictionally-Excited Thermoelastic Instability in 3D Annular Disk," *International Journal of Vehicle Design*, Vol. 23, Nos. 3/4, pp. 203~17.
- (4) Jang, Y. H. and Ahn, S. H., 207, "Frictionally-Excited Thermoelastic Instability in Functionally Graded Material," *Wear*, Vol. 262, pp. 1102~1112.
- (5) Kim, J. T. and Baek, B. J., 2001, "A Numerical Study of Thermal Performance in Ventilated Disk Brake," *Journal of Korean Society of Tribologists & Lubrication Engineers*, Vol. 17, No. 5, pp.358~364.
- (6) Choi, Y. C., Choi, J. W., Kim, H. M. and Seo, Y. W., 2004, "Thermal Dissipation Performance of the Ventilated Brake Disc having Helical Grooved Vent," *Journal of the Korean Society of Precision Engineering*, Vol. 21, No. 3, pp. 117~123.
- (7) Song, B. C., Kang, D. H., Kim, Y. H., Park, Y. C. and Lee, K. H., 2007, "Structural Design of a Circumferential Friction Disc-brake Considering Thermoelastic Instability," *Journal of Korean Society of Manufacturing Process Engineers*, Vol. 6, No. 3, pp. 38~46.
- (8) Kim, S. M., 2009, "A Study on Thermal Analysis in Ventilated Disk Brake by FEM," *Journal of the Korean Society of Machine Tool Engineers*, Vol. 18, No. 5, pp. 544~549.
- (9) Kao, T. K. and Richmond, J. W., 2000, "Brake Disc Hot Spotting and Thermal Judder: An Experimental and Finite Element Study," *International Journal of Vehicle Design*, Vol. 23, Nos. 3/4.
- (10) Altuzarra, O., Amezcua, E., Aviles, R. and Hernandez, A., 2002, "Judder Vibration in Disc Brakes Excited by Thermoelastic Instability," *Engineering computations*, Vol. 19, No. 4, pp. 411~430.
- (11) SAMCEF User's manual, Ver.13.1, 2009.
- (12) Chung, W. S., Jung, S. P. and Park, T. W., 2010, "Numerical Analysis Method to Estimate Thermal Deformation of a Ventilated Disc for Automotives," *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 24, No. 11, pp. 2189~2195.
- (13) Yoon, G. H. and Sigmund, O., 2008, "A Monolithic Approach for Topology Optimization of Electrostatically Actuated Devices," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 197, pp. 4062~4075.
- (14) Jung, S. P., 2010, "Numerical Analysis Method of Hot Judder Phenomenon of a Disc Brake System for Automotives," Ph.D Dissertation, Ajou Univ..
- (15) Geradin, M. and Cardona, A., 2000, *Flexible Multibody Dynamics*, John Willey & Sons, Chichester, England.
- (16) Burton, R. A., Nerlikar, V. and Kilaparti, S. R., 1973, "Thermoelastic Instability in a Seal-Like Configuration," *Wear*, Vol. 24, pp. 177~188.
- (17) Yi, Y. B., Barber, J. R. and Zagrodzki, P., 2000, "Eigenvalue Solution of Thermoelastic Instability Problems Using Fourier Reduction," *Proceedings of The Royal Society of London A*, Vol. 456, pp. 2799~2821.