

## Friction Compensation of the Pendubot based on the LuGre Model

엄명환\* · 김철중\* · 좌동경†  
 (MyungWhan Eom · Cheol-Joong Kim · Dongkyoung Chwa)

**Abstract** - This paper proposes a method to reduce the limit cycle phenomenon that appears in the steady-state response of a pendubot system, when it is controlled by a state feedback controller based on the linearized system model. For this, we employed the compensator which estimates the friction based on the LuGre model in the LQR control. The proposed compensation method is validated by experiments for a pendubot system, which shows that the external disturbance as well can be efficiently compensated.

**Key Words** : Pendubot, LuGre model, Friction compensation, Swing-up control

### 1. 서론

실제 제어를 함에 있어서 제어대상의 제어입력 개수가 상태변수의 개수 보다 적은 경우가 많다. 이러한 시스템을 부족구동 시스템(underactuated system)이라 하며 그 예로는 이동로봇, 배, 크레인, VTOL(vertical takeoff & landing) 등이 있다. 부족구동 시스템에 대한 제어 알고리즘은 많은 분야에 적용 가능하며 비선형성을 해석함에 있어서 보다 향상된 제어성능을 위한 연구가 활발히 진행되고 있다[1-2].

펜듀봇(pendubot)은 대표적인 부족구동 시스템으로서 로봇에 두 개의 링크가 이어서 달려있으며 로봇을 기준으로 첫번째 링크에만 구동기가 존재한다. 펜듀봇은 목표점로의 안정한 제어를 목표로 하고 있다. 그러나 실제 펜듀봇을 제어함에 있어서 마찰력, 모델링오차, 외란 등에 의하여 제어 목표점에 도달하지 못하게 되는 경우가 많다[3-6]. 이는 펜듀봇 제어에서 상태변수들이 목표점 근방에서 안정화되거나 리밋사이클(limit cycle)형태를 보이며 목표점에 정확히 수렴하지 못함을 알 수 있다. 이를 해결하기 위해 리밋사이클을 사인파형 외란으로 가정하여 사인파형 외란 보상을 적용하였을 때도 보상기로 인한 성능은 향상되었으나 목표점에서의 미세한 리밋사이클이 존재하여 정확한 보상이 어려웠다[7].

본 논문에서는 비선형 모델을 선형 제어기를 이용하여 안정화할 때 발생하는 리밋사이클의 존재가 마찰력에 기인한다고 가정한다. 가정한 마찰력 모델은 동적 마찰력 모델인 LuGre 모델[8-9]을 사용한다. 기존의 LuGre 모델을 기반으로 하는 마찰력 보상기법[10-12]에 대한 연구는 간단하게

나 안정한 시스템에 한정되어 적용하였으나 본 논문에서는 보다 복잡한 시스템인 펜듀봇에 적용하여 제안한 보상기의 성능을 확인한다. 먼저 펜듀봇 스윙업(swing-up)제어에서는 에너지 이론에 기반한 방법[13-15]를 참조하여 적용하였고, 스윙업을 한 후 발랜싱(balancing)제어를 하였다. 발랜싱 제어는 펜듀봇의 비선형모델을 목표점 근방에서 선형화를 하고 최적레귤레이터 기법을 통하여 제어한다. 이때 발생하게 되는 리밋사이클을 제거하기 위해 LuGre 모델을 이용하여 펜듀봇 시스템에 존재하는 마찰력을 추정하고 선형제어 입력에 이를 보상하여 적용한다. 제안한 보상방법이 효과적으로 마찰력을 보상함을 실험을 통하여 확인한다.

### 2. 마찰력 보상기를 적용한 펜듀봇의 스윙업 제어

#### 2.1 동역학 모델

펜듀봇은 그림 1과 같이 구동기가 존재하는 첫번째 링크와 구동기가 없는 두번째 링크로 구성되어 있다.

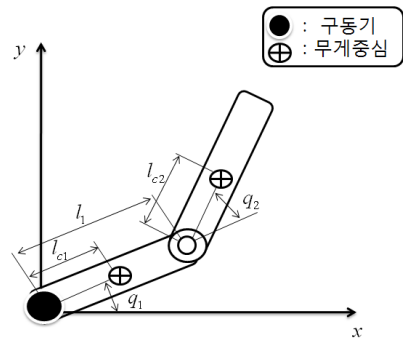


그림 1 펜듀봇 모델  
 Fig. 1 The model of pendubot

\* 정회원 : 아주대 전자공학과 박사과정  
 † 교신저자, 정회원 : 아주대 전자공학과 부교수  
 E-mail : dkchwa@ajou.ac.kr  
 접수일자 : 2010년 12월 8일  
 최종완료 : 2011년 2월 11일

모델 각각의 기호를 보면  $l_1$ 은 첫번째 링크의 길이,  $l_{c1}$ 은 첫번째 링크의 무게중심까지의 길이,  $l_2$ 는 두번째 링크의 길이,  $l_{c2}$ 는 두번째 링크의 무게중심까지의 길이,  $m_1$ 은 첫번째 링크의 무게,  $m_2$ 는 두번째 링크의 무게,  $I_1$ 은 첫번째 링크의 관성,  $I_2$ 는 두번째 링크의 관성,  $g$ 는 중력 가속도이다. 이 변수들을 이용하여 펜듈붐의 동역학 모델에 사용되는 파라미터를

$$\begin{aligned} \theta_1 &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 & (1) \\ \theta_2 &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\ \theta_3 &= m_2 l_1 l_{c2} \\ \theta_4 &= g(m_1 l_{c1} + m_2 l_1) \\ \theta_5 &= g(m_2 l_{c2}) \end{aligned}$$

과 같이 재정의 할 수 있다. 펜듈붐의 동역학 방정식은 오일러-라그랑즈 방정식으로부터

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

와 같이 얻을 수 있다[16]. 여기서,  $\tau$ 는 첫번째 링크의 구동기에 의해 입력되는 힘으로써 전체 시스템의 제어입력을 나타내고,  $q = [q_1, q_2]^T$ 는 각 링크의 위치를 나타낸다.  $D(q)$ 는 관성과 관련된 행렬,  $C(q, \dot{q})$ 는 코리올리(coriolis)힘과 구심력에 관련된 행렬,  $G(q)$ 는 중력가속도와 관련된 행렬로서 세부적으로 나타내면

$$D(q) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2 & \theta_2 + \theta_3 \cos q_2 \\ \theta_2 + \theta_3 \cos q_2 & \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$C(q, \dot{q}) = -\theta_3 \sin(q_2) \begin{bmatrix} \dot{q}_2 & \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \\ -\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} \theta_4 \cos(q_1) + \theta_5 \cos(q_1 + q_2) \\ \theta_5 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (5)$$

과 같다. 식 (2)를  $\ddot{q}$ 에 대한 식으로 나타내면 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2(q_2)} [\theta_2 \theta_3 \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \theta_3^2 \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + \theta_3 \theta_5 \cos(q_2) \cos(q_1 + q_2) - \theta_2 \theta_4 \cos(q_1) + \theta_2 \tau] \quad (6)$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{1}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2(q_2)} [-\theta_3 (\theta_2 + \theta_3 \cos(q_2)) \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - (\theta_2 + \theta_3 \cos(q_2)) \theta_3 \sin(q_2) \dot{q}_1^2 - (\theta_2 + \theta_3 \cos(q_2)) (\theta_4 \sin(q_1) + \tau) + (\theta_1 + \theta_3 \cos(q_2)) \theta_5 \sin(q_1 + q_2)] \quad (7)$$

### 2.2 스윙업 제어(swing-up control)[13-15]

스윙업 제어는 펜듈붐의 전체에너지를 사용한 수동성(Passivity)의 특징을 이용하여 제어입력을 구한다.  $D(q)$ 는 대칭적(symmetric)이며 식 (3)으로부터

$$\begin{aligned} d_{11} &= \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2 & (8) \\ &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 + m_2 l_{c2}^2 + I_2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos q_2 \\ &\geq m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 + m_2 l_{c2}^2 + I_2 - 2m_2 l_1 l_{c2} \\ &\geq m_1 l_{c1}^2 + I_1 + I_2 + m_2 (l_1 - l_{c2})^2 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(D(q)) &= \theta_1 + \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2 & (9) \\ &= (m_1 l_{c1}^2 + I_1)(m_2 l_{c2}^2 + I_2) \\ &\quad + m_2^2 l_1^2 l_{c2}^2 \sin^2 q_2 > 0 \end{aligned}$$

과 같은 성질을 유도할 수 있다.  $D(q)$ 는 모든  $q$ 에 대해 양한정(positive definite)하므로, 식 (3),(4),(5)로 부터

$$D(\dot{q}) - 2C(q, \dot{q}) = \theta_3 \sin q_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

을 유도할 수 있다. 반대칭(skew-symmetric)행렬인 성질을 펜듈붐의 수동성에 이용하면

$$z^T (\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q}))z = 0 \quad (11)$$

이 성립한다. 식 (2)로부터 전체운동에너지를

$$E = K + V = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} + \theta_4 \cos q_1 + \theta_5 \cos(q_1 + q_2) \quad (12)$$

와 같이 구할 수 있으며, 식 (2),(14)로부터 펜듈붐 전체 에너지의 미분치는

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{q}^T D(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q} \dot{D}(q) \dot{q} + \dot{q}^T g(q) & (13) \\ &= \dot{q}^T (-C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) + \tau) + \frac{1}{2} \dot{q} \dot{D}(q) \dot{q} + \dot{q}^T G(q) \\ &= \dot{q}^T \tau = \dot{q}_1 \tau_1 \end{aligned}$$

과 같이 유도될 수 있다. 식 (13)의 양변을 적분하면

$$\int_0^t \dot{q}_1 \tau_1 = E(t) - E(0) \quad (14)$$

와 같다. 따라서 펜듈붐 시스템이 입력  $\tau_1$  및 출력  $\dot{q}_1$ 에 대해 수동적(passive)이다.  $\tau_1 = 0$ 일 때  $(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = (0, 0, 0, 0)$ ,  $(-\pi, 0, 0, 0)$ ,  $(-\pi, 0, \pi, 0)$ ,  $(0, 0, \pi, 0)$ 의 평형점들을 가진다. 초기상태는  $(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = (-\pi, 0, 0, 0)$ 이다. 네 개의 평형 점들에 대한 각각의 전체 에너지는

$$\begin{aligned} E(0, 0, 0, 0) &= E_{top}(\theta_4 + \theta_5) & (15) \\ E(-\pi, 0, 0, 0) &= E_t(-\theta_4 - \theta_5) \\ E(-\pi, 0, \pi, 0) &= E_{mid}(\theta_5 - \theta_4) \\ E(0, 0, \pi, 0) &= E_b(\theta_4 - \theta_5) \end{aligned}$$

와 같이 표현된다. 여기서  $E_{top}$ ,  $E_t$ ,  $E_{mid}$ ,  $E_b$ 는 각각 두 링크모두 위로, 첫번째 링크는 아래로 두번째 링크는 위로, 첫

번째 링크는 아래 두번째 링크는 위로, 첫번째 링크는 위로 두번째 링크는 아래의 상태들의 전체 에너지를 의미한다. 두링크 모두 위로향하는 상태가 제어 목표점이므로 각 링크에 대한 전체에너지는

$$E(q, \dot{q}) = E(0, 0, 0, 0) = \theta_4 + \theta_5 \quad (16)$$

과 같다. 식 (14)의 수동성을 이용하여 링크가 원하는 제어 목표  $(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = (\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$ 에 도달할 때 전체 에너지차를  $\tilde{E}$ 라 하면  $\tilde{E} = E - E_{top}$ 이다.  $\tilde{q}_1 = (q_1 - \frac{\pi}{2})$  일 때,  $\tilde{E}, \tilde{q}_1, \dot{\tilde{q}}_1$ 이 0이 되게 하는 리아푸노프(Lyapunov) 함수를

$$V(q, \dot{q}) = \frac{K_E}{2} \tilde{E}^2 + \frac{K_D}{2} \dot{\tilde{q}}_1^2 + \frac{K_P}{2} \tilde{q}_1^2 \quad (17)$$

과 같이 정의할 수 있다. 여기서,  $K_E, K_D, K_P$ 는 양의 상수로 설계변수이다.  $V$ 의 미분치는

$$\begin{aligned} \dot{V} &= k_E \tilde{E} \dot{\tilde{E}} + k_D \dot{\tilde{q}}_1 \ddot{\tilde{q}}_1 + k_p \tilde{q}_1 \dot{\tilde{q}}_1 \\ &= k_E \tilde{E} \dot{\tau}_1 + k_D \dot{\tilde{q}}_1 \ddot{\tilde{q}}_1 + k_p \tilde{q}_1 \dot{\tilde{q}}_1 \\ &= \dot{\tilde{q}}_1 (k_E \tilde{E} \tau_1 + k_D \ddot{\tilde{q}}_1 + k_p \tilde{q}_1) \end{aligned} \quad (18)$$

과 같다. 식 (6)으로부터  $F(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = \theta_2 \theta_3 \sin q_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \theta_3^2 \cos q_2 \sin(q_2) \dot{q}_1^2 - \theta_2 \theta_4 \cos q_1 + \theta_3 \theta_5 \cos q_2 \cos(q_1 + q_2)$ 으로 정의하면,

$$\ddot{\tilde{q}}_1 = \frac{1}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2} [\theta_2 \tau_1 + F(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)] \quad (19)$$

가 되어 결국  $V$ 의 미분치는

$$\dot{V} = \dot{\tilde{q}}_1 \left[ \tau_1 \left( k_E \tilde{E} + \frac{k_D \theta_2}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2} \right) + \frac{k_D F(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2} + k_p \tilde{q}_1 \right] \quad (20)$$

과 같다. 따라서 리아푸노프 함수의 미분치가 음한정(negative definite)이되는 제어입력을

$$\tau_1 = \frac{-K_D F(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) - (\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2) (\dot{\tilde{q}}_1 + K_P \tilde{q}_1)}{(\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2) K_E \tilde{E} + K_D \theta_2} \quad (21)$$

과 같이 설계하면  $\tilde{E}, \tilde{q}_1, \dot{\tilde{q}}_1$ 이 시간이 지남에 따라 0으로 수렴한다.

### 2.3 발랜싱 제어(balancing control)

펜듈럼이 스윙업 후에 선형제어기를 적용하기 위해서 식 (2)의 비선형모델을 평형점 근방에서 선형화를 한다. 선형화된 상태방정식은

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (22)$$

와 같다. 여기서  $x = [q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2]$ ,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(\theta_2 \theta_4 - \theta_3 \theta_5)}{D} & \frac{-\theta_3 \theta_5}{D} & 0 & 0 \\ \frac{(\theta_1 + \theta_3) \theta_5 - (\theta_2 + \theta_3) \theta_4}{D} & \frac{(\theta_1 + \theta_3) \theta_5}{D} & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\theta_2}{D} \\ \frac{-(\theta_2 + \theta_3)}{D} \end{bmatrix},$$

$C = I_{4 \times 4}$ ,  $D = \theta_1 \theta_2 - \theta_3^2$ ,  $u = -Kx$ 이다. 제어이득  $K$ 는 최적레귤레이터(LQR : Linear Quadratic Regulator) 제어기법을 이용하여 구한다. LQR 제어기법은 시스템의 상태방정식(state equation)을 만족하고 가중된 상태변수의 제곱과 가중된 제어 입력신호의 합으로 표현한 평가함수

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (23)$$

을 최소화하는 제어법칙을 구하는 것이다. 여기서  $Q$ 와  $R$ 은 대칭행렬로서 각각 준정정( $Q \geq 0$ ) 및 정정행렬( $R > 0$ )이다. 임의의 초기값  $x(0)$ 에 대하여 평가함수 식(23)을 최소화하는 안정화 이득행렬  $K$ 는

$$K = R^{-1} B^T P \quad (24)$$

와 같이 주어진다. 여기서  $P$ 는 양한정 대칭행렬이며

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (25)$$

와 같은 대수리카티방정식(ARE: Algebraic Riccati Equation)으로부터 얻어진다.

### 2.4 LuGre 모델에 기반한 마찰력 보상

이절에서는 LuGre 모델을 이용한 마찰력 보상기를 제안한다. 펜듈럼 시스템에서 구동기가 있는 첫번째 링크에는 무시하지 못할 정도의 비선형 마찰력이 존재하고, 구동기가 없는 두번째 링크에는 마찰력이 전체 시스템에 미치는 영향에 미약하여 무시할 수 있다고 가정한다. LuGre 모델에 기반한 마찰력을 첫번째 링크의 DC모터 동역학 방정식에 적용하면

$$J \ddot{q}_1 = k_t u - F \quad (26)$$

과 같다. 여기서,  $u$ 는 원하는 시스템 출력에 대한 제어입력이고,  $F$ 는 LuGre 모델에 기반한 마찰력이다. 마찰력이 무시된 선형 시스템에 대해 설계된 제어를 실제 마찰력이 존재하는 펜듈럼 시스템에 적용하면 비선형 시스템의 전형적인 특성 중 하나인 리밋사이클(limit cycle) 현상이 나타난다. 그러나 첫번째 링크의 속도에 종속되는 비선형 마찰력을 알고 있다면 마찰력 보상방법을 통해 리밋사이클 현상을 없앨 수 있다. 즉, 비선형 마찰력을 추정된 값이  $\hat{F}$ 라 할 때, 이를 선형제어기의 입력에 보상하여 제어 입력을

$$u = -\underline{K}x + \hat{F} \quad (27)$$

과 같이 설정하고 선형 제어기에 정확히 알고 있는 마찰력을 보상해 준다면  $F - \hat{F} = 0$ 이 되어서 마찰력이 없는 펜듈럼

시스템을 선형 제어기를 통해서 제어하는 것과 같은 효과를 얻을 수 있다. LuGre 모델에 의한 마찰력을

$$F = z + \sigma_1 \epsilon_0 \dot{z} + \sigma_2 v \quad (28)$$

$$\epsilon_0 \dot{z} = v - \frac{|v|}{g(v)} z \quad (29)$$

$$g(v) = \begin{cases} F_{c+} + (F_{s+} - F_{c+})e^{-(v/v_s)^2} & , v > 0 \\ F_{c-} + (F_{s-} - F_{c-})e^{-(v/v_s)^2} & , v < 0 \\ (g(0+) + g(0-))/2 & , v = 0 \end{cases} \quad (30)$$

과 같이 나타낼 수 있다[8]. 여기서  $v$ 는 두 접촉면 사이의 상대적 속도,  $z$ 는 마찰력 내부변수,  $F$ 는 마찰력,  $\epsilon_0 = 1/\sigma_0$ ,  $\sigma_0$ 는 편모(bristles)의 평균화된 강도(stiffness),  $\sigma_1$ 은 편모의 제동(damping) 계수,  $\sigma_2$ 는 점성 마찰력 계수,  $v_s$ 는 Stribeck 속도,  $F_{s+}$ 와  $F_{c+}$ 는 각각 속도가 양의 방향일 때의 정지 마찰력과 쿨롱 마찰력,  $F_{s-}$ 와  $F_{c-}$ 는 각각 속도가 음의 방향일 때의 정지 마찰력과 쿨롱 마찰력이다. 마찰력 관측기를 이용한 비선형 마찰 보상 방법을 그림 2에 나타내었다.

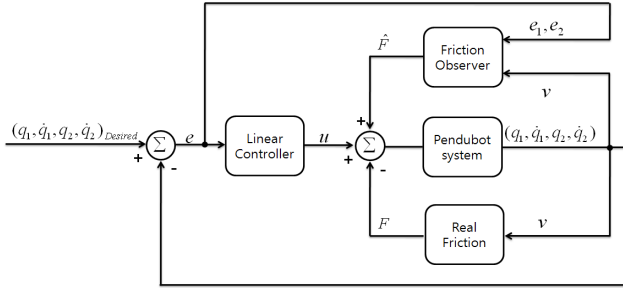


그림 2 마찰력 보상기 구조

Fig. 2 The structure of the friction force compensator

첫번째 링크의 속도를  $\dot{q}_1 = v$ 라 하고 마찰력 관측기의 추정치 마찰력을  $\hat{F}$ 이라하면

$$\hat{F} = \hat{z} + \sigma_1 \epsilon_0 \dot{\hat{z}} + \sigma_2 \hat{v} \quad (31)$$

$$\epsilon_0 \dot{\hat{z}} = \hat{v} - \frac{|\hat{v}|}{g(\hat{v})} \hat{z} + K(\cdot) \quad (32)$$

$$K(\cdot) = -(1 + \sigma_1 \frac{|\hat{v}|}{g(\hat{v})}) \frac{e_1 + 2\hat{e}_2/w_0}{\rho} \quad (33)$$

와 같이 정의 할 수 있다. 여기서,  $K(\cdot)$ 는 마찰력 보상기 계인,  $\rho$ 는 마찰력 보상기의 설계 상수,  $\hat{v} = \text{sat}(v)$ ,  $q_1 - q_{desired} = r(t)$ ,  $e_1 = q_1 - r(t)$ ,  $\hat{e}_2 = \hat{v} - \dot{r}(t)$ 이다. 따라서 펜듀봇 시스템 모델에 대하여 마찰력 추정치  $\hat{F}$ 를 생성하고, 이 값은 시간이 지남에 따라 실제 마찰력  $F$ 로 수렴한다. 이는 리아푸노프 안정성이론을 적용하여 증명할 수 있다[17].

증명 : 식 (26),(27),(28),(31)을 이용하면,

$$\dot{e}_2 + 2\eta w_0 e_2 + w_0^2 e_1 = -\dot{z} + \sigma_1 \epsilon_0 \dot{z} \quad (34)$$

$$e_2 = e_1 \quad (35)$$

$$\epsilon_0 \dot{z} = -\frac{|v|}{g(v)} \tilde{z} - K(e_1, e_2, v) \quad (36)$$

와 같은 오차 동역학식을 만들 수 있다. 여기서,  $\tilde{z} = z - \hat{z}$ 이고 오차  $e_1 = q_1 - r$ 는 현재 위치와 기준 위치의 차로 정의된다. 추정오차와 마찰력 내부변수에 대한 리아푸노프 함수를

$$W(e_1, e_2, \tilde{z}) = V(e_1, e_2) + \frac{\rho \epsilon_0}{2} \tilde{z}^2 \quad (37)$$

과 같이 정의한다. 여기서,  $\rho > 0$ 이며 설계 변수이다. 추정오차에 대한 리아푸노프 함수를

$$V(e_1, e_2) = w_0(1 + \eta)e_1^2 + e_1 e_2 + e_2^2/w_0 \quad (38)$$

과 같이 하면 전체 리아푸노프 함수의 미분치는

$$\begin{aligned} \dot{W} &= -w_0^2 e_1^2 - (4\eta - 1)e_2^2 - (e_1 + \frac{2e_2}{w_0})\tilde{z} + \sigma_1 \epsilon_0 \dot{z} + \rho \epsilon_0 \tilde{z} \dot{z} \\ &= -w_0^2 e_1^2 - (4\eta - 1)e_2^2 - w\tilde{z} + (\sigma_1 w - \rho \tilde{z}) \left( \frac{|v|}{g(v)} \tilde{z} + K(\cdot) \right) \\ &= -w_0^2 e_1^2 - (4\eta - 1)e_2^2 - \sigma_1 w^2 + (\sigma_1 w - \rho \tilde{z}) \left( \frac{|v|}{g(v)} \tilde{z} + K(\cdot) + \frac{w}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (39)$$

와 같다. 여기서,  $w = \frac{e_1 + 2e_2/w_0}{J}$ 이다. 따라서 보상기 계인을

$$\begin{aligned} K(e_1, e_2, v) &= -\frac{w}{\rho} - \frac{|v|}{g(v)} \frac{\sigma_1 w}{\rho} \\ &= -(1 + \sigma_1 \frac{|v|}{g(v)}) \frac{e_1 + 2\hat{e}_2/w_0}{\rho} \end{aligned} \quad (40)$$

과 같이 설계 한다면, 그때의 리아푸노프 함수의 미분치는

$$\begin{aligned} \dot{W} &= -w_0^2 e_1^2 - (4\eta - 1)e_2^2 - \sigma_1 w^2 - \frac{(\sigma_1 w - \rho \tilde{z})^2}{\rho} \frac{|v|}{g(v)} \\ &\leq -w_0^2 e_1^2 - (4\eta - 1)e_2^2 - \sigma_1 w^2 - \frac{(\sigma_1 w - \rho \tilde{z})^2}{\rho} \frac{\| \dot{r}(t) \| - |e_2|}{\max(F_{s-}, F_{s+})} \end{aligned} \quad (41)$$

와 같다. 여기서  $e_1(t)$ ,  $e_2(t) = \hat{e}_1(t)$ ,  $\tilde{z}(t)$ 는 유계하며  $z(t)$ 도 유계하다. 따라서 [17 Th. 8.4]에 의해 시간이 지남에 따라  $e_1$ ,  $e_2$ 가 0으로 수렴하여 마찰력의 추정치가 실제 마찰력에 수렴하게 된다.

[증명 끝]

이와 같이 식 (31)의 마찰력 보상기를 사용하여 펜듀봇에 존재하는 마찰력의 영향을 없앨 수 있다. 다음절에서 실제 실험을 통해 제안한 마찰력 보상기의 성능을 확인한다.

### 3. 실험 결과

본 논문에서 제안되었던 마찰력 보상방법의 유용성을 확인하기 위해 사용된 펜듀봇은 Quanser사에서 제작된 Planar SIP 모델을 사용하였다. 실험에서 사용된 펜듀봇의 물리적인 값은 표 1에 나타낸 바와 같다.

표 1 펜듀봇 모델의 파라미터

Table 1 Parameter of the pendubot model

	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$
컨서모델 매개변수	0.0096	0.0005	0.0001	0.0342	0.0060

2.2절의 스윙업 제어 식 (21)에서 설계변수  $K_D, K_P, K_E$  는 각각 0.7, 220.3, 5.5로 설계하였고, 발렌싱 제어에서 제어이득  $K$ 를 구하기 위한 가중치 행렬은  $Q = \text{diag}[100, 1, 100, 1]$ ,  $R = 1$ 로 하였다. LQR제어기법을 이용한 제어이득은  $K = [-105.2, -15.5, -48.761, -13.3]$  이다. 펜듀봇이 스윙업 후 발렌싱 제어로 스위칭하는 조건은  $|q_1| < 0.4[\text{rad}]$ ,  $|q_2| < 0.4[\text{rad}]$ 이다. 그림 3은 초기조건  $(q_1, q_1, q_2, q_2) = (-\pi, 0, 0, 0)$ 에서 입력을 주었을 때 스윙업을 한 후 0.4초에서 스위칭 조건에 의해 발렌싱 제어로 전환한다. 실험 결과에서 나타나듯이 선형제어기만을 사용하였을 때 0.4초 이후부터 제어 목표인  $(q_1, q_1, q_2, q_2) = (0, 0, 0, 0)$ 에 도달하지 못하고 목표 근방에서 0.35라디안의 크기로 주기적인 움직임을 하고 있다. 이는 비선형 시스템의 전형적인 특성 중 하나인 리밋사이클 현상이 나타나는 것을 볼 수 있다. 따라서 리밋사이클의 원인을 마찰력으로 가정하고 마찰력 보상을 이용하여 리밋사이클을 없앤다.

마찰력 보상을 위하여 식 (34)의 LuGru 모델 보상기에 사용되는 파라미터들은  $F_{c-} = 0.023$ ,  $F_{c+} = 0.028$ ,  $F_{s-} = 0.031 \cdot kc$ ,  $F_{s+} = 0.076 \cdot kc$ ,  $\sigma_1 = 1.5$ ,  $\sigma_2 = 0.001$ ,  $\epsilon_0 = 1$ ,  $\epsilon = 0.05$ ,  $k_c = 1.5$ ,

$J = 0.095$ ,  $\eta = 0.707$ ,  $w_0 = 1$ ,  $\rho = 10^6$ 이다. 그림 3은 선형제어기에 각각 마찰력 보상기와 사인파형 외란보상기를 적용하였을 때 비교를 한 결과이다. 먼저 마찰력 보상기를 사용한 실험에서는 펜듀봇이 초기조건  $(q_1, q_1, q_2, q_2) = (-\pi, 0, 0, 0)$ 에서 스윙업을 한 후 4.5초 이 후부터 각각의 링크가 제어 목표인  $(q_1, q_1, q_2, q_2) = (0, 0, 0, 0)$ 에 수렴한다. 이는 펜듀봇의 두링크가 평형점에 도달해서 안정화가 되었다는 것을 증명한다. 그러나 사인파형 외란 보상은  $q_1$ 의 최대값을  $q_{1max}$ , 최소값을  $q_{1min}$ 이라고 하고,  $q_2$ 의 최대값을  $q_{2max}$ , 최소값을  $q_{2min}$ 이라고 했을 때, 선형제어기만 사용하였을 때는  $|q_{1max} - q_{1min}| = 0.235[\text{rad}]$ ,  $|q_{2max} - q_{2min}| = 0.309[\text{rad}]$ 이며, 사인파형 외란 보상기를 추가 하였을 때는  $|q_{1max} - q_{1min}| = 0.037 [\text{rad}]$ ,  $|q_{2max} - q_{2min}| = 0.083[\text{rad}]$ 이다. 이는 사인파형 외란 보상을 했을 때[7] 성능은 우수하나 목표점으로서의 수렴은 할 수 없음을 실험결과에서 보여주고 있다. 제한한 마찰력 보상은 4.5초 이후에 평형 점으로 도달하여 완벽한 보상이 이루어짐을 확인하였다. 그림 4(a),(b)를 보면 사인파형 보상기가 마찰력 보상기를 적용하였을 때 보다 과도응답의 측면에서는 성능이 더 우수하다. 하지만 펜듀봇의 제어목적은 두링크가 수직으로 서서 정지하는 것이기 때문에 사인파형 외란보상기를 적용하였을 때의 실험결과는 바람직하지 않다. 그림 4(f)를 보면 사인파형 보상기의 제어입력에 의해서 펜듀봇의 두링크가 계속 진동하고 있다는 것을 알 수 있다. 마찰력 보상기에 의한 제어입력은 4.5초 이후부터는 거의 0에 가깝다. 그림 5는 펜듀봇이 스윙업을 하여 목표점에 도달했을 때 외부 외란을 주었다. 그림 5(a)에서 보면 28초와

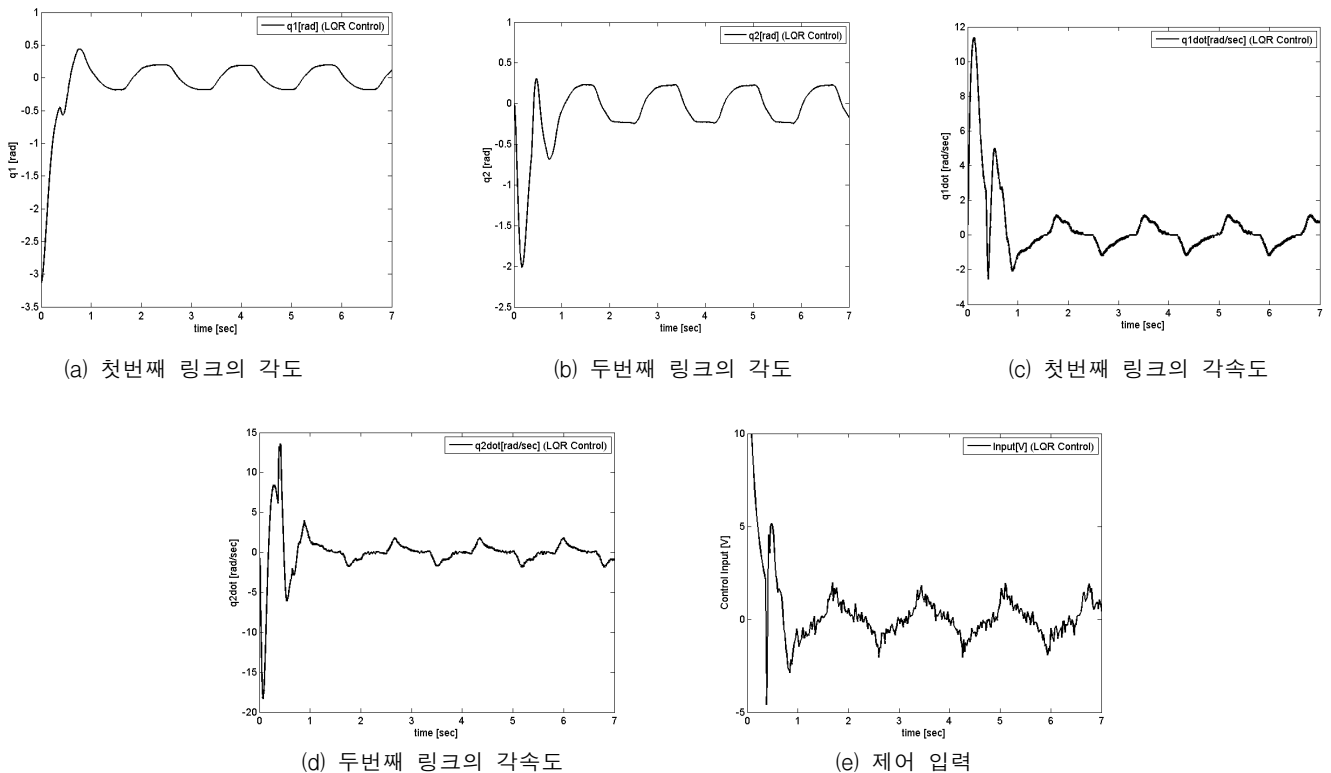


그림 3 선형제어기를 이용한 펜듀봇의 안정화 실험 결과  
Fig. 3 The experimental results of a pendubot using a linear controller

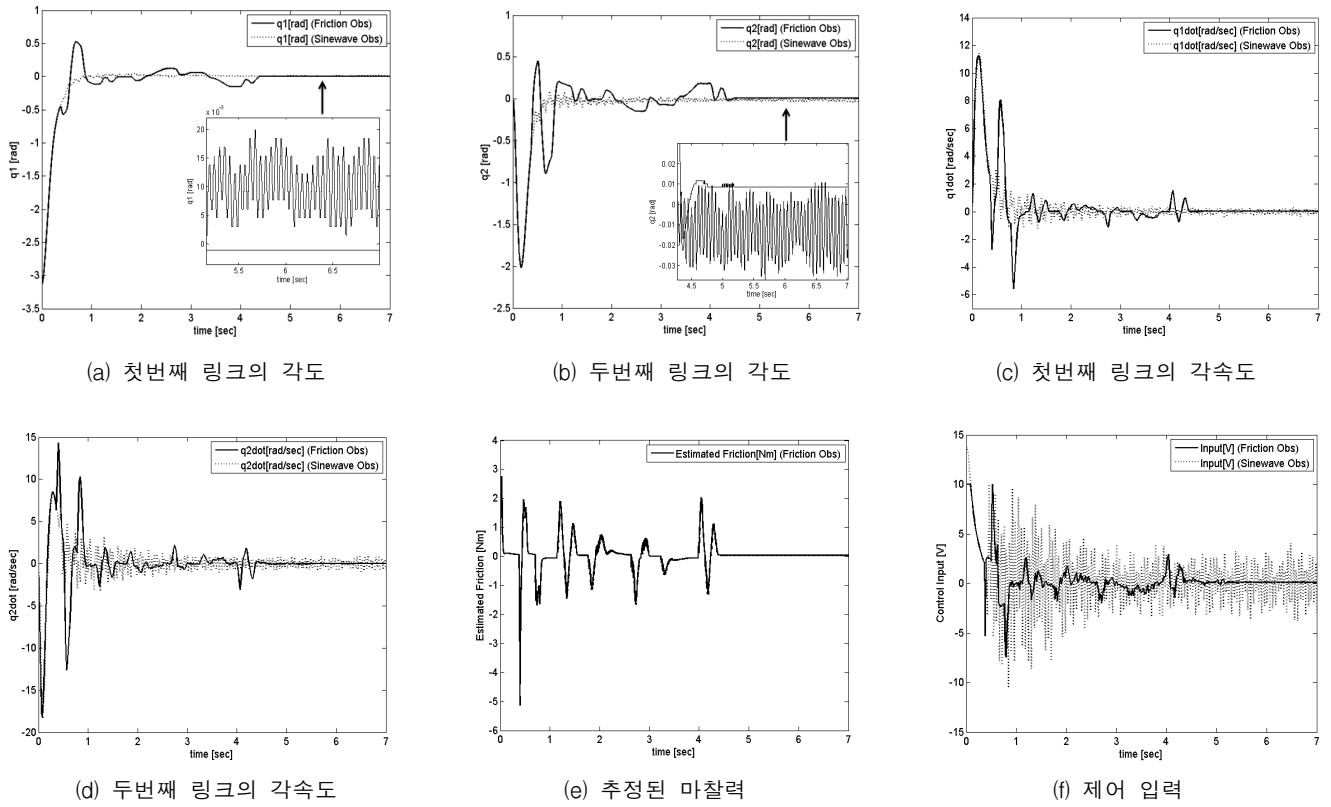


그림 4 마찰력 보상과 사인파형 외란 보상에 대한 안정화 실험 결과 비교

Fig. 4 The comparison of the experimental results at the friction force and sinewave disturbance compensator

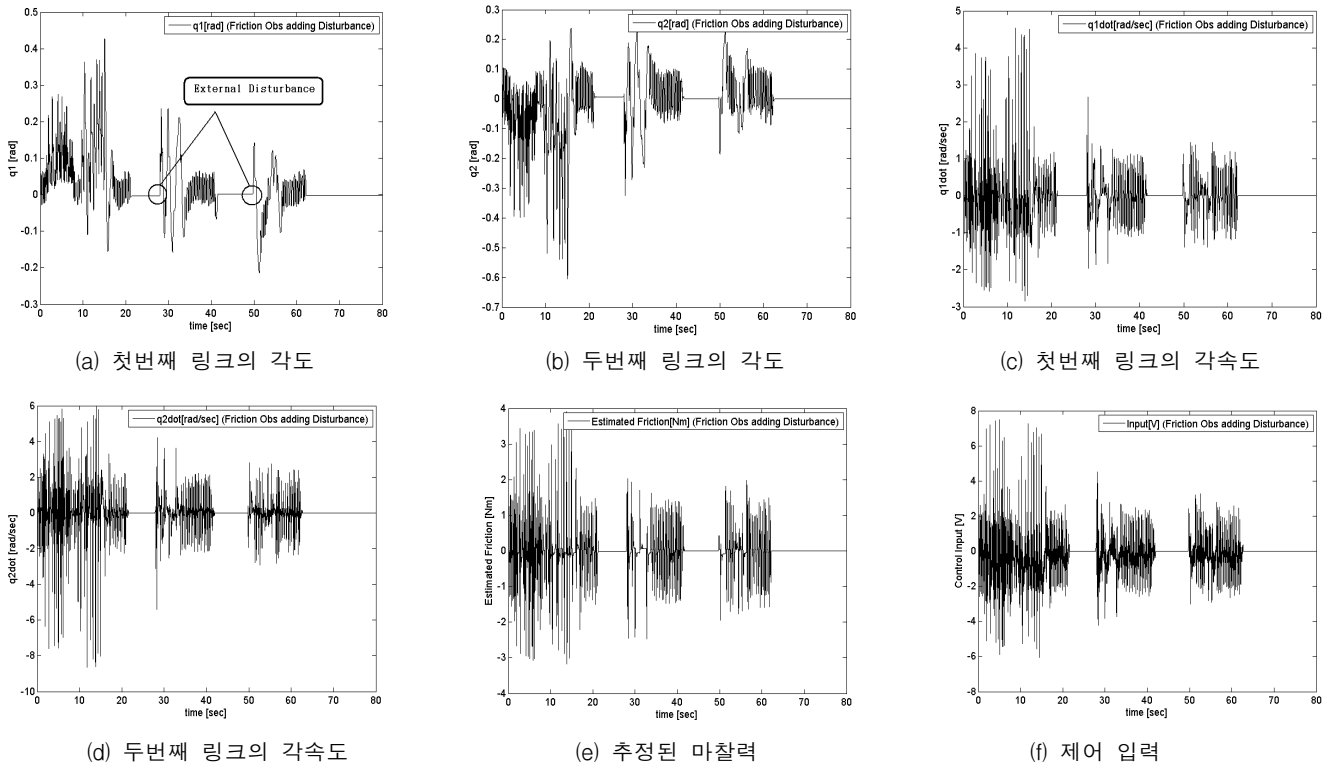


그림 5 외부 외란을 주었을 때 마찰력 보상에 의한 안정화 실험 결과

Fig. 5 The experimental results of friction compensation in the presence of the external disturbance

48초에서 외부 외란을 주었고 약 10초 동안 흔들리면서 다시 목표점으로 수렴하는 것을 볼 수 있다. 이는 마찰력이 실제 마찰력을 추정하는데 약간의 시간이 걸리고 평균적으로 약5-10초 정도이다. 따라서 제안한 마찰력 보상에 의한 선형제어기가 외부 외란에도 강인함을 확인하였다.

#### 4. 결 론

본 논문에서는 펜듈붐을 제어함에 있어 비선형 마찰력을 보상하기 위하여 LuGre 모델에 기반한 마찰력 보상기를 제안하였다. 기존의 연구들은 마찰력 보상기를 간단한 시스템에 적용하였으나, 불안정하며 정밀한 위치제어를 요구하는 시스템에서는 적용사례가 미약하다. 따라서 다른 보상기를 사용할 경우 완벽한 보상이 힘들었다. 제안한 보상기에 의한 제어는 목표점에 정확히 수렴을 하였으며 외부 외란을 가할 경우에도 시스템이 안정함을 확인하였다. 실험에서 마찰력 보상기가 실제 마찰력을 추정하는데는 시간이 걸린다. LuGre 모델에서의 마찰력 내부 변수  $z$ 는 속도에 종속된 변수이다. 결국 추정된 마찰력은 속도에 종속되어 LuGre 모델의 파라미터들은 마찰력을 추정하는데 크게 영향을 주지는 않지만 이 값이 정확해야 한다. 그러나 본 논문에서는 LuGre 모델의 파라미터들을 고정된 상수로 가정하고 실험을 하였다. 따라서 이 파라미터들을 추정을 하면서 LuGre 모델을 이용하여 마찰력 보상을 한다면 더욱더 빠르게 마찰력 추정이 가능할 것으로 보인다.

#### 감사의 글

이 논문은 2009년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. 2009-0075544)

#### 참 고 문 헌

- [1] Chung-Chun Kung, Ti-Hung Chen, Liang-Chih-Huang "Adaptive fuzzy sliding mode control for a class of underactuated systems," IEEE International Conference on Fuzzy Systems, pp. 1791-1796, Aug. 2009.
- [2] M. Lopez-Martinez, J.A. Acosta, J.M. Cano, "Non-linear sliding mode surfaces for a class of underactuated mechanical systems," IEEE Transactions on Control Theory&Applications, vol. 4, pp. 2195-2204, Oct. 2010.
- [3] Mingjun Zhang, Tzyh-jong Tarn, "Hybrid control of the Pendubot," IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, vol. 7, pp. 79-86, Mar. 2002.
- [4] Mingjun Zhang, Tzyh-jong Tarn, "Energy-Based Control for a Class of Under-Actuated Mechanical Systems," ImageandSignalProcessing 2008, vol. 3, pp. 139-143, May, 2008.
- [5] Isabelle Fantoni, Rogelio Lozano, Mark W. Spong, "Passivity based control of the Pendubot," in Proceedings of the American Conference San Diego, vol. 1, pp. 268-272, Jun, 1999.
- [6] E.N. Sanchez, V. Flores, "Real-Time Fuzzy PI+PD Control for an Underactuated Robot," in Proceedings of the 2002 IEEE International Symposium on intelligent Control Vancouver, pp. 137-141, Oct. 2002.
- [7] 전정효, 김철중, 좌동경, "외란 추정기를 이용한 펜듈붐 시스템의 사인파형 외란 보상," 대한전기학회 논문지, 제 59권 12호, pp. 2278-2283, 12, 2010.
- [8] C. Canudas de Wit, H. Olsson, K.J Åström, and P. Lischinsky, "A new model for control of systems with friction," IEEE Transactionson Automatic Control, vol. 40, no. 3, pp. 419-425, Mar. 1995.
- [9] C. Canudas de Wit, H. Olsson, K.J Åström, and P. Lischinsky, "Dynamic friction models and control design," in Proceedings of the 1993 American Control Conference, pp. 1920-1926, 1993.
- [10] J. Ishikawa, S. Tei, D. Hoshino, M. Izutsu, and N. Kamamichi, "Friction Compensation Based on the LuGre Friction Model," in Proceedings of the SICE Annual Conference2010, pp. 9-12, Aug. 2010.
- [11] L. Freidovich, A. Robertsson, A. Shiriaev, R. Johansson, "LuGre Model-Based Friction Compensation," IEEE Transactionson Control Systems Technology, vol. 18, pp. 194-200, 2010.
- [12] T. Dumitriu, M. Culea, T. Munteanu, E. Ceanga, "Friction Compensation for Accurate Positioning in DC Drive Tracking System," in Proceedings of the 2006 3rd International Conference on Electrical and Electronics Engineering, pp. 1-4, 2006.
- [13] M.W. Spong and D.J. Block, "The Pendubot : A mechatronic system for control research and education," IEEE Conferenceon Decision and Control, vol. 1, pp. 555-556, Dec. 1995.
- [14] D.J. Block, "Mechanical design and control of the pendubot," M. S. Thesis, University of Illinois, Urbana, Illinois, USA, 1996.
- [15] I. Fantoni, R. Lozano and M.W. Spong, "Energy based control of the pendubot," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 45, no. 4, pp. 725-2729, 2000.
- [16] Isabelle Fantoni and Rogelio Lozano, Non-linearControl for Underactuated Mechanical System. Springer, 2001.
- [17] H. Khalil, NonlinearSystems, Prentice Hall, Inc. 2002.

## 저 자 소 개



### 엄 명 환 (嚴明煥)

1981년 12월 12일생. 2009년 아주대 전자공학부 졸업. 2009년~현재 동 대학원 전자공학과 박사과정.

Tel : 031-219-2489

Fax : 031-212-9531

E-mail : mgy777@ajou.ac.kr



### 김 철 중 (金喆中)

1983년 3월 6일생. 2008년 아주대 전자공학부 졸업. 2008년~현재 동 대학원 전자공학과 박사과정.

Tel : 031-219-2489

Fax : 031-212-9531

E-mail : cjoong@ajou.ac.kr



### 좌 동 경 (左東京)

1971년 12월 23일생. 1995년 서울대 제어계측공학과 졸업. 2001년 동 대학원 제어계측공학과 졸업(공학). 2005년~현재 아주대 전자공학부 부교수.

Tel : 031-219-1815

Fax : 031-212-9531

E-mail : dkchwa@ajou.ac.kr