

다 개체 시스템의 상태 일치를 위한 이산 시간 출력 제한 협조 제어 알고리즘

논 문
60-3-25

Discrete-Time Output Feedback Algorithm for State Consensus of Multi-Agent Systems

김 재 용* · 이 진 영** · 김 정 수†
(Jae-Yong Kim · Jinyoung Lee · Jung-Su Kim)

Abstract - This paper presents a discrete-time output feedback consensus algorithm for Multi-Agent Systems (MAS). Under the assumption that an agent is aware of the relative state information about its neighbors, a state feedback consensus algorithm is designed based on Linear Matrix Inequality (LMI) method. In general, however, it is possible to obtain its relative output information rather than the relative state information. To reconcile this problem, an Unknown Input Observer (UIO) is employed in this paper. To this end, first it is shown that the relative state information can be estimated using the UIO and the measured relative output information. Then a certainty-equivalence type output feedback consensus algorithm is proposed by combining the LMI-based state feedback consensus algorithm with the UIO. Finally, simulation results are given to illustrate that the proposed method successfully achieves the state consensus.

Key Words : Multi-agent system, State consensus, Output feedback, Linear matrix inequality, Unknown input observer

1. 서 론

최근 사회적인 동향을 보면 시스템이 점점 소형화 대량화 되어 가면서 개체(agent)간의 상호 통신 및 협력을 통해 다 개체 군집 시스템(Multi-Agent System, 이후 MAS라 칭함)이 특정 목적을 달성하도록 하는 것이 중요한 문제로 대두되고 있다[1].

그 중에서도 특히 MAS를 이루는 개체의 상태 변수들이 개체 간 상호 통신을 이용해 하나의 상태로 수렴해가는 상태일치(state consensus) 문제가 주목을 받고 있다. 예를 들어, 다수의 이동 로봇이 하나의 장소에서 만나도록 하거나 (rendezvous problem) 또는 여러 비행체가 대형을 이루게 하는 문제(formation control)의 경우 각 로봇이나 비행체의 상태 변수들의 값이 초기치에 상관없이 같은 값을 가지도록 개체들 간에 통신(consensus algorithm)이 이루어져야 한다. 이러한 다 개체 시스템의 상태일치 문제를 풀기 위해서 각 개체 간에 상태 변수 정보를 주고받는다는 가정 하에 많은 연구들이 수행되었다[2-6]. 하지만 대부분의 연구가 연속 시간에 대한 결과들이고 이산 시간에 대한 연구가 드물다.

또한 실제에서는 각 개체의 상태 정보 대신 출력 정보만을 이용하여 개체 간 통신을 하는 경우가 많다. 그리하여 각 개체의 상태 변수 정보 전부를 알지 못하고 출력만 알

수 있는 상황에서 상태일치를 이루게 하는 협조 제어 알고리즘의 개발이 필요하다. 연속 시간에 대해서는 출력 정보만을 가지고 상태 일치를 이루는 연구가 존재한다[7,10]. 하지만 [7]의 경우는 수렴 속도가 느리고 제어 분리의 원칙(separation principle)을 만족하지 않게 된다는 단점이 있다.

따라서 본 논문에서는 결과 [10]에 대한 이산 시간 연구 결과를 소개한다. 즉 개체가 이산 시간 선형 시스템으로 모델링되어 있는 경우 협조 제어 이득을 선형 행렬 부등식(LMI: Linear Matrix Inequality)을 이용하여 설계하는 방법을 제안한 후 각 개체가 출력만을 주고받는 상황에서 미지 입력 관측기(UIO: Unknown Input Observer) 설계 기법에 기반한 협조 제어 알고리즘을 제안한다.

2. 본 론

2.1 상태일치 문제 정의

이산시간에서 협조 제어 문제의 대상을 다개체 시스템(MAS, Multi-Agent System)이라 하고 다음과 같이 선형 시불변 시스템으로 나타낸다.

$$\begin{aligned} x_i^+ &= Ax_i + Bu_i, & x_i &\in R^n, u_i \in R^m, y_i \in R^p \\ y_i &= Cx_i, & i &= 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 x^+ 와 x 는 각각 $x(k+1)$ 와 $x(k)$ 을 나타내고 MAS가 N 개의 선형 시스템으로 구성되어 있다고 가정한다. 주어진 MAS의 시스템 행렬 (A, B) 는 안정화 가능(stabilizable)하고 (A, C) 는 감지 가능(detectable)하다고 가정한다. 모든 개체의

* 준 회 원 : 서울대 공대 전기 컴퓨터 공학과 석사과정

** 비 회 원 : 삼성전자 반도체연구소

† 교신저자, 정회원 : 서울과학기술대학 제어계측공학과

E-mail : jungsu@seoultech.ac.kr

접수일자 : 2010년 12월 27일

최종완료 : 2011년 2월 8일

동역학 모델은 같고 초기값이 다른 경우를 고려한다.

정의 1: MAS (1)에 대해서 다음 조건이 만족할 때 상태 일치(state consensus)를 이루었다고 한다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_i(k) - x_j(k)) = 0, \quad \forall i, j. \quad (2)$$

협조 제어 문제는 제어를 상태일치 조건 (2)가 만족하도록 설계하는 문제이다. 이 논문에서는 (2)를 만족시키는 다음과 같은 형태의 입력 u_i 를 고려한다[3,6,10].

$$u_i = K \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_j - x_i). \quad (3)$$

여기서 K 는 이득 값인데 첨자가 없으므로 모든 개체가 하나의 이득 값으로 상태일치를 이루도록 입력 u_i 를 설계해야 한다는 의미가 된다. a_{ij} 는 각 개체 사이의 연결 여부를 나타낸다. 즉 i 번째 개체와 j 번째 개체가 연결이 있으면 $a_{ij}=1$ 연결이 없으면 $a_{ij}=0$ 이다. 결국 입력 u_i 의 의미는 다음과 같다. 각각의 개체들이 연결된(서로 통신할 수 있는) 개체들과의 정보 교환을 통하여 상태 정보를 주고받음으로써 협조 제어 문제를 해결한다는 것이다. 이제 이 연결 상태를 고려하여 전체 개체를 포함하는 MAS를 벡터 형식으로 표현하면 다음과 같다[5].

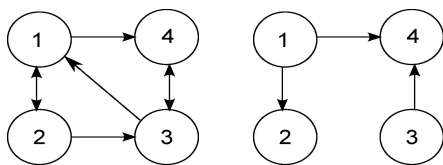
$$x^+ = [(I_N \otimes A) + (L \otimes BK)]x. \quad (4)$$

I_N 은 크기가 N 인 항등 행렬이고 $x = [x_1^T \ x_2^T \ \dots \ x_N^T]^T$ 이다. \otimes 는 크로네커 곱(Kronecker product)이고 L 은 주어진 MAS의 네트워크를 나타내는 a_{ij} 로 구성된 라플라시안 행렬(Laplacian matrix)로서 다음과 같이 정의된다.

$$L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (5)$$

$$l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{if } i \neq j \\ \sum_{k=1}^N a_{ik} & \text{if } i = j \end{cases}$$

라플라시안 행렬 (5)는 도식화되어 있는 각 개체들의 연결 상태를 수식적으로 잘 해결할 수 있도록 도와준다. 예를 들어 그림 1과 같은 연결 상태를 가진 개체들을 고려해보자.



(1) 신장트리를 포함하는 경우 (2) 신장트리를 포함하지 않는 경우

그림 1 연결 상태 예
Fig. 1 Example of network

그림 1-(1)은 4개의 개체들의 연결 상태를 나타낸다. 예를 들어 1번 개체는 2번 개체와 3번 개체로부터 정보를 전달받고 2번 개체와 4번 개체에게 정보를 전달하게 된다. 이를 라플라시안 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$L_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

그림 2 그림 1에 대한 라플라시안 행렬
Fig. 2 Laplacian matrices for Fig. 1

그림 2의 L_1 과 L_2 는 그림 1-(1), 1-(2)의 연결 상태를 라플라시안 행렬로 나타낸 것이다. 여기서 i 번째 행은 i 번째 개체로 정보를 주는 개체들을 나타내고 있다. 또한 대각 성분은 각 행의 합을 0으로 만드는 값이 된다. 예를 들어 L_1 의 1번 개체는 2, 3번 개체로부터 정보를 받기 때문에 l_{12}, l_{13} 성분이 -1이 되고 l_{11} 성분은 2가 된다. 이러한 특성에 따라 라플라시안 행렬은 0인 고유값을 반드시 한 개 이상 가지고 있고 0이 아닌 나머지 고유 값들은 거쉬고리안 정리(Gershgorian theorem)에 의하여 모두 열린 우방 평면에 존재하게 된다[11].

2.2 선형 행렬 부등식 기반 상태 궤환 상태일치 알고리즘

이장에서는 앞서 설명한 협조 제어 이득 K 를 설계하는 방법을 제안한다. 협조 제어 설계를 위하여 다음과 같은 가정이 필요하다.

가정 1: MAS의 연결 상태를 나타내는 그래프는 신장트리(Spanning tree)를 포함한다.

신장트리란 원래 연결 상태 그래프의 부분 그래프이면서 한 개체에서 나머지 모든 개체에 도달가능(reachable)한 트리를 말한다. 그림 1-(1)에서 1번 개체의 정보는 2, 3, 4번 개체에 도달가능 하므로 그림 1은 신장트리를 포함하게 된다. 반면에 그림 1-(2)와 같은 연결은 스스로를 제외하고 나머지 모든 개체에 정보를 줄 수 있는 개체가 없기 때문에 신장트리가 없는 경우가 된다. 결국 그래프 이론 관점에서 가정 1을 해석하면 협조 제어를 하기 위해서는 모든 개체에 정보 전달이 가능한 개체가 적어도 하나는 존재해야 한다. 위의 가정이 성립한다는 전체 하에서 이후의 모든 논의를 진행한다.

보조정리 1 [12, 5]: $A + \lambda_i(L)BK$ 에서 $\lambda_1(L)=0$ 이라고 놓고 $\lambda_i(L)$ 을 제외한 모든 i , 즉 $i=2,3, \dots, N$, 에 대해서 안정한 행렬(Schur)이면 MAS (1)은 조건 (2)를 만족하여 상태일치를 이룬다.

협조 제어 알고리즘을 위해서는 이득 K 가 N 개의 개체로 이루어진 MAS의 협조 제어 문제를 위하여 설계되어야 한다. 그런데 보조 정리 1을 살펴보면 이득 K 를 구하는 문제가

단일 개체의 강인 안정화(robust stabilization) 문제로 바꿀 수 있음을 볼 수 있다. 즉 이득 K 를 DC 게인(DC gain)에 복소수 형태의 불확정성(uncertainty)이 있는 하나의 선형 시스템을 안정화하도록 설계하면 보조 정리 1에 의하여 전체 MAS가 상태일치를 이룬다. 이러한 상태일치 조건은 많은 논문들에서 제시되었지만 대부분의 경우 개체 모델이 적분기인 경우를 다루어서 일반적인 선형시스템인 경우에는 그 결과를 적용하는 것이 힘든 경우가 대부분이다. 또한 개체 모델이 일반적인 이산시간 선형 시스템인 경우 이득 K 를 설계하는 방법이 제안된 사례는 드물다. 이 장에서는 선형 행렬 부등식 (LMI: Linear Matrix Inequality)를 이용하여 이산 시간에서 보조 정리 1에 소개된 조건을 만족하는 이득 K 를 구하는 방법을 제시한다.

보조 정리 2: $0 < \epsilon < 1$ 에 대해서 다음 부등식을 만족하는 대칭 양행렬(positive definite) P 가 존재하면

$$A^T P A - P < -(1 - \epsilon^2) P \quad (6)$$

행렬 A 의 모든 고유값(eigenvalue)의 크기는 ϵ 보다 작다 ($|\lambda(A)| < \epsilon$).

증명. 수식 (6)의 우변이 음이므로 리아푸노프 부등식에 의해서 $|\lambda(A)| < 1$ 이다. 또한 수식 (6)에 의해 다음 부등식이 성립한다.

$$A^T P A - \epsilon^2 P < 0. \quad (7)$$

이 부등식은 다음 부등식과 동치이다.

$$\left(\frac{A}{\epsilon}\right)^T P \left(\frac{A}{\epsilon}\right) - P < 0. \quad (8)$$

새로운 행렬 $\bar{A} = \frac{A}{\epsilon}$ 을 정의하면 수식 (8)은 이 새로운 행렬에 대한 리아푸노프 부등식이 된다. 즉 다음이 성립한다.

$$\bar{A}^T P \bar{A} - P < 0 \quad (9)$$

이는 $|\lambda(\frac{A}{\epsilon})| < 1$ 를 의미하므로 $|\lambda(A)| < \epsilon$ 이다. ■

이제 이를 바탕으로 보조 정리 1을 만족하는 이득 K 를 설계하는 방법을 제시한다.

정리 1 [4]: MAS (1)과 수식 (3)의 형태를 가지는 협조 제어 알고리즘을 고려할 때, $0 < \chi < 1$ 에 대하여 다음 선형 행렬 부등식을 만족하는 대칭 양행렬 $Q \in R^{m \times n}$ 와 행렬 $Y \in R^{m \times n}$ 가 존재하면

$$\begin{bmatrix} \chi^2 Q & * & * & * \\ 0 & \chi^2 Q & * & * \\ A Q - \sigma_i B Y & -\omega_i B Y & Q & * \\ \omega_i B Y & A Q - \sigma_i B Y & 0 & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (10)$$

이득 $K = Y Q^{-1}$ 는 $|\lambda(A + \lambda_i(L)BK)| < \chi$ ($i=2, \dots, N$)을 만족하게 하여 MAS (1)은 상태일치를 이룬다. 여기서 $\lambda_i(L) = \sigma_i + j\omega_i$ 이고 $i=1, \dots, N$ 이며 *는 대각선을 기준으로 대칭 위치에 있는 행렬의 전치 행렬을 의미한다.

증명: $A + \lambda_i(L)BK$ ($i=2, \dots, N$)의 고유값은 각각의 i 에 대해서 다음 선형 시스템의 극값(pole)과 같다.

$$q^+ = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}}_A q^- - \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_i B & \omega_i B \\ -\sigma_i B & \omega_i B \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}}_K q \quad (11)$$

따라서 $0 < \chi < 1$ 에 대하여 다음을 만족하는 대칭 양행렬 \tilde{P} 가 존재하면

$$\tilde{A}^T \tilde{P} \tilde{A} - \tilde{A}^T \tilde{P} \tilde{B} \tilde{K} - \tilde{K}^T \tilde{B}^T \tilde{P} \tilde{A} + \tilde{K}^T \tilde{B}^T \tilde{P} \tilde{B} \tilde{K} < \chi^2 \tilde{P} \quad (12)$$

보조 정리 2에 의해서 행렬 $A + \lambda_i(L)BK$ 의 고유값의 크기는 χ 보다 작게 된다. 이후 전개를 위해 다음과 같은 행렬들을 정의한다.

$$\begin{aligned} \tilde{A}_c &= \tilde{A} - \tilde{B} \tilde{K}, \quad Q = P^{-1}, \quad Y = KP^{-1} = KQ, \\ \tilde{Q} &= \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}, \quad \tilde{Y} = \begin{bmatrix} KQ & 0 \\ 0 & KQ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이 정의들을 이용하면 부등식 (12)에 대해서 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} & \tilde{A}^T \tilde{P} \tilde{A} - \tilde{A}^T \tilde{P} \tilde{B} \tilde{K} - \tilde{K}^T \tilde{B}^T \tilde{P} \tilde{A} + \tilde{K}^T \tilde{B}^T \tilde{P} \tilde{B} \tilde{K} < \chi^2 \tilde{P} \\ \Leftrightarrow & \chi^2 \tilde{P} - \tilde{A}_c^T \tilde{P} \tilde{A}_c > 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} \chi^2 \tilde{P} & \tilde{A}_c^T \tilde{P} \\ \tilde{P} \tilde{A}_c & \tilde{P} \end{bmatrix} > 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} \chi^2 \tilde{P} & \tilde{A}^T \tilde{P} - \tilde{K}^T \tilde{B}^T \tilde{P} \\ \tilde{P} \tilde{A} - \tilde{P} \tilde{B} \tilde{K} & \tilde{P} \end{bmatrix} > 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} \tilde{P}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{P}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi^2 \tilde{P} & \tilde{A}^T \tilde{P} - \tilde{K}^T \tilde{B}^T \tilde{P} \\ \tilde{P} \tilde{A} - \tilde{P} \tilde{B} \tilde{K} & \tilde{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{P}^{-1} \end{bmatrix} > 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} \chi^2 \tilde{Q} & \tilde{Q} \tilde{A}^T - \tilde{Y}^T \tilde{B}^T \\ \tilde{A} \tilde{Q} - \tilde{B} \tilde{Y} & \tilde{Q} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned}$$

위의 마지막 행렬의 (2,1) 요소는 다음과 같이 바꾸어 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & \tilde{A} \tilde{Q} - \tilde{B} \tilde{Y} \\ & = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_i B & \omega_i B \\ -\omega_i B & \sigma_i B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} A Q - \sigma_i B Y & -\omega_i B Y \\ -\omega_i B Y & A Q - \sigma_i B Y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

따라서 수식 (10)를 만족하면 $A + \lambda_i(L)BK$ 의 고유값의 크기는 χ 보다 작게 되고 χ 는 가정에서 1보다 작다고 하였으므로 $A + \lambda_i(L)BK$ 의 고유값의 크기는 1보다 작게 된다. 이산시간에서 고유값이 1보다 작게 되면 안정한 행렬이 되므로 보조 정리 1에 의해서 MAS (1)은 상태일치를 이루게 된다. ■

따라서 정리 1에서 제안된 선형 행렬 부등식을 만족시키는 Q 와 Y 를 구하면, MAS가 상태일치를 이루는 이득행렬 K 를

얻을 수 있게 된다.

2.3 미지 입력 관측기 기반 출력 궤환 상태일치 알고리즘

이산 시간 개체들로 구성된 MAS에서 개체들끼리 상태 변수 정보를 주고받는 상황에서 상태일치 문제는 보조 정리 1을 이용하면 해결된다. 하지만 실제에서는 각 개체의 상태 변수 정보 보다는 출력정보만을 서로 교환하는 경우가 많다. 그러므로 각 개체의 상태 변수 정보를 알지 못하는 상황에서 출력 정보만을 가지고 상태일치를 이루는 협조 제어 알고리즘이 필요하다. 이를 위해 먼저 상대적인 출력 정보를 다음과 같이 나타내기로 한다.

$$\delta_i := \sum_{j=1}^N a_{ij}(y_j - y_i) = C \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j - x_i). \quad (13)$$

$\delta_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}(y_j - y_i)$ 를 이용하여 $\sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j - x_i)$ 를 추정할 수만 있다면 2.2장에서 제안된 협조 제어 알고리즘을 사용하여 상태일치를 이룰 수 있게 된다. 이 장에서는 다음과 같은 형태의 출력 궤환 협조 제어기를 제안한다[9].

$$\begin{aligned} z_i^+ &= (PA - FC)z_i + L\delta_i, \\ u_i &= Gz_i + H\delta_i, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (14)$$

설계된 출력 궤환 협조 제어기는 각 개체들 간의 상대적인 출력 정보를 받아서 조건 (2)를 만족하는 입력값 u_i 를 만들어내는 제어기이다. 따라서 앞에서 언급한 바와 같이 출력 궤환 협조 제어기가 원래 개체의 상대적인 상태 변수 ($\sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j - x_i)$)를 잘 추정한다면 상태 궤환 상태일치 알고리즘에 의해서 MAS는 상태일치를 이루게 된다. 원래 개체의 상대적인 상태 변수를 추정하기 위해서 다음을 정의한다.

$$\begin{aligned} \rho_i &:= \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j - x_i), \\ \gamma_i &:= \sum_{j=1}^N a_{ij}(u_j - u_i). \end{aligned} \quad (15)$$

이렇게 정의된 ρ_i, γ_i 를 (1)식에 대입하여 식을 전개하면 다음과 같은 시스템을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \rho_i^+ &= A\rho_i + B\gamma_i, \\ \delta_i &= C\rho_i, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (16)$$

또한 (3)은 (15)를 대입하면 다음과 같이 표현 된다.

$$u_i = K\rho_i \quad (17)$$

수식 (16)에서 ρ_i 는 상태 궤환 협조 제어를 위하여 추정하고자 하는 원래 개체들 간의 상대적인 상태 변수이고 γ_i 는 상대적인 입력 정보이다. 결국 주변 개체들 사이의 입력 정보

γ_i 를 알 수 없는 상태에서 상대적인 상태 변수 ρ_i 를 추정하는 문제로 귀결된다. 이는 미지 입력 관측기가 하는 역할과 비슷하다는 것을 알 수 있다. 따라서 적절히 설계된 UIO를 이용하여 미지의 γ_i 에 대해서 δ_i 정보만을 가지고 ρ_i 를 추정할 수 있다면 출력 궤환에 의한 상태일치 문제가 상태 궤환에 의한 상태일치 문제로 해결될 수 있을 것이다.

2.3.1 미지 입력 관측기

상태 변수를 추정하기 위해 미지 입력 γ_i 에 대한 전 차수 미지 입력 관측기(Full-order UIO: Unknown Input Observer)를 고려한다. (16)을 위한 미지 입력 관측기는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} z_i^+ &= (PA - FC)z_i + L\delta_i \quad i = 1, \dots, N \\ \hat{\rho}_i &= z_i - E\delta_i \quad z_i \in \mathbb{R}^n, \rho_i \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (18)$$

$P = I_n + EC$, $rank(B) = m$, $rank(C) = p$ 이고 $p \geq m$ 이라고 가정한다.

보조 정리 3[8]: (16)과 같은 시스템에서 다음과 같은 조건이 성립하면 수렴하는 미지 입력 관측기 (18)은 존재한다.

- (i) $rank(CB) = rank(B) = m$
- (ii) (PA, C) 는 감지 가능(detectable)하다.

미지 입력 관측기는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} E: E &= -B(CB)^+ + Y(I_p - (CB)(CB)^+), \\ Y: Y & \text{ 차수를 만족하는 임의의 행렬.} \\ F: F &= PA - FC \text{ 가 점근적으로 안정하게 되는 행렬.} \\ L: L &= F(I_p + CE) - PAE. \end{aligned} \quad (19)$$

2.3.2 출력 궤환 상태일치 알고리즘

이 장에서는 2.3.1의 미지 입력 관측기를 이용한 출력 궤환 알고리즘이 상태일치를 이룸을 보인다.

정리 2: MAS (1)과 수식 (3)의 형태를 가지는 협조 제어 알고리즘을 고려할 때, 정리 1과 보조 정리 3의 조건을 만족하면 출력 궤환 협조 제어기 (14)는 상태일치를 이루게 된다. 여기서 $P = I_n + EC$, F, E, Y, L 은 (19)의 조건을 만족하고 $G = K$, $H = -KE$ 이며 K 는 정리 1의 이득이 된다.

증명: 증명 과정은 다음과 같다. 먼저 미지 입력 관측기(UIO: Unknown Input Observer)의 출력 $\hat{\rho}_i$ 가 상대적인 상태 변수 ρ_i 로 점근적으로 수렴하는 것을 보이고 이렇게 추정된 $\hat{\rho}_i$ 을 이용하여 출력 궤환 협조 제어 알고리즘 (14)에 의해 MAS가 상태일치를 이룸을 보인다.

상대적인 상태 변수의 추정을 보기 위해서 MAS (1)에 (15)를 대입하여 전개하면 (16)과 같은 시스템이 되어 원래의 동특성을 유지하게 된다. 그리고 관측기 에러를 다음과 같이 정의한다.

$$\epsilon_i = \rho_i - \hat{\rho}_i = \rho_i - z_i + E\delta_i$$

그럼 다음과 같은 관측기 오차 동특성을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_i^+ &= \rho_i^+ - \hat{\rho}_i^+ = \rho_i^+ - z_i^+ + E\delta_i^+ = \rho_i^+ - z_i^+ + EC\rho_i^+ \\ &= (I_n + EC)\rho_i^+ - z_i^+ \\ &= (I_n + EC)(A\rho_i + B\gamma_i) - (PA - FC)z_i - L\delta_i \\ &= P(A\rho_i + B\gamma_i) - (PA - FC)z_i - [F(I_p + CE) - PAE]\delta_i \\ &= PA\rho_i + PB\gamma_i - PAz_i + FCz_i - F(I_p + CE)\delta_i + PAE\delta_i \\ &= PA\rho_i - PAz_i + PAE\delta_i - FC\rho_i + FCz_i - FCE\delta_i + PB\gamma_i \\ &= PA(\rho_i - z_i + E\delta_i) - FC(\rho_i - z_i + E\delta_i) + PB\gamma_i \\ &= (PA - FC)\epsilon_i + PB\gamma_i \\ &= (PA - FC)\epsilon_i \end{aligned}$$

여기서 Y 를 영행렬이라고 놓고 보조 정리 3의 (1)을 적용하면 $PB = (I_n + EC)B = B + (-B(CB)^+(CB)) = 0$ 이 되어 마지막 수식이 얻어진다. 또한 보조 정리 3의 (ii)로 부터 적절한 F 를 찾으면 $(PA - FC)$ 는 점근적으로 안정한 행렬이 된다. 따라서 관측기 오차 ϵ_i 가 0으로 수렴해가므로 $\hat{\rho}_i$ 가 ρ_i 로 수렴해 가면서 원래 개체의 상대적인 상태 변수를 추정하게 된다. 이렇게 추정된 값을 협조 제어 (17)에 이용하면

$$u_i = K\hat{\rho}_i \tag{20}$$

가 되고 $\rho_i = \hat{\rho}_i - \epsilon_i$ 이므로

$$u_i = K\hat{\rho}_i = K \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j - x_i) - K\epsilon_i$$

가 되면서 다음과 같은 페루프 시스템을 생각할 수 있다.

$$x_i^+ = Ax_i + BK \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j - x_i) - BK\epsilon_i$$

$x = [x_1^T \ x_2^T \ \dots \ x_N^T]^T$, $\epsilon = [\epsilon_1^T \ \epsilon_2^T \ \dots \ \epsilon_N^T]^T$ 이므로 (4)와 같이 크로네커 곱의 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x^+ &= [(I_N \otimes A) + (L \otimes BK)]x - (I_N \otimes BK)\epsilon \tag{21} \\ \epsilon^+ &= [I_N \otimes (PA - FC)]\epsilon \end{aligned}$$

여기서 $(I_N \otimes A) + (L \otimes BK)$ 부분은 각각의 개체별로 해석하면 $A + \lambda_i(L)BK$ 와 같다. 정리 1에 의해서 $A + \lambda_i(L)BK$ 를 안정하게 만드는 이득 K 를 찾을 수 있었고 보조 정리 3에 의해서 $PA - FC$ 인 동특성을 가진 각 개체의 관측기 오차 ϵ_i 가 모두 0으로 수렴해 가는 것을 알 수 있었다. 결국 앞선 두 성질에 의해서 페루프 시스템 (21)은 보조 정리 1의 조건을 만족하여 상태일치를 이루게 된다. ■

정리 2에서는 출력 궤환 협조 제어기를 통해 상태일치를 이루는 알고리즘을 제안하였다. 하지만 의도적으로 추가된 제어기는 원래 MAS 페루프 시스템의 동특성을 해치지 않게 고려되어야 한다. 이를 제어 분리의 원칙(separation

principle)이라고 한다. 제어 분리의 원칙이 성립하는지 여부를 보기 위해 먼저 (21)을 행렬의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} x^+ \\ \epsilon^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_N \otimes A) + (L \otimes BK) & -(I_N \otimes BK) \\ 0 & I_N \otimes (PA - FC) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon \end{bmatrix}$$

이 행렬은 블록 상 삼각 행렬이므로 $(I_N \otimes A) + (L \otimes BK)$ 의 고유값과 $I_N \otimes (PA - FC)$ 의 고유값의 합집합으로 전체 페루프 시스템의 고유값이 이루어진다. 그러므로 출력 궤환 협조 제어기를 추가하여도 원래 페루프 시스템의 동특성에는 영향을 주지 않게 된다. 이는 곧 주어진 페루프 시스템이 제어 분리의 원칙을 만족한다는 뜻이 된다.

3. 모 의 실험

모의실험을 위해 다음과 같은 동특성을 지닌 4대의 개체를 고려한다.

$$A = \begin{bmatrix} 0.23073 & 0.1311 & 0.1571 \\ 0.0868 & 0.95344 & 0.0867 \\ 0.0091 & 0.1726 & 0.42484 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.6797 \\ 0.6551 \\ 0.1626 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

각 개체들의 연결은 그림 2-(1)과 같다고 가정하면 라플라시안 행렬은 그림 2의 L_1 과 같게 나타나게 되고 신장트리를 포함하므로 가정 1을 만족시킨다. χ 를 0.99로 놓고 정리 1을 적용하면 이득 K 는

$$K = [0.0842 \ 0.2904 \ 0.0911]$$

와 같이 주어진다. 이후 각 개체의 입력을 앞에서 구한 이득 K 를 이용하여 수식 (3)에 적용하면 그림 3과 같은 결과를 얻을 수 있다.

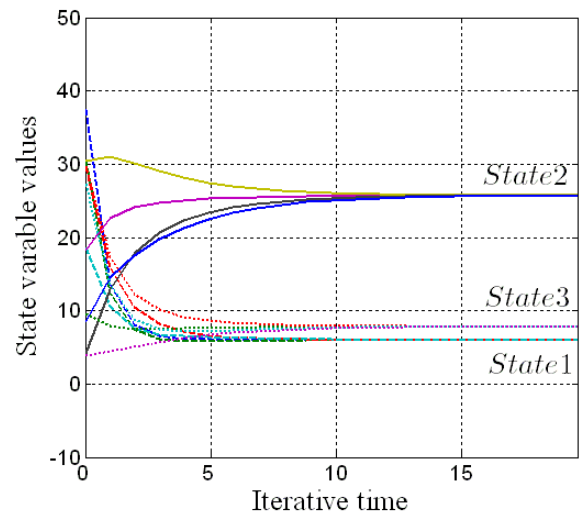


그림 3 상태일치를 이루는 상태 변수들
Fig. 3 State consensus of state variables

그림 3을 보면 4대의 개체의 상태 변수들이 3개의 값 (State1, State2, State3)으로 상태일치를 이루는 것을 알 수 있다.

출력 케환에 대한 결과를 보면, $rank(CB) = rank(B) = 1$ 이고 우방 평면에 존재하는 PA행렬의 모든 고유값에 대해서 PBH(Popov - Belevitch - Hautus) 랭크 테스트를 한 결과가 전 랭크(full rank)를 가지므로 감지 가능하고 보조 정리 3에 의해서 미지 입력 관측기가 존재한다. 행렬 F 는 행렬 $PA-FC$ 를 점근적으로 안정하게 만드는 행렬로 여기서는 다음과 같이 설정한다.

$$F = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -1 & -0.25 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이렇게 설계된 관측기는 다음과 같다.

$$PA-FC = \begin{bmatrix} -0.4323 & -0.4133 & 0.0323 \\ 0.9297 & 0.6788 & -0.0335 \\ -0.0299 & 0.0424 & 0.3950 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0.0734 & -0.4111 \\ -0.1830 & 0.5374 \\ 0.0547 & 0.0527 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} -0.5184 & -0.4997 \\ -0.4997 & -0.4816 \\ -0.1240 & -0.1195 \end{bmatrix}, Y = 0.$$

$PA-FC$ 행렬의 고유값은 $0.1234 + 0.2792i$, $0.1234 - 0.2792i$, 0.3947 이기 때문에 안정한 행렬이 되어 상대적인 상태 변수 ρ_i 를 추정하게 된다.

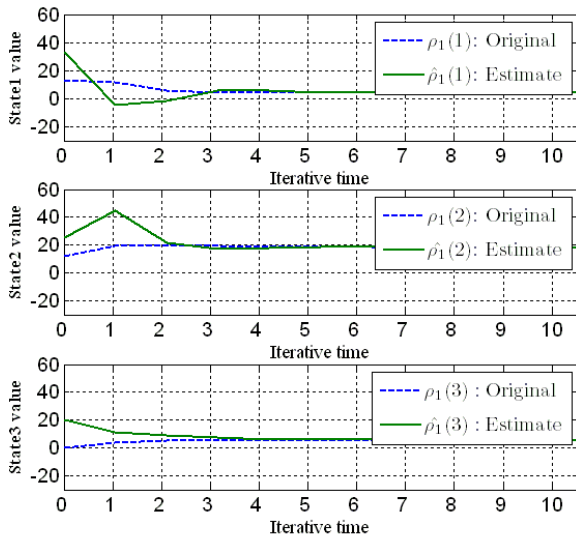


그림 4 미지 입력 관측기의 상태 추정 결과 (1번 개체)
Fig. 4 State and its estimate from UIO (Agent 1)

그림 4를 보면 1번 개체의 미지 입력 관측기의 출력이 상대적인 상태 변수 ρ_i 를 추정하는 것을 알 수 있다. 선형 행렬 부등식으로 구한 이득 K 와 미지 입력 관측기에서 추정된 상대적인 상태 변수를 이용하여 (20)를 구하면 정리 2에 의하여 MAS는 상태일치를 이루게 된다.

4. 결 론

본 논문에서는 이산시간에서 다개체 시스템의 상태 일치 문제를 위해 협조 제어를 위한 이득을 선형 행렬 부등식을 이용하여 구하는 방법을 제안하였다. 또한 상태 변수를 주고받는다는 조건을 완화하기 위하여 미지 입력 관측기를 이용하여 출력 케환 협조 제어를 제안하였다. 하지만 미지 입력 관측기의 존재성을 위해서는 다소 강한 가정 ($rank(CB) = rank(B) = m$)이 필요하다. 따라서 추후에 연구해야 할 내용으로는 미지 입력 관측기 존재성의 가정을 완화하며 출력 케환을 통한 상태 일치 연구를 들 수 있겠다.

참 고 문 헌

- [1] Fax, J.A. and Murray, R.M. "Information flow and cooperative control of vehicle formations," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 49, no. 9, pp. 1465-1476, 2004
- [2] P. Wieland, J.-S. Kim, and F. Allgower, "On topology and dynamics of consensus among linear high-order agents," International Journal of Systems Science, in press, 2011
- [3] J. Wang, D. Cheng, and X. Hu. "Consensus of multi-agent linear dynamic systems." Asian Journal of Control, 10, pp. 144-155, 2008
- [4] J. Lee and J.-S. Kim, "Discrete Time Consensus Problem using Optimal Control," ICROS-SICE International Joint. Conference. 2009
- [5] S. E. Tuna, "LQR-based coupling gain for synchronization of linear systems." Arxiv:0801.3390, 2008
- [6] J. Lee and J.-S. Kim, "Disc margins of the discrete-time LQR and its application to consensus problem," International Journal of Systems Science, in press, 2011
- [7] J. H. Seo, H. Shim, and J. Back. "Consensus of high-order linear systems using dynamic output feedback compensator: low gain approach." IEEE Transactions on Automatica Control, 11, pp. 2659-2664, 2009
- [8] M. Darouach, M. Zasadzinski, and S. J. Xu, "Full-order observers for linear systems with unknown inputs," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 39, no. 3, pp. 606-609, 1994
- [9] P. Wieland and F. Allgower, "On Consensus among Identical Linear Systems using Input-Decoupled Functional Observers," in Proc. Amer. Control Conference, pp. 1641-1646, 2010
- [10] P. Wieland, "From static to dynamic couplings in consensus and synchronization among identical and non-identical systems", Ph.D Thesis, University of Stuttgart, 2010
- [11] Reinhard Diestel, "Graph Theory", 4th Ed.,

Springer-Verlag, 2010

- [12] J. Lee, "Discrete-time consensus algorithms design using optimal control", Master Thesis, Seoul National University, 2010

저 자 소 개



김재용 (金宰用)

1983년 8월 25일생. 2010년 서울대학교 전기공학부 졸업. 2010~현재 동 대학원 전기컴퓨터공학부 대학원 석사 과정

Tel : 02-880-9053

Fax : 02-885-4459

E-mail : hobas37@cdsl.kr



이진영 (李珍寧)

1981년 7월 3일생. 2008년 고려대학교 산업공학과 졸업. 2010년 서울대 전기컴퓨터공학부 대학원 졸업. 2010~현재 삼성전자 반도체연구소

Tel : 02-880-9053

Fax : 02-885-4459

E-mail : jylee@cdsl.kr



김정수 (金正洙)

1998, 2005년 고려대학교 전기공학과 학사와 박사 학위. 2005년 서울대학교 박사 후 연구원, 2006-2007년 독일 Stuttgart 대학 박사 후 연구원, 2008년 영국 Leicester 대학 박사 후 연구원, 2009년~현재 서울과학기술대학교 제어 계측공학과 조교수

Tel : 02-970-6547

Fax : 02-949-2654

E-mail : jungsu@seoultech.ac.kr