응용통계연구 (2011)
24(1), 61–69
DOI: 10.5351/KJAS.2011.24.1.061

이차형식 변동성 Q-GARCH 모형의 비교연구

박진아[1] · 최문선[2] · 황선영[3]

[1]숙명여자대학교 통계학과, [2]숙명여자대학교 통계학과, [3]숙명여자대학교 통계학과

(2010년 10월 접수, 2010년 12월 채택)

요 약

다양한 GARCH류 모형들의 변동성 함수를 살펴보면 흥미롭게도 거의 대부분 모형에서 수익률의 일차항(first order term)이나 수익률과 변동성의 교차항(interaction term)이 나타나지 않는다. 일차항과 교차항은 변동성의 비대칭성을 설명하는 역할을 할 수 있으며 h_t의 회귀분석식의 형태로 볼 때 변동성 함수의 일반적인 이차형식(quadratic form)을 구성한다고 할 수 있다. 본 논문에서는 변동성과 수익률들 사이의 교차항 및 일차항을 포함한 이차형식(quadratic form) 변동성 모형들을 소개하고, 국내 금융시계열 자료에 적용한 후 비교 분석하고자 한다.

주요용어: 변동성(volatility), 이차형식(quadratic) Q-GARCH, BL-GARCH.

1. 서론

주가, 이자율, 환율 등과 같은 금융시계열의 변동성(volatility, 조건부 분산, h_t로 표현)을 보면 급첨(leptokurtic; heavy-tail)성질과 변동성 집중(volatility clustering)현상 등과 같은 일반적인 시계열에서는 잘 나타나지 않는 몇 가지 성질들을 쉽게 발견할 수 있다. 이 같은 특징을 Engle (1982)이 처음 ARCH 모형으로 제시한 이후, Bolleslev (1986)의 GARCH 모형과 Hass (2009)의 AVGARCH(absolute value GARCH) 등 다양한 형태의 ARCH류 모형이 개발되었다. 그러나 GARCH 모형의 경우 현재의 변동성과 과거 수익률들 사이의 비대칭적 관계를 반영하기 어려운 문제가 많이 나타나고 있어, 최근 연구에서는 이런 변동성의 비대칭성을 강조하는 분계점-비대칭 TGARCH(threshold GARCH) 모형이 Rabemananjara와 Zakoian (1993), Glosten 등 (1993)에 의해 개발되었다. 변동성 h_t는 근본적으로 수익률의 제곱함수이다. 기존의 많은 GARCH류 모형들의 변동성 함수를 살펴보면 수익률의 제곱항은 있으나 흥미롭게도 거의 대부분의 모형에서 수익률의 일차항(first order term)이나 수익률과 변동성의 교차항(interaction term)은 나타나지 않는다. 일차항과 교차항은 변동성의 비대칭성을 설명하는 역할을 할 수 있으며 h_t의 회귀분석 수식의 형태로 볼 때 변동성 함수의 일반적인 이차형식(quadratic form)을 구성한다고 할 수 있다. Sentana (1995)에 의해 제안된 GQARCH(generalized quadratic ARCH) 모형은 변동성에 과거 수익률과 수익률들의 교차항을 포함함으로써 변동성의 비대칭성을 설명하였고, Storti와 Vitale (2003)은 이전 시점의 변동성과 수익률의 교차항을 이용한 BL-GARCH(bilinear GARCH) 모형을 제안하였다. 본 논문에서는 변동성과 수익률들 사이의 교차항 및 일차항을 포함한 이차형식(quadratic form) 변동성 모형에 대해 소개하고, 국내 금융시계열 자료에 적용한 후 비교 분석하고 있으며 기존의 이차형식 변동성 모형들을 Q-GARCH로 통합하여 부르기로 한다.

박진아의 연구는 2010년 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임[NRF-2010-355-C00011]. [NRF-2009-008477]의 부분적 지원도 사사함.

[3]교신저자: (140-742) 서울특별시 용산구 청파동 2가, 숙명여자대학교 통계학과, 교수. E-mail: shwang@sm.ac.kr

2. 이차형식 변동성 Q-GARCH 모형

ARCH 모형 (Engle, 1982)은 현재 시점의 조건부 분산을 과거시점의 오차항(수익률) 제곱의 선형함수로 표현하였다. Bollerslev (1986)는 다음과 같은 GARCH 모형을 제안하였다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \sqrt{h_t} e_t, \\ h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j h_{t-j}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

여기서, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$을 의미하고, $\{e_t\}$는 평균 0이고 분산 1인 *i.i.d.* 과정이다.

GARCH 모형에서 현재의 조건부 분산은 단지 과거 오차항들의 크기에만 영향을 받고 그 부호와는 무관하다. 이는 좋은 정보(good news; $\varepsilon_{t-1} > 0$)와 나쁜 정보(bad news; $\varepsilon_{t-1} < 0$)에 따라 다르게 반응하는 자산시장에서의 "leverage effect"를 설명할 수 없는 단점을 가진다. Black (1976)에 의해 처음 제시된 "leverage effect"란 자산수익률의 하락이 가격 변동성을 증가시킨다는 가설로 통계학에서는 과거의 오차항들과 현재의 조건부 분산 사이에 음의 상관관계가 존재함을 의미한다. 따라서 오차항의 평균을 중심으로 대칭적인 크기의 변화만을 반영하는 GARCH 모형은 좋은 정보에 대한 변동성은 과대 추정하고 나쁜 정보에 대한 변동성은 과소 추정하는 경향을 갖는다. 이러한 문제를 해결하기 위해 오차항들과 현재의 조건부 분산 사이에 상관관계를 반영할 수 있는 일반적인 구조로의 확장에 대한 연구들이 많이 진행되어 왔다. 아래에 소개되는 여러 가지 Q-GARCH 모형들은 비교 목적에 따라 수식만을 간략히 제시하고 있으나 추후 이론 전개에 필요한 모형들의 이론적 성질(예, 모수추정량의 성질, 강정상성, 적률의 존재 조건 등)에 대해서는 제시된 문헌을 참고하기 바란다.

2.1. GQARCH 모형

비대칭 효과를 설명하기 위해 Sentana (1995)는 과거 수익률의 선형함수와 수익률들의 교차항(interaction)을 이용한 조건부 분산 모형을 제시하였다. GQARCH(r, s) 모형은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \sqrt{h_t} e_t \\ h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{r} \delta_i \varepsilon_{t-i} + 2 \sum_{i \neq j} \zeta_{i,j} \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-j} + \sum_{k=1}^{s} \beta_k h_{t-k}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

특히, 일차 모형인 GQARCH$(1,1)$ 모형은 다음과 같다.

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2, + \delta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_1 h_{t-1}. \tag{2.3}$$

조건부 분산 h_t가 양수이기 위해 $\alpha_0 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\delta_1 < 4\alpha_0\alpha_1$인 조건을 필요로 한다. 또한, δ_1이 음수이면 조건부 분산은 ε_{t-1}이 양수일 때 보다 음수일 때 더 크게 영향을 받게 되므로 "leverage effect"를 조절하는 모수의 역할을 한다.

2.2. Bilinear GARCH(BL-GARCH) 모형

Storti와 Vitale (2003)은 조건부 분산을 다음과 같이 표현한 Bilinear GARCH 모형을 제시하였다 (BL-GARCH 모형).

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \sqrt{h_t} e_t, \\ h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j h_{t-j} + \sum_{k=1}^{r^*} \gamma_k \varepsilon_{t-k} \sqrt{h_{t-k}}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

여기서, $r^* = \min\{r, s\}$. 일차모형인 BL-GARCH(1, 1) 모형은 다음과 같다.

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \gamma_1 \varepsilon_{t-1} \sqrt{h_{t-1}}. \tag{2.5}$$

여기서, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\gamma_1^2 < 4\alpha_1\beta_1$은 조건부 분산의 양수조건들이다.

식 (2.4)의 BL-GARCH 모형에서는 ε_{t-k}와 $\sqrt{h_{t-k}}$의 interaction 항에 의해 "leverage effect"를 설명할 수 있다. 다시 말해, γ_k가 음수일 경우 ε_{t-k}이 양수일 때는 조건부 분산이 감소하지만 ε_{t-k}이 음수일 때는 그만큼 조건부 분산이 증가하게 되어 비대칭적 변동성을 반영할 수 있게 된다.

2.3. Sqaured absolute value GARCH 모형

Hass (2009)에 의해 소개된 Absolute value GARCH(1, 1) 모형은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \sqrt{h_t} e_t, \\ \sqrt{h_t} &= \alpha_0 + \alpha_1 |\varepsilon_{t-1}| + \beta_1 \sqrt{h_{t-1}}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

여기서, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1,\ \beta_1 \geq 0$이고, $\{e_t\}$는 평균 0이고 분산 1인 *i.i.d.* 과정이다. 식 (2.6)을 제곱할 경우, 지난 시점의 수익률과 변동성의 일차항 뿐 아니라 두 항의 interaction 까지 포함하는 다음과 같은 조건부 분산 식을 얻을 수 있다.

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \gamma_1 |\varepsilon_{t-1}| + \gamma_2 \sqrt{h_{t-1}} + \gamma_3 |\varepsilon_{t-1}| \sqrt{h_{t-1}}. \tag{2.7}$$

2.4. News Impact Curve

Engle과 Ng (1993)에 의해 처음 소개된 News Impact Curve는 $t-2$시점까지의 정보는 상수로 고정시키고, $t-1$시점의 충격인 ε_{t-1}과 그 다음 시점의 변동성인 h_t간의 관계를 그래프로 표현한 것으로, $t-1$시점에서의 새로운 정보가 변동성에 얼마만큼 영향을 주는지를 측정할 수 있게 한다. TGARCH 모형들의 경우 $\varepsilon_{t-1} = 0$을 중심으로 negative shock인 $\varepsilon_{t-1} < 0$ 부분과 positive shock인 $\varepsilon_{t-1} > 0$ 부분의 서로 다른 기울기를 통해 비대칭 효과를 시각적으로 확인 할 수 있으며 "leverage effect"가 존재한다면 $\varepsilon_{t-1} < 0$ 부분에서의 h_t의 기울기가 $\varepsilon_{t-1} > 0$ 부분에서의 기울기보다 더 커지게 된다. TGARCH 모형의 New impact curve는 홍선영 등 (2009)을 참고하기 바란다. 반면, 본 논문에서 소개한 GQARCH 모형과 BL-GARCH 모형의 경우, $\varepsilon_{t-1} > 0$ 부분으로 이동한 News Impact Curve의 중심에 의해 비대칭 효과가 존재한다. 따라서, 3절에서의 실증분석에서는 Q-GARCH와 비대칭 성격이 다른 TGARCH 모형은 비교 분석 대상에서 제외하기로 한다.

3. 국내 금융시계열에의 응용

본 절에서는 2006년 1월부터 2010년 6월까지의 국내 금융시계열 자료(KOSPI, KOSDAQ, 삼성전자 주가)를 이용하여 대표적인 조건부 이분산 모형인 GARCH(1, 1) 모형과 앞 절에서 소개한 Squared-AVGARCH(1, 1), GQARCH(1, 1), BL-GARCH(1, 1) 모형에 적합시켜 보았다. 각 자료의 수익률을 모형에 적합시키기 위하여 로그 차분한(이를 ν_t로 표현하기로 하자) 후 분석에 이용하였다. GQARCH(1, 1)과 BL-GARCH(1, 1) 모형의 비대칭성을 시각적으로 확인하기 위해 GARCH(1, 1) 모형과 비교하여 News Impact Curve를 제시하였다. 또한 최대 로그우도함수값과 AIC, MSE 통계량 값을 가지고 고려한 모형들을 비교하고자 한다. 분석과정은 모든 자료에 대해 유사하므로 KOSPI 자료에 대해서만 자세히 기술하고 나머지 자료에 대해서는 분석 결과를 요약하여 제시하였다.

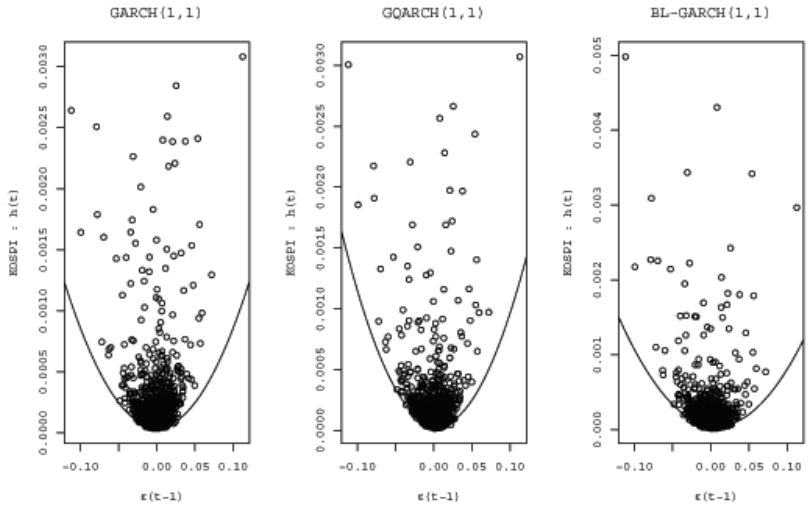

그림 **3.1.** KOSPI의 모형에 따른 News Impact Curve

3.1. 사례분석 1: KOSPI

2006년 1월부터 2010년 6월까지의 1,116개의 수익률 데이터를 이용하여 GARCH(1, 1), Squared-AVGARCH(1, 1), GQARCH(1, 1), BL-GARCH(1, 1) 모형을 적합 시켜 보았다. 우선, GARCH(1, 1)과 Squared-AVGARCH(1, 1) 모형의 추정식은 아래와 같다.

- GARCH:

  $\nu_t = 0.000333 + \varepsilon_t$

  $h_t = 5.92 \times 10^{-7} + 0.0813\varepsilon_{t-1}^2 + 0.9061 h_{t-1}$

- Squared-AVGARCH:

  $\nu_t = 0.000947 + \varepsilon_t$

  $h_t = 5.5 \times 10^{-8} + 0.009483\varepsilon_{t-1}^2 + 0.8286 h_{t-1} + 0.000046|\varepsilon_{t-1}| + 0.00043\sqrt{h_{t-1}} + 0.1773|\varepsilon_{t-1}|\sqrt{h_{t-1}}$

GARCH 모형과 Squared-AVGARCH 모형 모두 $\varepsilon_{t-1} = 0$을 중심으로 정보의 부호에 상관없이 같은 크기의 변화만을 반영한다. 그러나 Squared-AVGARCH 모형의 경우 이전시점 오차항의 제곱항에만 영향을 받는 GARCH 모형과 다르게 1차 수익률 뿐 아니라 수익률과 변동성사이의 interaction 항을 포함하고 있어, 각각의 항들이 현재의 변동성에 어떤 영향을 주는지 해석할 수 있는 측면에서 이점이 있다.

GQARCH(1, 1)과 BL-GARCH(1, 1) 모형의 추정식은 다음과 같다.

- GQARCH:

  $\nu_t = 0.00012 + \varepsilon_t$

  $h_t = 2.02 \times 10^{-6} + 0.1017\varepsilon_{t-1}^2 + 0.8530 h_{t-1} - 0.00094\varepsilon_{t-1}$

- BL-GARCH:

  $\nu_t = 0.000105 + \varepsilon_t$

  $h_t = 1.45 \times 10^{-6} + 0.0889\varepsilon_{t-1}^2 + 0.8838 h_{t-1} - 0.182\varepsilon_{t-1}\sqrt{h_{t-1}}$

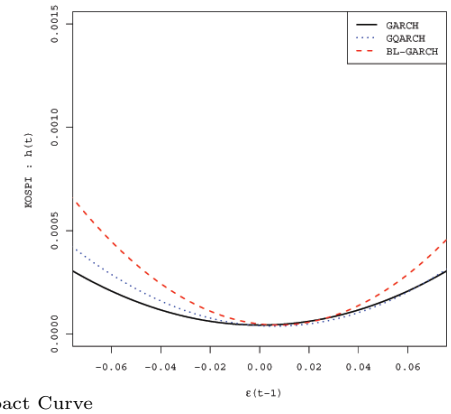

그림 **3.2.** KOSPI의 News Impact Curve

표 **3.1.** KOSPI 자료의 적합력 비교결과

Model	GARCH	Squared AVGARCH	GQARCH	BL-GARCH
Log-likelihood	4107.247	3173.577	4132.464	4133.79
AIC	−8206.49	−6337.15	−8254.93	−8257.58
MSE	0.0000527	0.000281	0.000053	0.000053

국내 KOSPI 자료의 경우, GQARCH 모형에서 오차항의 1차항 계수와 BL-GARCH 모형의 interaction항의 계수가 음수인 것은 주식시장에서의 나쁜 정보가 좋은 정보보다 변동성에 더 크게 영향을 주고 있음을 의미한다.

각 모형의 변동의 대칭성을 확인하기 위해 GARCH, GQARCH, BL-GARCH 모형의 News Impact Curve를 그림 3.1에 제시하였다. 그림에서 점으로 찍힌 값들은 모형 적합 후 얻어진 잔차 $\hat{\varepsilon}_t$와 추정된 $\hat{h}_t$값을 표현한 것이다. 또한, GARCH 모형과 비교해서, GQARCH와 BL-GARCH 모형의 비대칭성을 확인하기 위해, 그림 3.2에 세 모형의 News Impact Curve를 제시했다. GARCH 모형에 비해 GQARCH와 BL-GARCH 모형이 오차항의 부호에 따라 변동성이 비대칭적으로 변함을 확인할 수 있다.

분석 모형들의 적합정도를 비교하기 위해 구한 Log-likelihood, AIC, MSE는 다음과 같다. MSE의 경우 각 모형의 값들이 거의 차이가 없게 나타나지만, Log-likelihood와 AIC의 경우 다른 모형들에 비해 BL-GARCH 모형이 우수한 적합력을 가짐을 알 수 있다.

3.2. 사례분석 2: KOSDAQ

2006년 1월부터 2010년 6월까지의 1,116개의 수익률 데이터를 이용하여 GARCH$(1,1)$, Squared-AVGARCH$(1,1)$, GQARCH$(1,1)$, BL-GARCH$(1,1)$ 모형을 적합 시켜 보았다. 모형의 추정식은 아래와 같다.

- GARCH:

  $\nu_t = 0.000708 + 0.1116\nu_{t-1} + \varepsilon_t$

  $h_t = 2.24 \times 10^{-5} + 0.3598\varepsilon_{t-1}^2 + 0.5924h_{t-1}$

- Squared-AVGARCH:

  $\nu_t = 0.000647 + 0.1399\nu_{t-1} + \varepsilon_t$

  $h_t = 1.6 \times 10^{-6} + 0.089\varepsilon_{t-1}^2 + 0.4936h_{t-1} + 0.000754|\varepsilon_{t-1}| + 0.001772\sqrt{h_{t-1}} + 0.4202|\varepsilon_{t-1}|\sqrt{h_{t-1}}$

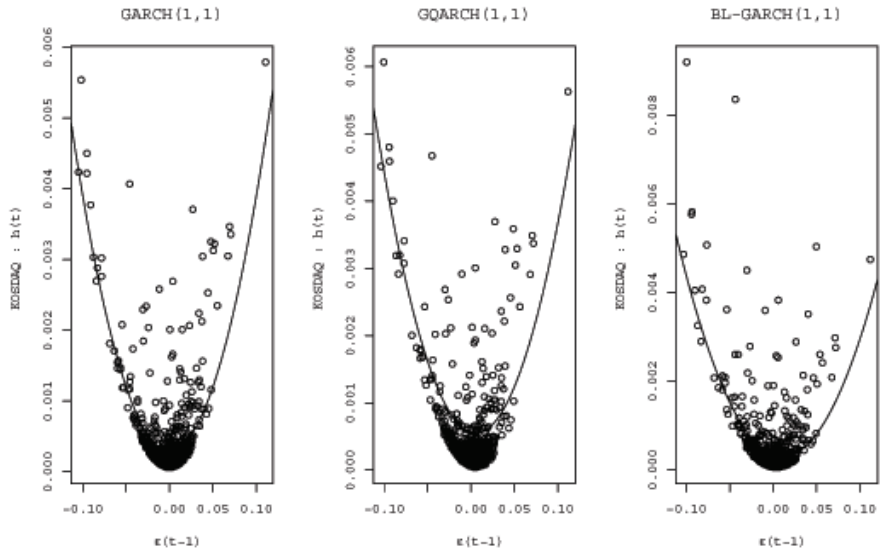

그림 **3.3.** KOSDAQ의 모형에 따른 News Impact Curve

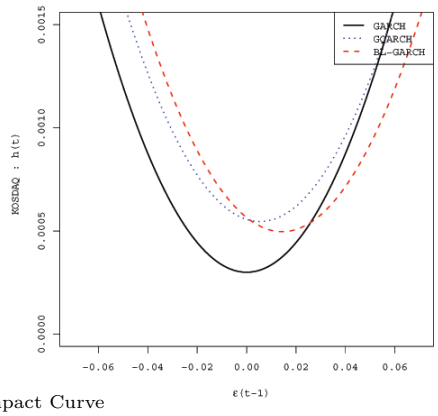

그림 **3.4.** KOSDAQ의 News Impact Curve

- GQARCH:

  $\nu_t = -0.00029 + 0.11299\nu_{t-1} + \varepsilon_t$

  $h_t = 2.4 \times 10^{-5} + 0.3484\varepsilon_{t-1}^2 + 0.6234h_{t-1} - 0.00037\varepsilon_{t-1}$

- BL-GARCH:

  $\nu_t = -0.00035 + 0.1244\nu_{t-1} + \varepsilon_t$

  $h_t = 1.7 \times 10^{-5} + 0.3329\varepsilon_{t-1}^2 + 0.6853h_{t-1} - 0.3377\varepsilon_{t-1}\sqrt{h_{t-1}}$

GARCH, GQARCH, BL-GARCH 모형의 News Impact Curve는 그림 3.3, 3.4와 같다.

KOSDAQ 자료의 경우 비대칭 변동성을 News Impact Curve를 통해 확인할 수 있다. 또한, 표 3.2의 결과에서 확인할 수 있듯, 비대칭 모형인 BL-GARCH 모형이 Log-likelihood와 AIC 값 모두 우수한 적합력을 가짐을 알 수 있다.

표 **3.2.** KOSDAQ 자료의 적합력 비교결과

Model	GARCH	Squared AVGARCH	GQARCH	BL-GARCH
Log-likelihood	3156.406	3151.858	3182.757	3189.512
AIC	−6302.8118	−6291.715	−6353.514	−6367.024
MSE	0.0003146	0.000315	0.000315	0.000315

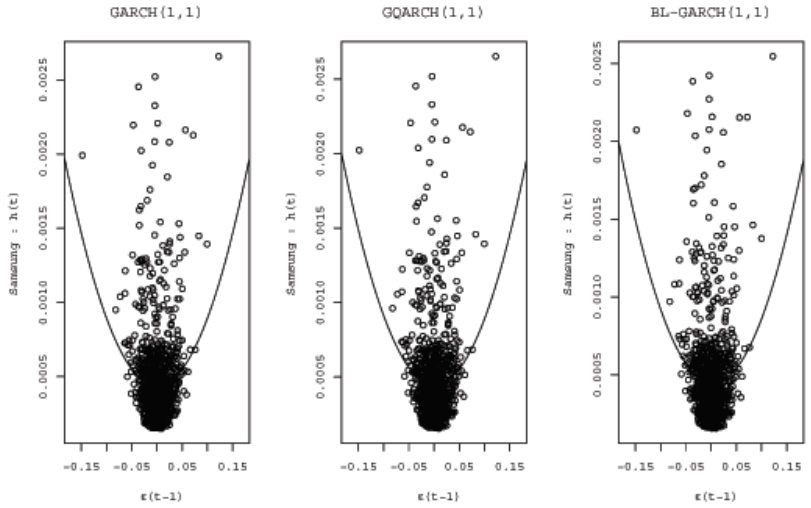

그림 **3.5.** 삼성전자 주가의 모형에 따른 News Impact Curve

3.3. 사례분석 3: 삼성전자

2006년 1월부터 2010년 6월까지의 1,116개의 수익률 데이터를 이용하여 GARCH(1, 1), Squared-AVGARCH(1, 1), GQARCH(1, 1), BL-GARCH(1, 1) 모형을 적합 시켜 보았다. 모형의 추정식은 아래와 같다.

- GARCH:

  $\nu_t = 0.000262 + \varepsilon_t$

  $h_t = 3.154 \times 10^{-7} + 0.0457\varepsilon_{t-1}^2 + 0.9474 h_{t-1}$

- Squared-AVGARCH:

  $\nu_t = 0.000412 + \varepsilon_t$ $h_t = 5.527 \times 10^{-8} + 0.004762\varepsilon_{t-1}^2 + 0.8749 h_{t-1} + 0.000032|\varepsilon_{t-1}| + 0.00044\sqrt{h_{t-1}} + 0.129|\varepsilon_{t-1}|\sqrt{h_{t-1}}$

- GQARCH:

  $\nu_t = 0.000211 + \varepsilon_t$

  $h_t = 3.065 \times 10^{-6} + 0.0456\varepsilon_{t-1}^2 + 0.9478 h_{t-1} - 0.00012\varepsilon_{t-1}$

- BL-GARCH:

  $\nu_t = 0.000153 + \varepsilon_t$

  $h_t = 2.979 \times 10^{-6} + 0.0445\varepsilon_{t-1}^2 + 0.9491 h_{t-1} - 0.01414\varepsilon_{t-1}\sqrt{h_{t-1}}$

GARCH, GQARCH, BL-GARCH 모형의 News Impact Curve는 그림 3.5, 3.6, 표 3.3과 같다.

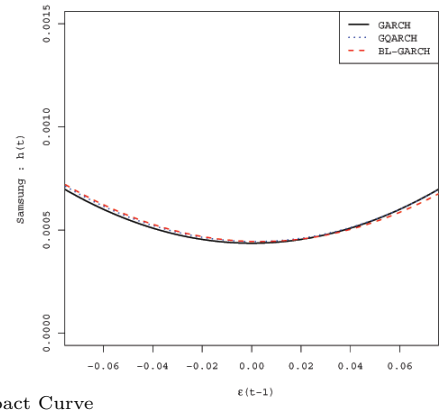

그림 **3.6.** 삼성전자의 News Impact Curve

표 **3.3.** 삼성전자 주가 자료의 적합력 비교결과

Model	GARCH	Squared AVGARCH	GQARCH	BL-GARCH
Log-likelihood	2783.500	2778.202	2783.578	2783.88
AIC	−5557.0009	−5544.404	−5555.156	−5555.76
MSE	0.0004654	0.000468	0.000467	0.000467

MSE의 경우 각 모형의 값들이 거의 차이가 없게 나타나지만, Log-likelihood와 AIC의 경우 다른 모형들에 비해 GARCH 모형이 우수한 적합력을 가짐을 알 수 있다. 이는 그림 3.6의 News Impact Curve에서 볼 수 있듯이 삼성전자 주가 자료의 변동성이 0을 중심으로 대칭인 결과로 해석할 수 있다.

참고문헌

홍선영, 최성미, 박진아, 백지선, 황선영 (2009). 지속-변동성을 가진 비대칭 TGARCH 모형을 이용한 국내금융시계열 분석, <한국통계학회논문집>, **16**, 605–614.

Black, F. (1976). *Studies of Stock Price Volatilities Changes*, Proceedings of the 1976 Business Meeting of the Business and Economic Statistics Section, American Statistical Association, 177–181.

Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.

Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*, **50**, 987–1008.

Engle, R. F. and Ng, V.K. (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility, *Journal of Finance*, **48**, 1749–1778.

Glosten, L. R., Jagannathan, R. and Runkle, D. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks, *Journal of Finance*, **48**, 1779–1801.

Haas, M. (2009). Persistence in volatility, conditional variance and the Taylor property in absolute-value-GARCH processes, *Statistics & Probability Letters* , **79**, 1674–1683.

Rabemananjara, R. and Zakoian, J. M. (1993). Threshold ARCH models and asymmetries in volatility, *Journal of Applied Econometrics*, **8**, 31–49.

Sentana, E. (1995). Quadratic ARCH models, *The Review of Economic Studies*, **62**, 639–661.

Storti, G. and Vitale, C. (2003). BL-GARCH models and asymmetries in volatility, *Statistical Methods and Applications*, **12**, 19–40.

Quadratic GARCH Models: Introduction and Applications

Jin-A Park[1] · Moon-Sun Choi[2] · Sun-Young Hwang[3]

[1]Department of Statistics, Sookmyung Women's University
[2]Department of Statistics, Sookmyung Women's University
[3]Department of Statistics, Sookmyung Women's University

(Received October 2010; accepted December 2010)

Abstract

In GARCH context, the conditional variance (or volatility) is of a quadratic function of the observation process. Examine standard ARCH/GARCH and their variant models in terms of quadratic formulations and it is interesting to note that most models in GARCH context have contained neither the first order term nor the interaction term. In this paper, we consider three models possessing the first order and/or interaction terms in the formulation of conditional variances, viz., quadratic GARCH, absolute value GARCH and bilinear GARCH processes. These models are investigated with a view to model comparisons and applications to financial time series in Korea.

Keywords: Volatility, quadratic GARCH, bilinear GARCH.

Dr. J.A. Park's work was supported by the National Research Foundation of Korea Grant funded by the Korean Government(Ministry of Education, Science and Technology)[NRF-2010-355-C00011]. Partial support from the [NRF-2009-0084772] is also acknowledged

[3]Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Hyochangwon-gil, 52, Yongsan-gu, Seoul 140-742, Korea. Email: shwang@sm.ac.kr