

# 능동제어를 위한 센서-액추에이터 쌍의 위치에 따른 주파수 응답함수의 특성

이영섭  
(인천대학교)

## 1. 머리말

능동제어에 있어서 센서와 액추에이터는 제어 대상인 플랜트의 특성을 이해하는데 매우 중요한 요소이다. 여기에서는 물리적 제어대상에 부착된 센서와 액추에이터를 하나의 쌍(pair)으로 취급하게 된다. 예를 들어 보의 경우, 액추에이터에 의해 보가 진동하게 되고 센서는 보의 진동을 감지하면 센서-액추에이터 간의 응답특성을 해석할 수 있게 된다. 이를 좀 더 체계적으로 이해하기 위하여 기본적인 제어시스템 이론과 진동이론을 결합하여 능동제어 측면에서의 최소 위상 시스템, 비최소 위상 시스템 그리고 완전 양의 정수 시스템을 간단한 수식과 더불어 시뮬레이션에 의한 그림들과 함께 해석을 시도하였다.

## 2. 점 센서-액추에이터 쌍

그림 1과 같이 외팔보에 설치된 비동위치화 및 동위치화 된 점 센서-액추에이터 쌍(point sensor-actuator pair)에 대해 생각해 보자.

만약 그림 1(a)와 같이 비동위치화 된 센서와 액추에이터 쌍이 임의의 오일러-베르누이 외팔보에 대해서, 즉  $x_a$  위치에 점 액추에이터에 의해 수직 집중 조화력이 작용하고, 반대편의  $x_s$  지점에서 점 센서가 보의 굽힘 변위, 속도 및 가속도를

탐지한다면 다음과 같이 각각 표현 된다.

$$\begin{aligned} w(x_s, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x_s) q_n(t) \\ \dot{w}(x_s, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x_s) \frac{\partial}{\partial t} q_n(t) \\ \ddot{w}(x_s, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x_s) \frac{\partial^2}{\partial t^2} q_n(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $\phi_n(x_s)$ 는  $n$ 번째 굽힘모드 형상이고,  $q_n(t)$ 은 그에 대응하는 모드좌표(modal

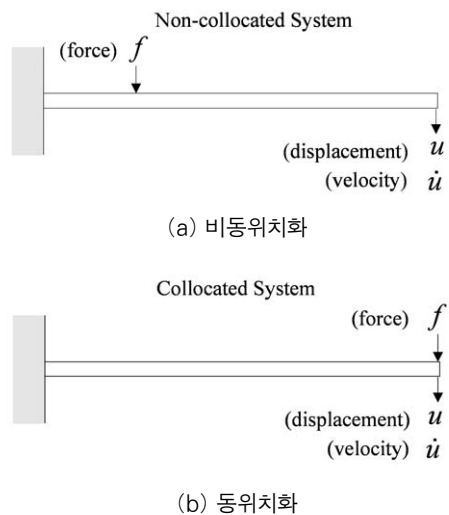


그림 1 점 센서 - 힘 액추에이터 쌍

coordinate) 이다. 이때 굽힘 감쇠진동에 대한 지배방정식은 무한개의 비연성화 된 상미분방정식으로 표현된다. 이것을 액추에이터의 가진력에 대한 비동위치화 된 센서 위치에서 보의 굽힘 변위, 속도, 가속도를 주파수 응답함수(FRF), 즉 점 compliance  $G_c(j\omega)$ , mobility  $G_m(j\omega)$ , accelerance  $G_a(j\omega)$ 는 주파수 구간  $\omega \in (-\infty, +\infty)$ 에 대해 나타내면 각각 다음과 같이 된다.

$$G_c(j\omega) = \frac{W(j\omega)_{x=x_s}}{F(j\omega)_{x=x_a}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x_s)\phi_n(x_a)}{M_n[(\omega_n^2 - \omega^2) + j2\zeta\omega_n\omega]}, \quad (2a)$$

when  $x_s \neq x_a$

$$G_c(j\omega) = \frac{W(j\omega)_{x=x_s}}{F(j\omega)_{x=x_a}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x_s)\phi_n(x_a)}{M_n[(\omega_n^2 - \omega^2) + j2\zeta\omega_n\omega]}, \quad (2b)$$

when  $x_s \neq x_a$

$$G_c(j\omega) = \frac{W(j\omega)_{x=x_s}}{F(j\omega)_{x=x_a}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x_s)\phi_n(x_a)}{M_n[(\omega_n^2 - \omega^2) + j2\zeta\omega_n\omega]}, \quad (2c)$$

when  $x_s \neq x_a$

여기서  $L_x$ 는 보의 길이,  $M_n$ 은  $n$ 번째 모달질량(modal mass),  $\omega_n$ 은  $n$ 번째 고유진동수,  $\zeta$ 는 점성 감쇠비, 그리고  $f(x_a, t)$ 외력함수이다. 한편 센서와 액추에이터 쌍이 동위치화 되면  $x_a = x_s$ 가 되므로 식 (2)는 식 (3)과 같이 표현할 수 있다.

$$G_c(j\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(x_s)}{M_n[(\omega_n^2 - \omega^2) + j2\zeta\omega_n\omega]}, \quad (3a)$$

when  $x_s = x_a$

$$G_m(j\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega\phi_n^2(x_s)}{M_n[(\omega_n^2 - \omega^2) + j2\zeta\omega_n\omega]}, \quad (3b)$$

when  $x_s = x_a$

$$G_a(j\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(j\omega)^2\phi_n^2(x_s)}{M_n[(\omega_n^2 - \omega^2) + j2\zeta\omega_n\omega]}, \quad (3c)$$

when  $x_s = x_a$

최소 위상(minimum phase) 시스템은 “모든 극점과 영점의 공액복소수 쌍이 s-평면상의 허축의 좌측에 위치한 시스템”으로 정의할 수 있다. 그리고, 최소 위상 시스템은 인과적(causal)이고, 안정적(stable)이며, 시스템의 극점과 영점의 갯수가 동일하면 그것의 역(inverse) 또한 인과적이고 안정적이다. 그리고, 비최소 위상(non-minimum phase) 시스템은 “일부의 영점 공액복소수 쌍이 s-평면상의 허축의 좌측 뿐 아니라 우측에도 위치한 시스템”으로 정의할 수 있다. 그리고 비최소 위상 시스템은 인과적이고, 안정적이거나, 시스템의 극점과 영점의 갯수가 동일하더라도 그것의 역(inverse)은 인과적이긴 하나 불안정적(unstable) 이다.

또한 식 (2)와 (3)에서 보는 바와 같이, 능동제어에 적용되는 점 센서-액추에이터 쌍의 주파수 응답함수는 다음과 같은 매우 중요한 정보를 제공해 주고 있다.

첫째, 식 (2)와 (3)의 분모는 보의 경계조건, 치수와 재료에 의해 결정되는 진동모드로 인한 공진과 연관되며 센서-액추에이터 쌍 시스템의 극점으로 나타난다.

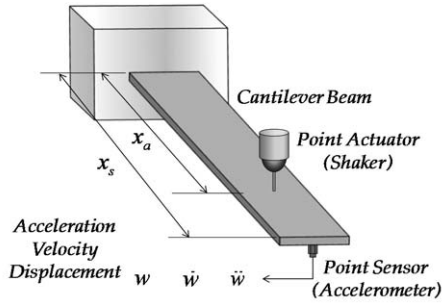
둘째, 식 (2)와 (3)의 분자는 센서 및 액추에이터의 위치가 적용된 각각의 모드형상함수  $\phi_n(x_s)$ 와  $\phi_n(x_a)$ 에 의해 결정되는데, 이들의 곱  $\phi_n(x_s)\phi_n(x_a)$ 에 의해 반공진과 연관되며 시스템의 영점으로 나타난다.

셋째, 보의 치수와 재료가 동일하다면 센서-액추에이터 쌍 시스템의 주파수 응답함수는 경계조건에 의해 결정되는 공진(극점)과, 입력(액추

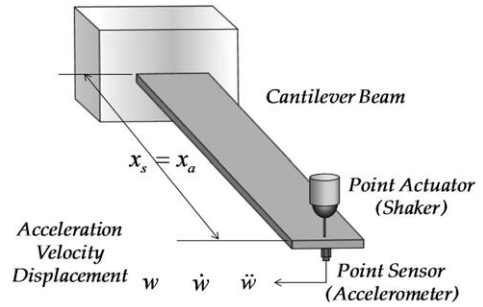
에이터) - 출력(센서)간의 상대적 위치(동위치 또는 비동위치)에 의해 결정되는 반공진(영점)에 의해서 위상관계가 지배된다.

넷째, 센서 출력의 미적분을 통해 위상응답을 90°씩 변화시킬 수 있다.

그래서 능동제어에 적용되는 센서-액추에이터

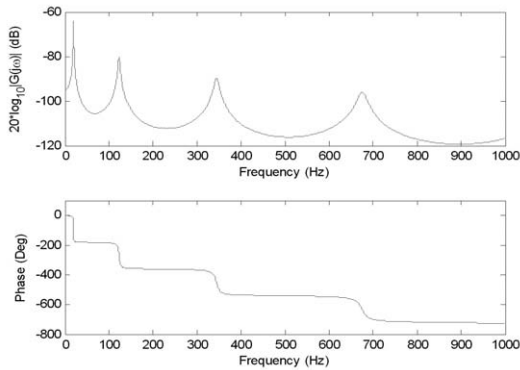


(a) 비동위치화

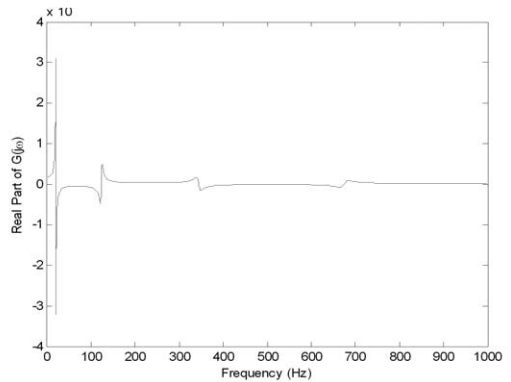


(b) 동위치화

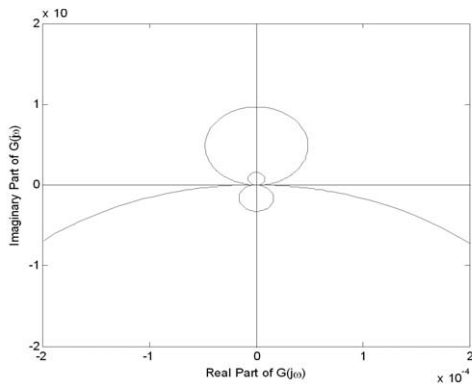
그림 2 점 센서-액추에이터 쌍



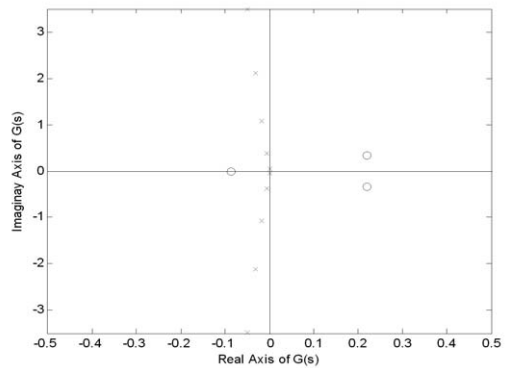
(a) 보드선도



(b) 주파수 응답함수의 실수부



(c) 극좌표선도

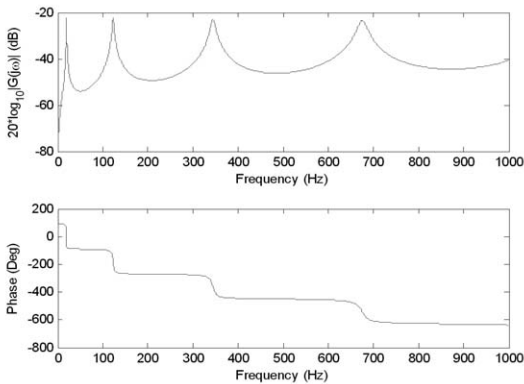


(d) 극점-영점 맵

그림 3 비동위치화 된 센서-액추에이터 쌍의 compliance(변위/힘) 주파수 응답함수

쌍 시스템의 최소 위상(minimum phase) 여부는 센서와 액추에이터의 위치에 의해 정해진다. 그리고, 최소 위상 시스템의 특별한 경우로서 완전 양의 정수(strictly positive real, SPR) 시스템이 있는데, 이는 “모든 극점과 영점의 공액복소수 쌍이 s-평면상의 허축의 좌측에 위치함과 동시에 허축을 따라서 극점과 영점이 상호 교대로 배열된 시스템”으로 정의할 수 있다. 이 경우엔 위상응답이  $\pm 90^\circ$  사이에 항상 존재하게 되어, 시스템 주파수 응답함수의 실수부(real part)는 모든 주파수에서 항상 양이 되며 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\text{Re}[G(j\omega)] > 0, \quad \omega \in (-\infty, +\infty) \quad (4)$$



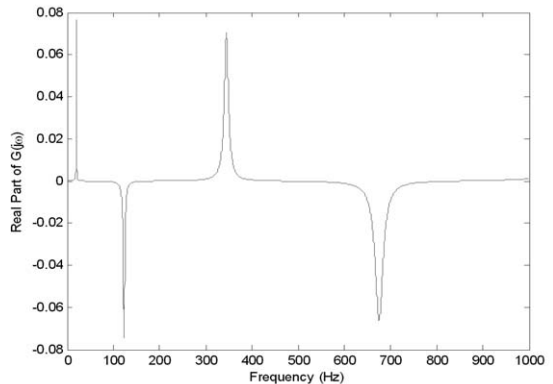
(a) 보드선도

### 3. 점 센서-액추에이터 쌍의 주파수 응답함수 분석

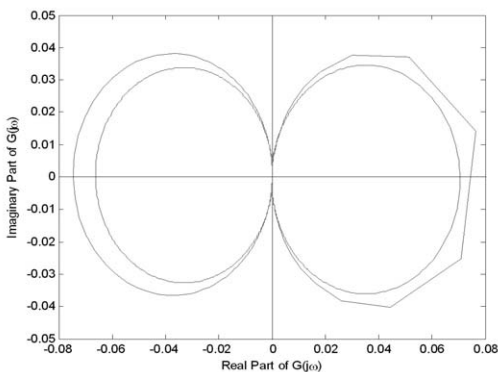
그림 2와 같이 외팔보 위에 부착된 점 센서-액추에이터 쌍이 비동위치화 및 동위치화 되어 있는 두 경우에 대해 그 주파수 응답함수를 시뮬레이션을 통해 분석해 보자 한다. 사실 이론적 측면의 점 센서 및 점 액추에이터는 가상적인 것이지만 여기서는 점 액추에이터는 셰이커(shaker), 점 센서는 가속도계(accelerometer)로 가정한다.

#### 3.1 비동위치화 점 센서-액추에이터 쌍의 주파수 응답함수

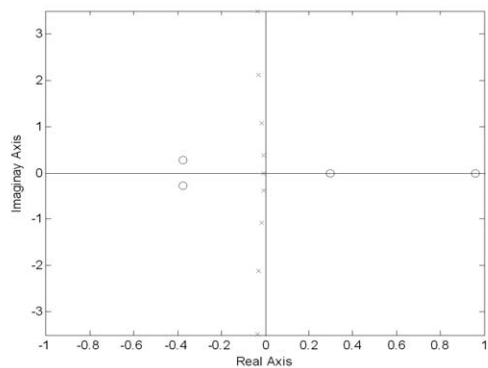
우선 비동위치화된 점 센서-액추에이터 쌍의 compliance(변위/힘) 응답  $G_c(j\omega)$ 를 식 (2a)를 바



(b) 주파수 응답함수의 실수부



(c) 극좌표선도



(d) 극점-영점 맵

그림 4 비동위치화 된 센서-액추에이터 쌍의 mobility(속도/힘) 주파수 응답함수

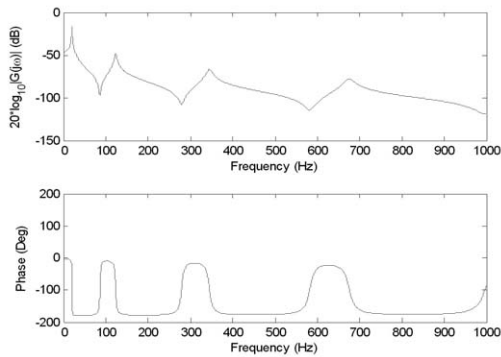
탕으로 그림 3에 나타내었다. 그림 3(a)에서는 1,000 Hz 이하에서 공진(resonance)이 4개가 나며, 위상은  $0^\circ$  에서 시작하여 공진을 지날 때마다  $-180^\circ$  씩 위상이 변하고 있다. 그래서 위상응답이 1,000 Hz에서는  $-720^\circ$  를 보이고 있다. 그림 3(b)는  $G_c(j\omega)$ 의 실수부는 주파수에 따라 양수와 음수를 오가고 있다. 그림 3(c)의 극좌표선도(polar plot)에서는 음의 허수부(1, 3번째 공진)와 양의 허수부(2, 4번째 공진)를 모두 지나고 있다. 그리고 그림 3(d)에서는 s-평면의 우측에 불안정한 영점들이 존재하므로 비최소 위상 시스템임을 알 수 있다.

그리고 비동위치화 된 점 센서-액추에이터 쌍의 mobility(변위/힘) 응답  $G_m(j\omega)$ 를 식 (2b)를 바탕으로 그림 4에 나타내었다. 그림 4(a)에서는 1,000 Hz 이하에서 공진이 4개가 보이며 위상은

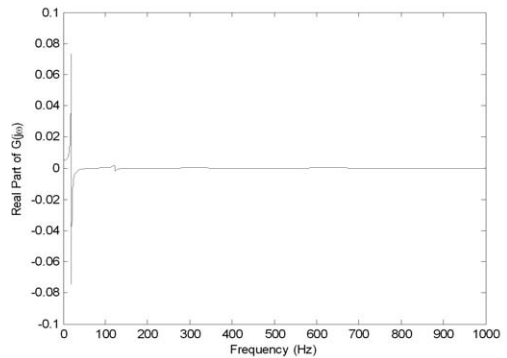
$+90^\circ$ 에서 시작하여 공진을 지날 때마다  $-180^\circ$  씩 위상이 변하고 있다. 그래서 위상응답이 1,000 Hz에서는  $-630^\circ$  를 보이고 있다. 그림 4(b)는  $G_m(j\omega)$ 의 실수부는 주파수에 따라 양수와 음수를 오가고 있다. 그림 4(c)의 극좌표선도에서는 양의 실수부(1, 3번째 공진)와 음의 실수부(2, 4번째 공진)를 모두 지나고 있다. 그리고 그림 4(d)에서는 s-평면의 우측에 불안정한 영점들이 존재하므로 비최소 위상 시스템임을 알 수 있다.

### 3.2 동위치화 점 센서-액추에이터 쌍의 주파수 응답함수

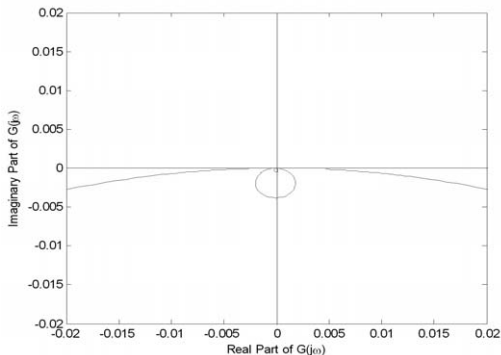
우선 동위치화 된 점 센서-액추에이터 쌍의 compliance(변위/힘) 응답  $G_c(j\omega)$ 를 식 (3a)를 바탕으로 그림 5에 나타내었다. 그림 5(a)에서는



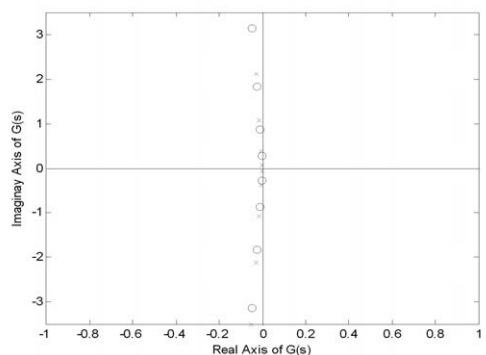
(a) 보드선도



(b) 주파수 응답함수의 실수부



(c) 극좌표선도



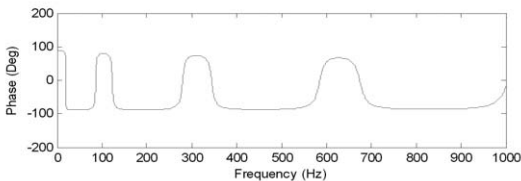
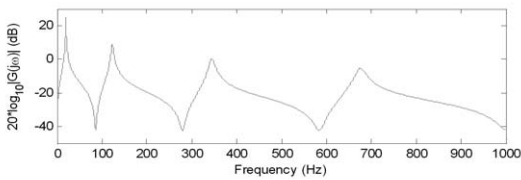
(d) 극점-영점 맵

그림 5 동위치화 된 센서-액추에이터 쌍의 compliance(변위/힘) 주파수 응답함수

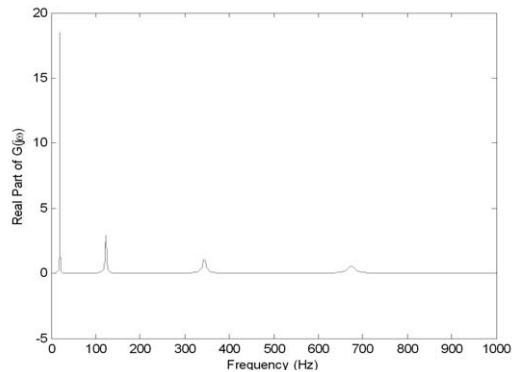
1,000 Hz 이하에서 공진과 반공진이 각각 4 개씩 보이며, 위상은  $0^\circ$  에서 시작하여 공진을 지날 때마다  $-180^\circ$  씩 위상이 변하고 있으며, 반공진을 지나면  $+180^\circ$  씩 위상이 변하고 있다. 그래서 위상응답은 1,000 Hz 이내에서는  $0 \sim -270^\circ$  사이를 나타내고 있다. 그림 5(b)는  $G_c(j\omega)$ 의 실수부는 주파수에 따라 양수와 음수를 오가고 있다. 그림 5(c)의 극좌표선도에서는 음의 허수부에 모든 공진모드(1 ~ 4번째 공진)가 위치하고 있다. 그리고 그림 5(d)에서는 모든 극점은 공진 s-평면의 좌측에 모두 위치하고 있으므로 최소 위상 시스템이나 그림 5(b)에서 보는 바와 같이 첫 번째 공진모드에서 음의 실수부가 존재하게 되어 SPR 시스템은 아님을 알 수 있다. 허수축은 주파수를 나타내므로,  $j\omega = 0$ 에서부터 주파수가 증가하

면서 순서대로 극점-영점-극점-영점-극점-영점의 순서로 나타남을 알 수 있다.

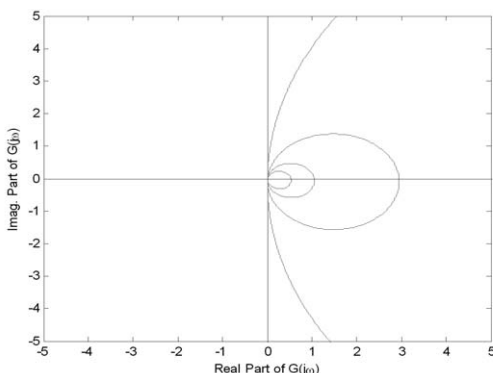
그리고 동위치화 된 점 센서-액추에이터 쌍의 mobility(속도/힘) 응답  $G_m(j\omega)$ 를 식 (3b)를 바탕으로 그림 6에 나타내었다. 그림 6(a)에서는 1,000 Hz 이하에서 공진과 반공진이 각각 4개씩 보이며 이들은 교대로 나타나고 있다. 그리고, 위상은  $+90^\circ$  에서 시작하여 공진을 지날 때마다  $-180^\circ$  씩 위상이 변하고 있으며, 반공진을 지나면  $+180^\circ$  씩 위상이 변하고 있다. 그래서 공진과 반공진이 교대로 나타나므로 위상은 1,000 Hz 까지  $-90^\circ$  와  $+90^\circ$  사이에서만 나타나고 있다. 그림 6(b)에서는  $G_m(j\omega)$ 의 실수부는 1,000 Hz 까지는 항상 양수를 가지고 있음을 보여 준다. 그림 6(c)의 극좌표선도에서는 양의 실수부에만 모든 공진모드



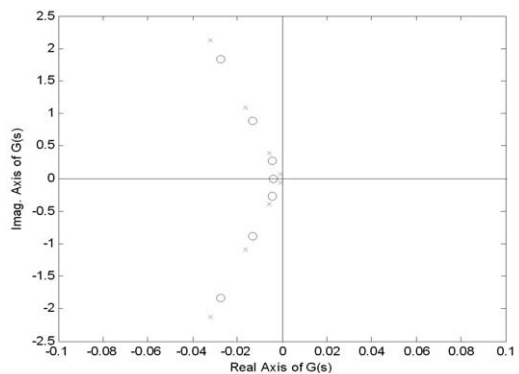
(a) 보드선도



(b) 주파수 응답함수의 실수부



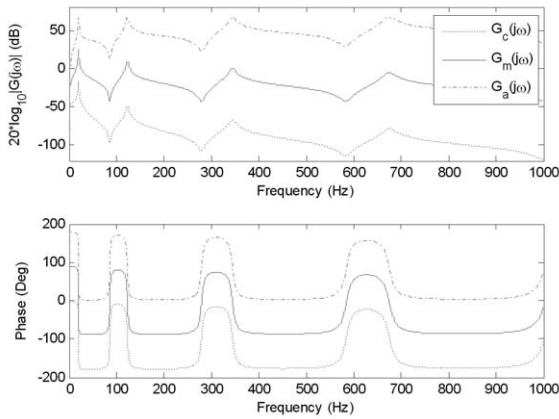
(c) 극좌표선도



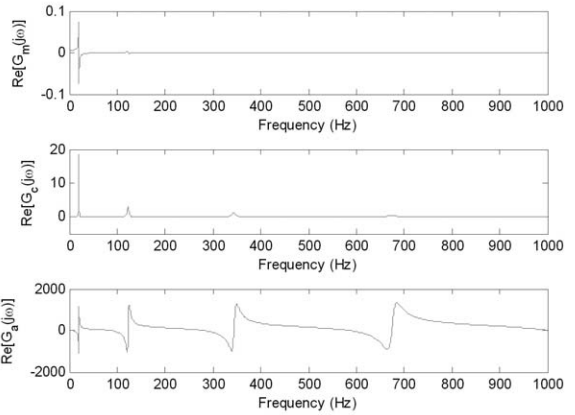
(d) 극점-영점 맵

그림 6 동위치화 된 센서-액추에이터 쌍의 mobility(속도/힘) 주파수 응답함수





(a) 보드선도



(b) 주파수 응답함수의 실수부

그림 7 동위치화 된 센서-액추에이터 쌍의 compliance(변위/힘), mobility(속도/힘), accelerance(가속도/힘) 주파수 응답함수 비교

표 1 동위치 및 비동위치 센서-액추에이터 쌍의 주파수 응답함수 특성 요약

		FRF	Phase response	$\angle G(j\omega)$	SPR
Collocated ( $x_a = x_s$ )	Compliance	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(x_s)}{M_n[(\omega_n^2 - \omega^2) + j2\zeta_n\omega_n\omega]}$	Minimum phase	$0 \leq G_c(j\omega) \leq -\pi$	Non-SPR
	Mobility	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega\phi_n^2(x_s)}{M_n[(\omega_n^2 - \omega^2) + j2\zeta_n\omega_n\omega]}$	Minimum phase	$-\frac{\pi}{2} \leq G_m(j\omega) \leq \frac{\pi}{2}$	SPR
Non-collocated ( $x_a \neq x_s$ )	Compliance	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x_s)\phi_n(x_a)}{M_n[(\omega_n^2 - \omega^2) + j2\zeta_n\omega_n\omega]}$	Non-minimum phase	$-\pi \leq G_c(j\omega) \leq 0$	Non-SPR
	Mobility	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega\phi_n(x_s)\phi_n(x_a)}{M_n[(\omega_n^2 - \omega^2) + j2\zeta_n\omega_n\omega]}$	Non-minimum phase	$-\pi \leq G_m(j\omega) \leq \frac{\pi}{2}$	Non-SPR

들의 응답이 나타나고 있다. 그리고 그림 6(d)에서 모든 극점은 공진 s-평면의 좌측에 모두 위치하고 있으므로 최소 위상 시스템이면서 동시에 그림 5(b)에서 보는 바와 같이 모든 주파수 영역에서 양의 실수부만 존재하게 되어 SPR 시스템임을 알 수 있다.  $j\omega = 0$ 에서부터 주파수가 증가하면서 순서대로 영점-극점-영점-극점-영점-극점-영점-극점의 순서로 영점과 극점이 교대로 나타남을 알 수 있다. 이에 따라 그림 6(a)의 보드선

도에서는 반공진-공진-반공진-공진-반공진-공진-반공진-공진 순으로 나타났다.

참고로, 동위치화 된 센서-액추에이터 쌍의 compliance(변위/힘), mobility(속도/힘), accelerance(가속도/힘) 주파수 응답함수를 그림 7에 비교하여 나타내었다. 이를 통해 각각이 위상 응답에서는 서로 90° 씩의 위상차를 가지고 있으며, compliance와 accelerance의 경우 비록 센서-액추에이터 쌍이 동위치 되어 있다 하더라도 각각의

주파수 응답함수가 음의 실수부를 가지게 되어 SPR 시스템은 될 수 없음을 확인할 수 있다. 이와 같이 SPR 시스템은 최소 위상 시스템의 특수한 경우로서 무조건적으로 안정한 능동제어 시스템을 구현할 가능성을 제시한다. 즉, 이론적으로는 무한대의 피드백 이득을 적용시켜 우수한 제어기를 설계할 수 있게 되는 것이다. 그러므로 이러한 특징을 채택해서 직접속도피드백(direct velocity feedback, DVFB) 제어가 능동진동제어에 중요하게 사용된다. 그러나, 실제 능동제어 시스템에 이를 적용하려면 구성품인 전원증폭기, 액추에이터, 센서, 신호증폭기 등의 동적 특성을 동시에 고려해야만 한다. 즉 센서-액추에이터 쌍의 응답에 이러한 구성품의 동적 특성이 반드시 포함되므로 이로 인해 SPR 특성은 어느 정도 이상의 주파수에서 붕괴가 되는 현상이 발생하는 경우가 대부분이다. 그래서 실제에 있어 DVFB 제어에서는 제한적인 피드백 이득을 사용할 수 밖에 없게 되어 있어 제어성능에도 한계를 가지게 된다. 이를 극복하기 위한 다양한 연구는 계속 진행되어 오고 있다.

비최소 위상 시스템에 대한 제어는 PID제어 이외에도 현대제어 기법을 사용할 경우 제어안정도와 제어성능 사이의 "trade-off"가 대단히 중요하게 된다.  $H_2$ 나  $H_\infty$ 는 강인한 안정도와 성능을 가진 능동제어기의 설계에 자주 이용되는 기법

으로 알려져 있다.

이상을 요약하여 나타내어 보면 표 1과 같이 나타낼 수 있다.

#### 4. 맺음말

이 글에서는 능동제어를 위한 제어기의 설계에 앞서 제어대상인 플랜트에 대한 물리적, 제어적 의미를 기술한 것이다. 특히 물리적 제어대상에 부착된 동위치 및 비동위치화 된 센서-액추에이터 쌍의 주파수 응답함수 특성을 compliance, mobility, accelerance의 입장에서 각각 살펴 보았다. 이를 통해 이론적인 최소 위상 시스템, 비최소 위상 시스템 및 SPR 시스템을 능동제어적 측면에서 이해하도록 보에 부착된 웨이커(점 액추에이터) 및 가속도계(점 센서)를 적용시켜 설명하였다.

이를 통해서 센서와 액추에이터 간의 상호위치가 제어대상 시스템의 최소 위상 시스템을 여부를 지배하고 있음을 확인하였으며, 동시에 동위치화를 통한 SPR 시스템이 가지는 장점에 대해서도 언급하였다.

이 글이 능동제어를 위한 센서-액추에이터 쌍의 주파수 응답함수에 대한 원리를 이해하는데 도움이 되길 기대한다. KSNVE

### 소음·진동 용어해설

(출처 : "소음·진동 용어해설집", (사)한국소음진동공학회 발행)

#### Resonance 공진

강제 진동에서 외력의 가진 주파수가 계의 고유 진동수와 일치하여, 입력이 계속 가해짐에 따라 진동이 커지는 현상을 말한다. 공진 현상에서 구체적으로 일어나는 외력과 응답 사이의 관계는 주파수 응답 함수의 크기와 위상으로써 잘 관찰할 수 있다. 즉 공진 현상이 발생할 때는 특별히 외력과 응답속도(velocity)가 같은 위상을 갖게 되어 외력에 의한 진동계의 에너지 공급 즉 파워의 효과적인 공급이 이루어지고 있음을 알 수 있다.