

## 비의 양이 지수분포를 따르는 경우 무한 댐의 최적 방출정책 연구<sup>†</sup>

김명화<sup>1</sup> · 백지선<sup>2</sup> · 최승경<sup>3</sup> · 이의용<sup>4</sup>

<sup>134</sup>숙명여자대학교 통계학과 · <sup>2</sup>통계청 통계개발원

접수 2011년 9월 30일, 수정 2011년 11월 2일, 게재확정 2011년 11월 7일

### 요약

본 논문에서는 댐으로 물이 복합 포아송 과정을 따라 유입되고, 댐 수위가 적정수준  $\lambda$ 를 넘어서게 되면 방출률  $M$ 으로 물을 방출하는 무한 댐 모형이 고려된다. 한번 내리는 비의 양이 지수분포를 따르는 경우, 정상상태에서 댐 수위의 확률적 성질들을 구한다. 댐 운영과 관리에 관련된 여러 비용을 고려한 후, 장시간에 걸친 단위시간당 평균 비용을 구하고, 이를 최소화하는 방출률  $M$ 과 적정수준  $\lambda$ 가 유일하게 존재함을 보인다. MATLAB을 이용하여 수치적인 결과도 함께 보인다.

주요용어: 무한 댐, 복합 포아송 과정, 장시간에 걸친 단위시간당 평균비용, 정상상태, 최적 방출정책.

### 1. 서론

댐의 수위는 비가 올 때마다 증가하고 댐 관리자는 댐 수위가 적정수위를 넘어서게 되면 물을 방출하여 수위를 조절한다. 본 논문에서는 복합 포아송 과정을 따라 물이 유입되는 무한 댐 모형이 연구된다. 즉, 비는 댐 지역에서 모수  $\nu > 0$ 인 포아송 과정에 따라 오며, 한번 내리는 비의 양은 독립적으로 평균이  $\mu > 0$ 인 분포함수  $G$ 를 따른다고 가정한다. 방출정책은 Faddy (1974)에 의해 소개된  $P_\lambda^M$ -정책을 적용한다.

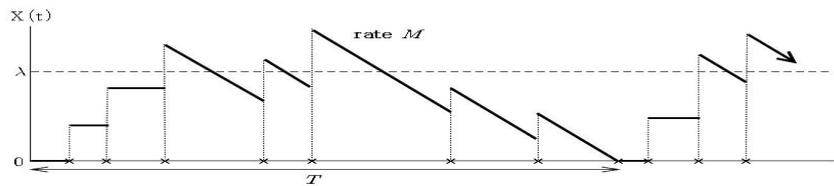


그림 1.1  $\{X(t), t \geq 0\}$ 의 표본경로

<sup>†</sup> 본 연구는 숙명여자대학교 2010년도 교내연구비 지원에 의해 수행되었음.

<sup>1</sup> (140-742) 서울특별시 용산구 청파동 2가, 숙명여자대학교 통계학과, 석사.

<sup>2</sup> (302-847) 대전광역시 서구 월평동 282-1, 통계개발원 조사연구실, 통계사무관.

<sup>3</sup> (140-742) 서울특별시 용산구 청파동 2가, 숙명여자대학교 통계학과, 박사.

<sup>4</sup> 교신저자: (140-742) 서울특별시 용산구 청파동 2가, 숙명여자대학교 통계학과, 교수.

E-mail: eylee@sookmyung.ac.kr

즉, 댐 수위는 0으로 시작해서 비가 올 때마다 내린 양만큼 점프하면서 수위가 높아진다. 댐 수위가 적정수준  $\lambda > 0$ 를 넘어서면 단위시간당  $M$ 씩 물을 방출시킨다. 댐 수위의 정상상태가 존재하기 위해서는  $M > \nu\mu$ 이어야 한다. 댐에 물이 비게 되면 방출하는 것을 멈추고 다시 댐의 수위가 적정수준  $\lambda$ 를 넘어서기를 기다린다. 시간  $t > 0$ 에서의 댐 수위를  $X(t)$ 라 하면 표본 경로는 그림 1.1과 같이 나타낼 수 있다.

Zuckerman (1977)은 할인된 비용의 경우로 Faddy (1974)의 결과를 확장한 바 있고, Lam (1985)은 물을 방출하다 댐 수위가  $\tau > 0$ 에 이르면 방출을 멈추는 보다 일반화된  $P_{\lambda, \tau}^M$ -정책을 소개하였다. Lee와 Ahn (1998)은  $P_{\lambda}^M$ -정책을 따르는 무한 댐에서 댐 수위의 정상분포함수를 연구하였다. Bae 등 (2002)과 Kim 등 (2006)은  $P_{\lambda}^M$ -정책을  $M/G/1$  대기행렬 시스템에 적용하여 고객수의 정상분포함수를 구하고 최적화 연구를 수행하였다. 확률모형에서 최근 최적화 연구는 Lee (2008)의 재고 (inventory)모형에서 최적 점검주기 연구와 Jung (2009, 2010)의 수리 가능한 시스템에서 최적 예방 교체정책 연구 등이 있다.

본 논문 2절에서는 Lee와 Ahn (1998)에 의해 연구된 댐 수위  $X(t)$ 의 정상분포를 이용하여, 한번 내리는 비의 양이 지수분포를 따르는 경우, 정상상태에서 댐 수위  $X(t)$ 의 여러 확률적 성질들을 구한다. 3절에서는 고려한 댐 모형에 4가지 관리 비용을 부과한 후, 장시간에 걸친 단위시간당 평균 비용을 구하고, 이를 최소화하는 방출률  $M$ 과 적정수준  $\lambda$ 의 값이 유일하게 존재함을 보인다. MATLAB을 이용하여 단위시간당 평균 비용을 방출률  $M$ 과 적정수준  $\lambda$ 의 값에 대해 수치적으로도 나타내준다.

### 2. 댐 수위의 확률적 성질

이 절에서는 Lee와 Ahn (1998)의 결과를 이용하여, 분포함수  $G$ 가 지수분포인 경우에 대하여 정상상태에서 댐 수위의 다양한 확률적 특성들을 계산한다. 댐 수위  $X(t)$ 의 분포함수를  $F(x, t) = P\{X(t) \leq x\}$ 라고 하고  $F(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(x, t)$ 를  $X(t)$ 의 정상분포함수라 하자. Lee와 Ahn (1998)은 댐 수위를 나타내는 확률과정  $\{X(t), t \geq 0\}$ 를 마르코비안 성질을 만족하는 두 개의 확률과정  $\{X_1(t), t \geq 0\}$ 와  $\{X_2(t), t \geq 0\}$ 로 나누어  $X(t)$ 의 정상분포함수  $F(x)$ 를 연구했다.  $X_1(t)$ 는 댐이 비어있는 기간과 단위 시간당  $M$ 씩 물을 방출하는 기간을  $X(t)$ 로부터 분리해내서 이들 기간을 연결하여 만들어지고,  $X_2(t)$ 는  $X(t)$ 에서  $X_1(t)$ 를 뺀 나머지 기간들을 연결하여 만들어진다.  $\{X_1(t), t \geq 0\}$ 와  $\{X_2(t), t \geq 0\}$ 의 표본 경로는 그림 2.1과 그림 2.2와 같다.

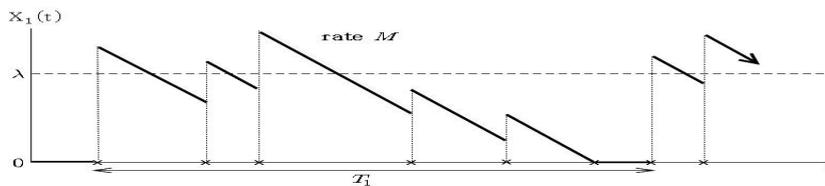


그림 2.1  $\{X_1(t), t \geq 0\}$ 의 표본경로

$F_1(x)$ 와  $F_2(x)$ 를 각각  $X_1(t)$ 와  $X_2(t)$ 의 정상분포함수라 하자. Lee와 Ahn (1998)의 결과를 이용하여  $G$ 가 지수분포인 경우 정상상태에서  $\{X_1(t), t \geq 0\}$ 와  $\{X_2(t), t \geq 0\}$ 의 확률적 특성들을 구하면 아래와 같다.

1.  $\{X_1(t), t \geq 0\}$ 에서 물의 방출을 시작하는 두 시점 사이의 기간을 한 주기  $T_1$ 이라 놓으면,  $T_1$ 의 기대

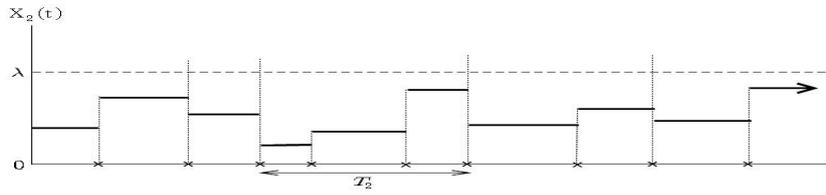


그림 2.2  $\{X_2(t), t \geq 0\}$ 의 표본경로

값은

$$E(T_1) = \frac{M + \lambda\nu}{\nu(M - \nu\mu)}$$

이다. 정상상태에서  $X_1(t)$ 의 1차 적률과 2차 적률은 다음과 같다.

$$E(X_1) = \frac{(M - \nu\mu)\nu\lambda^2 + 2M\nu\mu(\lambda + \mu)}{2(M - \nu\mu)(M + \nu\lambda)}, \quad M > \nu\mu,$$

$$E(X_1^2) = \frac{(M - \nu\mu)^2\nu\lambda^3 + 3M\nu\mu\lambda^2(M - \nu\mu) + 6\mu^2\nu M^2(\lambda + \mu)}{3(M + \nu\lambda)(M - \nu\mu)^2}, \quad M > \nu\mu.$$

2.  $\{X_2(t), t \geq 0\}$ 에서 댐이 비어 있다가 처음으로 물이 차는 시점과 물의 방출을 시작하기 직전 시점 사이의 한 주기  $T_2$ 라 놓으면,  $T_2$ 의 기대값은  $E(T_2) = \lambda/\nu\mu$ 이고, 정상상태에서  $X_2(t)$ 의 1차 적률과 2차 적률은 다음과 같다.

$$E(X_2) = \int_0^\lambda x dF_2(x) = \frac{\lambda}{2},$$

$$E(X_2^2) = \int_0^\lambda x^2 dF_2(x) = \frac{\lambda^2}{3}.$$

3.  $\{X(t), t \geq 0\}$ 에서 댐의 수문을 여는 두 시점 사이의 기간을 한 주기  $T$ 라 놓으면,  $T = T_1 + T_2$ 의 기대값은

$$E(T) = \frac{M\mu + M\lambda}{\nu\mu(M - \nu\mu)}$$

이고, 가중평균을 이용하여 정상상태에서  $X(t)$ 의 1차 적률과 2차 적률을 구하면 다음과 같다.

$$E(X) = \frac{M\mu + \lambda\nu\mu}{M\mu + M\lambda} E(X_1) + \frac{M\lambda - \lambda\nu\mu}{M\mu + M\lambda} E(X_2)$$

$$= \frac{(M - \nu\mu)\lambda^2 + 2\nu\mu^2(\lambda + \mu)}{2(M - \nu\mu)(\lambda + \mu)}, \quad M > \nu\mu.$$

$$E(X^2) = \frac{M\mu + \lambda\nu\mu}{M\mu + M\lambda} E(X_1^2) + \frac{M\lambda - \lambda\nu\mu}{M\mu + M\lambda} E(X_2^2)$$

$$= \frac{\lambda^2 M(M - \nu\mu)^2 + 3\nu\mu^2 \lambda^2 M(M - \nu\mu) + 6\nu\mu^3 M^2(\lambda + \mu)}{3M(\lambda + \mu)(M - \nu\mu)^2}, \quad M > \nu\mu.$$

### 3. 최적화

본 댐 모형에서 제어할 수 있는 변수는 방출률  $M$ 과 적정수준  $\lambda$ 이다. 이 절에서는 댐의 관리와 운영에 관련된 비용들을 부과한 후, 장시간에 걸친 단위시간당 평균 비용을 구하고, 이를 최소화하는 방출률  $M$ 과 적정수준  $\lambda$ 의 값이 유일하게 존재함을 보인다.

댐 운영과 관리에 관련된 다음의 4가지 비용을 고려하자.

$C_1$ : 방출되는 물의 단위시간당 단위양당 보상액

$C_2$ : 댐을 열고 닫을 때 비용

$C_3$ : 댐이 비어있는 동안 단위시간당 비용

$C_4$ : 단위시간당 단위양의 물 저장 비용

장시간에 걸친 단위시간당 평균 비용은 재생보상정리 (Ross, 1996, p.133)에 의하여 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} C(M, \lambda) &= \frac{-M\{E(T_1) - 1/\nu\}C_1 + C_2 + C_3/\nu}{E(T)} + E(X)C_4 \\ &= \frac{-\nu\mu(\lambda + \mu)MC_1 + \nu\mu(M - \nu\mu)C_2 + \mu(M - \nu\mu)C_3}{M(\lambda + \mu)} \\ &\quad + \frac{(M - \nu\mu)\lambda^2 + 2\nu\mu^2(\lambda + \mu)}{2(M - \nu\mu)(\lambda + \mu)}C_4 \end{aligned}$$

#### 3.1. 방출률 $M$ 에 대한 최적화

$C(M, \lambda)$ 을  $M$ 에 관해 정리하여  $M$ 에 대한 비용함수  $C(M)$ 으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C(M) &= \frac{-2\nu\mu(\lambda + \mu)C_1 + 2\nu\mu C_2 + 2\mu C_3 + \lambda^2 C_4}{2(\lambda + \mu)(M^2 - \nu\mu M)} M^2 \\ &\quad + \frac{2\nu^2\mu^2(\lambda + \mu)C_1 - 4\nu^2\mu^2 C_2 - 4\nu\mu^2 C_3 - \lambda^2\nu\mu C_4 + 2\nu\mu^2(\lambda + \mu)C_4}{2(\lambda + \mu)(M^2 - \nu\mu M)} M \\ &\quad + \frac{2\nu^3\mu^3 C_2 + 2\nu^2\mu^3 C_3}{2(\lambda + \mu)(M^2 - \nu\mu M)}. \end{aligned}$$

위 식에서  $\lim_{M \rightarrow \nu\mu} C(M) = \infty$ ,  $\lim_{M \rightarrow \infty} C(M) = \frac{-2\nu\mu(\lambda + \mu)C_1 + 2\nu\mu C_2 + 2\mu C_3 + \lambda^2 C_4}{2(\lambda + \mu)} = K_1 < \infty$ 이므로 방출률  $M$ 이 무한히 커지면 비용함수  $C(M)$ 은  $K_1$ 으로 수렴하는 것을 알 수 있다.  $C(M)$ 을  $M$ 에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$C'(M) = \frac{\nu\mu^2 A(M)}{(\lambda + \mu)M^2(M - \nu\mu)^2}.$$

여기서, 분자의  $A(M) = [\nu C_2 + C_3 - (\lambda + \mu)C_4]M^2 - 2\nu\mu(\nu C_2 + C_3)M + \nu^2\mu^2(\nu C_2 + C_3)$  이다.  $C(M)$ 을 최소화하는  $M$ 의 값에 대해 다음의 정리를 얻을 수 있다.

**정리 3.1** (i)  $\nu C_2 + C_3 > (\lambda + \mu)C_4$ 인 경우,  $C(M)$ 은 아래의  $M^*$ 에서 최소값을 갖는다.

$$M^* = \frac{\nu\mu\{(\nu C_2 + C_3) + \sqrt{(\nu C_2 + C_3)(\lambda + \mu)C_4}\}}{\nu C_2 + C_3 - (\lambda + \mu)C_4}.$$

(ii)  $\nu C_2 + C_3 \leq (\lambda + \mu)C_4$ 인 경우,  $C(M)$ 은  $M$ 이 증가함에 따라 감소하다가  $K_1$ 으로 수렴한다.

증명:  $C'(M)$ 의 부호는  $A(M)$ 의 부호와 같으므로,  $A(M)$ 에서  $M^2$ 의 계수  $\nu C_2 + C_3 - (\lambda + \mu)C_4$ 의 부호에 따라 세 가지 경우로 나누어 고려할 수 있다.

(i)  $\nu C_2 + C_3 - (\lambda + \mu)C_4 = 0$ 인 경우, 모든  $M > \nu\mu$ 에 대해서  $A(M) < 0$ 이다. 따라서,  $C(M)$ 을 최소로 하는  $M^*$ 는 존재하지 않으며  $C(M)$ 은  $M$ 이 증가함에 따라 감소하다가  $K_1$ 으로 수렴한다.

(ii)  $\nu C_2 + C_3 - (\lambda + \mu)C_4 > 0$ 인 경우,  $A(M) = 0$ 을 만족하는 두 개의 실근  $M_1 < \nu\mu < M_2$ 가 존재하므로  $C(M)$ 은  $M^* = M_2$ 에서 최소화된다. 여기서  $M_2$ 는 위의  $M^*$ 로 주어진다.

(iii)  $\nu C_2 + C_3 - (\lambda + \mu)C_4 < 0$ 인 경우,  $A(M) = 0$ 을 만족하는 두 실근  $M_1 < M_2 < \nu\mu$ 가 존재하므로 모든  $M > \nu\mu$ 에 대해  $A(M) < 0$ 이다. 따라서, (i)의 경우와 마찬가지로  $C(M)$ 은  $M$ 이 증가함에 따라 감소하다가  $K_1$ 으로 수렴한다.  $\square$

정리 3.1에서, (i)  $\nu C_2 + C_3 > (\lambda + \mu)C_4$ 인 경우,  $\nu = 0.5, \mu = 40, \lambda = 80, C_1 = 0.2, C_2 = 40, C_3 = 50, C_4 = 0.01$ 로 놓으면  $M^*$ 는 23.013이 된다. 그림 3.1에 MATLAB을 이용하여 이 경우의  $C(M)$ 을 그려보았다.

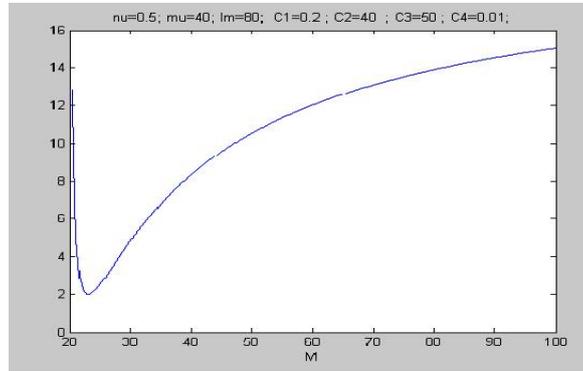


그림 3.1  $\nu C_2 + C_3 > (\lambda + \mu)C_4$ 인 경우  $C(M)$

### 3.2. 적정수준 $\lambda$ 에 대한 최적화

$C(M, \lambda)$ 을  $\lambda$ 에 관해 정리하여  $\lambda$ 에 대한 비용함수  $C(\lambda)$ 으로 표현하면 다음과 같다.

$$C(\lambda) = \frac{\{M(M - \nu\mu)C_4\}\lambda^2}{2M(M - \nu\mu)(\lambda + \mu)} + \frac{-2\nu\mu M^2 C_1 + 2\nu^2 \mu^2 C_1 M + 2\nu\mu^2 C_1 M + 2\nu\mu^2 C_4 M}{2M(M - \nu\mu)} + \frac{2\nu\mu C_2 M^2 + 2\mu C_3 M^2 - 4\nu^2 \mu^2 C_2 M - 4\nu\mu^2 C_3 M + 2\nu^3 \mu^3 C_2 + 2\nu^2 \mu^3 C_3}{2M(M - \nu\mu)(\lambda + \mu)}.$$

위 식에서  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} C(\lambda) = -\nu\mu C_1 + \frac{(M - \nu\mu)(\nu C_2 + C_3)}{M} + \frac{\nu\mu^2 C_4}{M - \nu\mu} = K_2 < \infty$ 이고,  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} C(\lambda) = \infty$ 이므로  $C(\lambda)$ 는 0에서 상수  $K_2$ 를 갖고,  $\lambda$ 가 무한히 커지면  $C(\lambda)$ 도 무한히 커진다는 것을 알 수 있다.  $C(\lambda)$ 을  $\lambda$ 에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$C'(\lambda) = \frac{B(\lambda)}{2M(\lambda + \mu)^2}.$$

여기서, 분자의  $B(\lambda) = MC_4\lambda^2 + 2\mu MC_4\lambda - 2\mu(M - \nu\mu)(\nu C_2 + C_3)$  이다.  $C(\lambda)$ 을 최소화하는  $\lambda$ 의 값에 대해 다음의 정리를 얻을 수 있다.

**정리 3.2**  $C(\lambda)$ 는 아래의  $\lambda^*$ 에서 최소값을 갖는다.

$$\lambda^* = -\mu + \sqrt{\mu^2 + \frac{2\mu(M - \nu\mu)(\nu C_2 + C_3)}{MC_4}}.$$

**증명:** 우선,  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} C'(\lambda) = \frac{-(M - \nu\mu)(\nu C_2 + C_3)}{M\mu} < 0$ 이고,  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} C'(\lambda) = \frac{C_4}{2} > 0$ 이다. 또한,  $B(\lambda)$ 는 판별식이  $D = 4\mu MC_4\{\mu MC_4 + 2(M - \nu\mu)(\nu C_2 + C_3)\} > 0$ 인 이차식이므로  $B(\lambda) = 0$ 을 만족하는 두 개의 실근  $\lambda_1, \lambda_2$ 가 존재하며,  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ 가 성립한다. 따라서  $C(\lambda)$ 는  $\lambda_2$ 에서 최소값을 가지며  $\lambda_2$ 는 위의  $\lambda^*$ 로 주어진다.  $\square$

정리 3.2의 비용함수  $C(\lambda)$ 를 MATLAB을 이용하여 그림 3.2에 그려보았다.  $\nu = 0.5$ ,  $\mu = 40$ ,  $M = 30$ ,  $C_1 = 0.2$ ,  $C_2 = 40$ ,  $C_3 = 50$ ,  $C_4 = 0.1$ 로 놓을 때,  $\lambda^*$ 는 102.35가 된다.

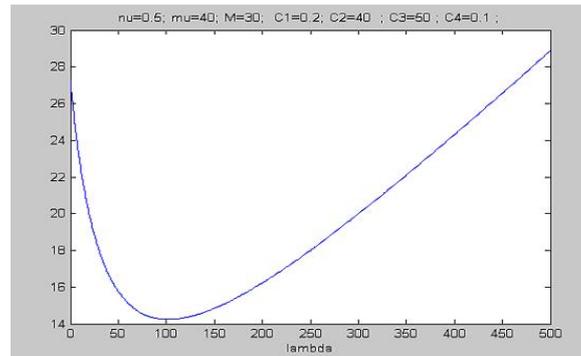


그림 3.2  $C(\lambda)$ 의 그래프

## 참고문헌

- Bae, J., Kim, S. and Lee, E. Y. (2002). A  $P_\lambda^M$ -policy for an  $M/G/1$  queueing system. *Applied Mathematical Modelling*, **26**, 929-939.
- Faddy, M. J. (1974). Optimal control of finite dams: Discrete (2-stage) output procedure. *Journal of Applied Probability*, **11**, 111-121.
- Jung, K. M. (2009). Two PM policies following the expiration of free-repair warranty. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **20**, 999-1007.
- Jung, K. M. (2010). A Bayesian approach to replacement policy following the expiration of non-renewing combination warranty based on cost and downtime. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **21**, 873-882.
- Kim, J., Bae, J. and Lee, E. Y. (2006). An optimal  $P_\lambda^M$ -policy for an  $M/G/1$  queueing system. *Applied Mathematical Modelling*, **30**, 38-48.
- Lam, Y. (1985). Optimal control of a finite dam: average-cost case. *Journal of Applied Probability*, **22**, 480-484.

- Lee, E. Y. and Ahn, S. K. (1998).  $P_\lambda^M$ -Policy for a dam with input formed by compound Poisson process. *Journal of Applied Probability*, **35**, 482-488.
- Lee, E. Y. (2008). A new approach to an inventory with constant demand. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **19**, 1345-1352.
- Ross, S. M. (1996). *Stochastic processes*, 2nd. Ed., John Wiley & Sons, New York.
- Zuckerman, D. (1977). Two-stage output procedure of a finite dam. *Journal of Applied Probability*, **14**, 421-425.

## An optimal policy for an infinite dam with exponential inputs of water<sup>†</sup>

Myung Hwa Kim<sup>1</sup> · Jee Seon Baek<sup>2</sup> · Seung Kyoung Choi<sup>3</sup> · Eui Yong Lee<sup>4</sup>

<sup>1,3,4</sup>Department of Statistics, Sookmyung Women's University

<sup>2</sup>Methodology Division, Statistical Research institute

Received 30 September 2011, revised 2 November 2011, accepted 7 November 2011

### Abstract

We consider an infinite dam with inputs formed by a compound Poisson process and adopt a  $P_\lambda^M$ -policy to control the level of water, where the water is released at rate  $M$  when the level of water exceeds threshold  $\lambda$ . We obtain interesting stationary properties of the level of water, when the amount of each input independently follows an exponential distribution. After assigning several managing costs to the dam, we derive the long-run average cost per unit time and show that there exist unique values of releasing rate  $M$  and threshold  $\lambda$  which minimize the long-run average cost per unit time. Numerical results are also illustrated by using MATLAB.

*Keywords:* Compound Poisson process, infinite dam, long-run average cost per unit time,  $P_\lambda^M$ -policy, stationary state.

---

<sup>†</sup> This research was supported by the Sookmyung Women's University Research Grants 2010.

<sup>1</sup> Master, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul 140-742, Korea.

<sup>2</sup> Deputy director, Methodology Division, Statistical Research Institute, Daejeon 302-847, Korea.

<sup>3</sup> Doctor, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul 140-742, Korea.

<sup>4</sup> Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul 140-742, Korea. E-mail: eylee@sookmyung.ac.kr