Journal of the Korean Data & Information Science Society
2011, **22**(6), 1065–1074

한국데이터정보과학회지

조건부 코퓰라를 이용한 포트폴리오 위험 예측에 대한 실증 분석†

김은정[1] · 이태욱[2]

[12]한국외국어대학교 통계학과

접수 2011년 9월 20일, 수정 2011년 10월 24일, 게재확정 2011년 10월 31일

요 약

1990년대 중반 이후 금융 분야에서 가장 많은 관심을 받는 연구 주제 중의 하나는 대표적인 위험 측정 방법인 VaR (Value at risk)이다. VaR는 주어진 신뢰수준에서 정상적인 시장조건을 가정할 때 선택한 목표기간 동안 발생할 수 있는 포트폴리오의 최대손실액으로 정의된다. 본 논문에서는 국내 주가지수 자료를 이용한 포트폴리오에 다변량 정규분포를 이용하는 VaR 예측 방법인 단순이동평균법과 지수가중이동평균법을 고려하여 VaR를 예측한 결과와 t 분포 및 조건부 코퓰라 (Copula) 함수를 이용하여 VaR를 예측한 결과를 비교 평가하였다. 자료 분석 결과에 의하면 포트폴리오 구성 종목 간에 종속성구조와 비정규성이 존재하는 경우에 t 분포와 조건부 코퓰라 방식을 이용하여 VaR 추정의 정확도를 높일 수 있다는 결론을 얻을 수 있었다.

주요용어: 금융시계열, 단순이동평균법, 시장위험측정, 지수가중이동평균법, 조건부이분산모형, 코퓰라.

1. 머리말

1990년대 중반이후 금융 분야에서 가장 많은 관심을 받는 연구 주제 중의 하나는 시장위험 측정 방법인 VaR (Value at risk)이다. VaR는 주어진 신뢰수준에서 정상적인 시장조건을 가정할 때 선택한 목표기간 동안 발생할 수 있는 포트폴리오의 최대손실액으로서 금융 분야의 위험 관리에 매우 중요한 역할을 하고 있다. VaR에 대한 자세한 내용은 Jorion (2006), 김철중과 윤만하 (2010)를 참고하기 바란다.

VaR 추정은 기본적으로 모수적 방법과 비모수적 방법으로 구분된다. 모수적 방법은 관련된 자산 수익률에 특정한 모수적 분포를 가정한 후 모수 추정을 통한 VaR 산정으로 이루어진다. 분산-공분산법이라고도 불리는 정규성 가정에 기초한 분석적 방법은 가장 널리 사용되고 있는 모수적 방법이라고 할 수 있다. 반면에 비모수적 기법은 특정한 분포 가정을 하지 않는다. 대표적인 비모수적 기법으로 역사적 시뮬레이션 (historical simulation) 방법이 있는데, 신뢰할만한 VaR 추정치 산정을 위해서는 모수적 방법보다 많은 자료가 필요하다는 단점이 있다. 따라서 많은 자료를 필요로 하는 역사적 시뮬레이션 방법보다는 어느 정도의 정확성을 갖는 정규분포 등의 특정한 분포에 기초한 모수적 방법이 보다 많이 사용되고 있다. 그러나 포트폴리오 위험 측정에서 많은 경우에 자산 수익률의 조건부 분포가 비대칭성 및 두

---

† 이 논문은 2010년도 정부 (교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단 기초연구사업의 지원을 받아 수행된 연구임(2010-0011222).

[1] (449-791) 경기도 용인시 처인구 모현면 왕산리 89-1번지, 한국외국어대학교 통계학과, 석사과정.
[2] 교신저자: (449-791) 경기도 용인시 처인구 모현면 왕산리 89-1번지, 한국외국어대학교 통계학과, 조교수. E-mail: twlee@hufs.ac.kr

터운 꼬리를 갖는 등 비정규성을 나타내고 있으며 이를 해결하는 문제가 방법론적이나 이론적인 관점에서 중요한 과제가 되고 있다 (Lee와 Ha, 2007; Lee 2009; Hong과 Kwon, 2010; Hwang과 Shin, 2010; Lee와 Lee, 2011). 이와 같은 비정규성 문제에 효과적으로 대처할 수 있으면서 신뢰할만한 VaR 추정을 하기위한 대안으로 Palaro와 Hotta (2006), Franke 등 (2008), 김주철과 김우환 (2009) 등에 기술되어 있는 코퓰라 (Copula) 방식을 사용할 수 있는데 이 방식은 복잡한 종속성구조를 고려함은 물론 정규분포 이외의 두터운 꼬리를 갖는 t 분포 등을 이용하기 때문에 더욱 정확한 포트폴리오 분포함수를 추정할 수 있다는 장점을 지니고 있다.

본 논문에서는 조건부 변동성 모형 (이상진과 빈기범, 2008), t 분포와 Copula 방식 (김주철과 김우환, 2009)을 이용한 포트폴리오 VaR 예측 방법을 동시에 고려하여 국내 주가지수 자료의 VaR를 추정하고 그 결과를 다변량 정규 분포를 고려한 단순이동평균법 (simple moving average; SMA)과 지수가중이동평균법 (exponentially weighted moving average)의 결과와 비교하고자 한다.

2. 정규분포를 가정한 VaR 추정 방법

서로 다른 n개의 자산으로 구성된 포트폴리오를 목표기간 동안 보유하는 경우에 그 연속복리 수익률 (이하 수익률)을 r_p라 하자. 본 논문에서는 1일의 목표기간을 가정하기로 한다. 만약 $f_r(x)$을 수익률 r_p의 확률밀도함수라고 하면, 주어진 신뢰수준 $100 \times (1-\alpha)\%$에서 포트폴리오의 VaR는 다음 식을 만족하는 값으로 정의한다.

$$\alpha = \int_{-\infty}^{-VaR} f_r(x)dx$$

일반적으로 VaR 추정을 위한 모수적 방법에서는 수익률 r_p의 분포를 정규분포로 가정하는 데, 이를 바탕으로 한 구체적인 VaR 추정 방법은 다음과 같다.

포트폴리오를 구성하는 n개 자산의 수익률을 $r_1, \cdots, r_n$로 표현하면 r_p에 대한 다음의 근사식을 얻을 수 있다.

$$r_p \fallingdotseq \sum_{i=1}^{n} w_i r_i$$

여기서 w_i는 목표기간 1일의 초기시점에서 i번째 자산의 가치가 전체 포트폴리오 가치에서 차지하는 비중을 나타낸다. 두 자산 이상으로 구성된 포트폴리오의 경우는 일반적으로 델타분석법을 이용하여 변동성을 추정할 수 있다. 델타분석법은 포트폴리오를 구성하는 각 자산의 수익률이 정규분포를 따른다는 가정을 하고 있다. 이 경우 포트폴리오를 구성하는 기초 자산의 수익률 벡터인 $\widetilde{r} = (r_1, \cdots, r_n)$은 다변량 정규분포를 따르게 된다. 만약 포트폴리오 수익률 벡터 $\widetilde{r}$이 평균벡터 $\widetilde{0} = (0, \cdots, 0)'$, 분산-공분산 행렬이

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

인 다변량 정규분포를 따른다면, 수익률 r_p의 분산 σ_p^2는 근사적으로 다음과 같이 계산된다.

$$\sigma_p^2 = Var(r_p) \fallingdotseq \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j} w_i w_j \sigma_{ij}$$

위 식에서 σ_i는 i번째 자산의 수익률 r_i의 표준편차를 의미하고, σ_{ij}는 i번째 자산의 수익률 r_i와 j번째 자산의 수익률 r_j간 공분산을 의미한다. 또한 분산 σ_p^2은 아래의 행렬 표현으로 나타낼 수도 있다.

$$\sigma_p^2 \fallingdotseq [w_1, \cdots, w_n] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = w'\Sigma w$$

위 식에서 ω=($\omega_1, \cdots, \omega_n)'$는 포트폴리오 구성 종목의 비중을 나타내는 가중치 벡터이다. 이상으로부터 주어진 목표기간 1일 동안 100 $\times(1-\alpha)$%의 신뢰수준에서의 포트폴리오의 VaR은 근사적으로 다음과 같다.

$$VaR = -z_\alpha \cdot V_o \cdot \sigma_p \fallingdotseq -z_\alpha \cdot V_o \cdot \sqrt{\omega'\Sigma\omega} \tag{2.2}$$

단, $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$, Φ는 정규분포의 누적분포함수이며 V_0는 초기 시점의 포트폴리오 가치이다.

VaR 예측 모형에서 자산 수익률 분포의 분산, 즉 변동성 (volatility)이 증가하면 VaR도 커지게 되므로 변동성에 대한 정확한 예측은 VaR 예측에 있어서 핵심적이다.이와 같은 변동성에 대한 예측은 식 (2.1)의 Σ를 정확하게 예측하는 문제로 생각할 수 있으며 이에 대한 일반적인 방법으로서 단순이동평균법과 지수가중이동평균법이 있다.

2.1. 단순이동평균법을 이용하는 방법

일정기간의 이동기간을 설정하고 그 기간 동안의 단순이동평균치를 구하여 변동성을 추정하는 방법으로서 단순이동평균법이 있다. 단순이동평균법에서는 이동기간에 포함된 모든 과거수익률은 동일한 가중치를 갖는다. 이동기간을 T일로 하였을 때 하나의 기초 자산으로 이루어진 포트폴리오의 단순이동평균법에 의한 변동성 σ_t^2는 평균이 0이라는 가정 하에서 다음과 같이 추정된다.

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} r_{t-i}^2$$

단, r_{t-i}는 $t-i$ 시점에서 기초자산의 일별수익률이다.

두 자산 이상으로 구성된 포트폴리오의 경우 t시점에서의 포트폴리오를 구성하는 기초 자산의 일별 수익률 벡터를 $\widetilde{r_t} = (r_{1,t}, \cdots r_{n,t})'$라 하자. 이를 바탕으로 모든 구성 자산 간의 분산-공분산 행렬을 이동기간을 T일로 하였을 때 포트폴리오 수익률의 변동성을 다음 $\widehat{\Sigma}$로 추정한다.

$$\widehat{\Sigma}^{SMA} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} \widetilde{r}_{t-i}\widetilde{r}_{t-i}^{\prime}$$

이 추정된 변동성 $\widehat{\Sigma}^{SMA}$을 식 (2.2)에 대입하면 목표 기간 1일 동안의 단순이동평균법에 의한 포트폴리오 VaR 예측값을 얻을 수 있다.

단순이동평균법은 계산하기에는 편리하다는 장점을 갖고 있다. 그러나 이 방법에서는 과거 수익률이 모두 동일한 비중을 가지므로 최근의 자료가 오래된 자료보다 더 많은 정보를 내포하고 있다는 점이 무시되고 있다. 변동성은 일반적으로 군집현상을 보이고 있는데 이것은 최근 과거자료가 오래된 과거자료보다 변동성을 추정하는 데 보다 중요하다는 것을 의미하므로 이런 변동성의 시간가변성을 반영하는 방법이 필요하게 된다.

2.2. 지수가중이동평균법을 이용하는 방법

변동성의 시간가변성을 반영하기 위해서 오래된 자료일수록 그것의 가중치를 지수적으로 감소시키는 지수가중이동평균법을 사용한다. 하나의 기초 자산으로 이루어진 포트폴리오 수익률의 지수가중이동평균법에 의한 t일의 변동성은 다음과 같다.

$$\sigma_t^2 = \lambda\sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)\,r_t^2 = (1-\lambda)\sum_{j=1}^{t-1}\lambda^{j-1}r_{t-j}^2 + \lambda^t\sigma_0^2$$

단, σ_0^2는 0-시점의 관측되지 않는 분산이며, 보통 최초 시점의 수익률 r_1 또는 미리 정한 상수를 초기값으로 사용한다. 지수가중이동평균법에 의하면, t시점에서의 추정치는 두 부분으로 이루어져 있다. 하나는 $\lambda\sigma_{t-1}^2$으로서 변동성의 지속성을 나타내는 부분이고, 다른 하나는 $(1-\lambda)r_t^2$로서 시장에서 발생한 사건에 대한 변동성의 반응을 나타낸다. 일반적으로 평활화 상수 λ는 0.75에서 0.98까지의 어떤 값을 취한다. λ가 1에 가까울수록 일간 분산은 더 평활화 된 모습을 보인다. 제이피 모건회사는 일간 변동성을 업데이트하기 위해 $\lambda = 0.94$를 사용하였다.

마찬가지로 t시점에서 포트폴리오를 구성하는 기초 자산의 일별 연속복리 수익률을 나타내는 벡터를 $\widetilde{r}_t = (r_{1,t},\cdots r_{n,t})'$라고 할 때, $\widetilde{r}_{t-i}^* = \sqrt{\lambda^i}\widetilde{r}_{t-i}, i = 0,\cdots,T$를 이용하여 다음과 같이 변동성을 추정할 수 있다.

$$\widehat{\Sigma}^{EWMA} = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{T}\widetilde{r}_{t-i}^*\widetilde{r}_{t-i}^{*'}$$

본 논문의 자료 분석에서는 $\lambda = 0.94$의 가중치를 주어 $\widehat{\Sigma}^{EWMA}$을 추정하였다. 단순이동평균법과 마찬가지 방법으로 변동성 $\widehat{\Sigma}^{EWMA}$을 식 (2.2)에 대입하면 지수가중이동평균법에 의한 포트폴리오 VaR 예측값을 얻을 수 있다.

3. Copula 함수를 이용한 VaR 측정

Copula함수는 다변량 분포함수와 주변분포함수를 연결시키는 함수를 의미하며 복잡한 종속성구조를 고려하면서 다변량 누적분포함수를 추정하는데 유용한 도구이다. Copula에 관한 현대 이론은 프랑스 학자 Sklar가 Copula에 정의를 내리고 Copula의 몇 가지 기본적인 특성을 규정할 때부터 거론되었다. 1999년 이후 재무금융 분야에 응용되기 시작하였으며 금융과 보험 분야에서 Copula는 위험자산 간의 의존성을 모형화 하는 유연성이 있는 기법이다. 본 장에서는 기본적인 Copula의 정의와 Sklar 정리를 소개하고자 한다.

우선 Copula 함수는 다음과 같은 세 가지 특성을 가지는 함수 $C : [0,1]^d \;\to\; [0,1]$를 의미한다. 단, $u = (u_1,\cdots,u_d) \in [0,1]^d$, $j \in [1,\cdots,d]$이다.

(1) $u_j = 0$인 경우 $C(u_1,\cdots,u_d) = 0$ 이 성립된다.

(2) $C(1,\cdots,1,u_j,1,\cdots,1) = u_j$가 성립된다.

(3) 임의의 $v = (v_1,\cdots,v_d) \in [0,1]^d$, $u_i \le v_i$에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$\sum_{i_1=1}^{2}\cdots\sum_{i_d=1}^{2}(-1)^{i_1+\cdots+i_d}C(x_{1i_1},\cdots,x_{di_d}) \ge 0,$$

여기서 $x_{j1} = v_j$이고 $x_{j2} = u_j$, $j \in \{1,\cdots,d\}$이다. (1)과 (3)은 Copula 함수가 분포함수가 되기 위한 조건이며, (2)는 Copula 분포의 주변분포함수가 균일분포임을 나타내는 조건이다. 다음 Sklar 정리는 Copula에 관한 가장 중요한 정리이며 Copula모형을 연구하는데 핵심적인 역할을 하고 있다.

정리 3.1 (Sklar 정리) F가 주변분포함수 $F_1, \cdots, F_d$을 가진 d차원 분포함수라 하자. 그러면, d차원의 Copula 함수 C가 존재하여 $\bar{R}^d$에 속한 모든 $x_1, \cdots, x_d$에 대하여 다음식이 성립한다.

$$F(x_1, \cdots, x_d) = C\left(F_1(x_1), \cdots, F_d(x_d)\right) \tag{3.1}$$

만약 $F_1, \cdots, F_d$가 연속이라면 C가 유일하다. 반대로 C가 d차원 Copula이며, $F_1, \cdots, F_d$가 분포함수라면 (3.1)에서 정의된 함수 F는 주변분포 $F_1, \cdots, F_d$을 가진 d차원 분포함수가 된다.

Sklar정리를 통해서 우리는 다변량 분포함수는 연속적인 주변분포와 다변량 의존구조로 분리될 수 있고, 다변량 분포함수의 의존구조는 Copula로 표현된다는 것을 알 수 있다. 다시 말하면, Copula함수는 단일변량 주변분포함수와 다변량 분포함수를 연결시키는 역할을 하는 함수이며, 변수간의 의존구조에 관한 모든 정보를 담고 있다. Sklar 정리의 핵심 내용은 다변량분포에 대한 추정 없이 다변량 분포의 의존구조를 분석하는 방법을 제시하는데 있다. 이변량 Copula함수는 다변량 Copula함수의 특별한 경우이며, 두 단일변량 주변분포함수와 이변량 분포함수를 연결해 준다. 더 자세한 내용은 Franke 등 (2008)을 참고하기 바란다. Copula 함수는 크게 두 가지로 구분된다. 첫 번째 그룹은 타원형 (elliptical family)분포를 특징으로 한 Gaussian Copula와 Student's t Copula 이며, 두 번째 그룹은 Archimedean Copula이다. Archimedean Copula로는 Gumbel Copula, Clayton Copula 및 Frank Copula가 있다. 본 논문에서는 Archimedean Copula에 속하는 대표적인 Copula 함수로서 Gumbel Copula와 Clayton Copula를 사용하였다. Archimedean Copula는 다양한 종류의 의존 구조를 나타낼 수 있으며 이변량 Gumbel Copula는 다음과 같은 형식을 가진다.

$$C(u, v; \delta) = \exp\left\{-\left[(-\log u)^{\delta} + (-\log v)^{\delta}\right]^{1/\delta}\right\}, \ \delta \geq 1$$

Gumbel Copula의 특징은 모수 δ에 의해 결정되는데 모수 δ를 통해 두 확률변수 사이의 의존 정도를 변화시킬 수 있다. δ가 1에 가까울수록 두 확률변수 간의 의존성은 약해진다. 한편 이변량 Clayton Copula는 다음과 같은 형식을 가진다.

$$C(u, v; \gamma) = \exp\left\{u^{-\gamma} + v^{-\gamma} - 1\right\}^{-1/\gamma}, \ \gamma > 0$$

이 때, γ가 0에 가까울수록 두 확률변수 간의 의존성은 약해진다.

3.1. 조건부 Copula를 이용한 VaR 예측 방법

여기서는 두 개의 자산으로 이루어진 포트폴리오 수익률에 대하여 Copula와 조건부 변동성 모형을 이용하여 VaR를 추정하는 구체적인 방법을 소개하고자 한다.

일반화 조건부 자기회귀 이분산 (GARCH) 모형은 금융시계열 자료에서 자주 관찰되는 변동성 집중화 현상 및 ARCH 효과 등을 적절하게 표현해 주기 때문에 금융시계열 자료의 변동성 분석에 널리 이용되고 있다 (Kim과 Kim, 2009). 본 논문에서는 보다 효과적인 위험 예측을 위하여 각각의 자산 수익률 자료에 평균 부분과 분산 부분을 동시에 고려하는 모형인 AR(1)-GARCH(1,1) 모형을 적합한 후에 얻어진 잔차에 대하여 Copula 함수를 적용할 것이다. 구체적인 VaR 추정 방법은 다음과 같이 여러 단계로 구성되어 있다.

(단계 1) 일정기간 동안 얻어진 각각의 자산 수익률 자료 $r_{i,t}, \ t = 1, \cdots, T, \ i = 1, 2$에 대하여 최대준우도추정량을 이용하여 AR(1)-GARCH(1,1) 모형을 적합한다.

$$\begin{aligned} r_{i,t} &= \phi_{i0} + \phi_{i1} r_{i,t-1} + a_{i,t} \\ a_{i,t} &= \sigma_{i,t}\epsilon_{i,t}, \sigma_{i,t}^2 = \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1} a_{i,t-1}^2 + \beta_{i,1}\sigma_{i,t-1}^2 \end{aligned}$$

최대준우도추정량은 $\widehat{\theta}_i = (\widehat{\phi}_{i0}, \widehat{\phi}_{i1}, \widehat{\alpha}_{i0}, \widehat{\alpha}_{i1}, \widehat{\beta}_{i1})$, $i = 1, 2$로 나타낸다.

(단계 2) 적합된 AR(1)-GARCH(1,1) 모형의 잔차에 표준정규분포 또는 표준화된 t-분포를 가정한 후 최대가능도추정법을 이용하여 Copula 모수를 추정하고 이를 이용하여 K개의 난수 $\widetilde{\epsilon}_{i,t+1,1}, \cdots, \widetilde{\epsilon}_{i,t+1,K}$, $i = 1, 2$를 생성한다. Gumbel Copula의 추정량은 $\widehat{\delta}_i$, $i = 1, 2$, Clayton Copula의 추정량은 $\widehat{\gamma}_i$, $i = 1, 2$로 나타낸다.

(단계 3) 추정된 AR(1)-GARCH(1,1) 모형과 Copula 함수의 난수를 이용하여 t+1시점의 포트폴리오 수익률 예측값 K개를 다음과 같이 생성한다.

$$\begin{aligned}
&\widetilde{r}_{p,t+1,k} = w_1\widetilde{r}_{1,t+1,k} + w_2\widetilde{r}_{2,t+1,k} \\
&\widetilde{r}_{i,t+1,k} = \widehat{\phi}_{i0} + \widehat{\phi}_{i1} r_{i,t} + \widetilde{a}_{i,t+1,k} \qquad\qquad k = 1, \cdots, K,\ i = 1, 2 \\
&\widetilde{a}_{i,t+1,k} = \widetilde{\sigma}_{i,t+1}\widetilde{\epsilon}_{i,t+1,k}, \widetilde{\sigma}^2_{i,t+1} = \widehat{\alpha}_{i,0} + \widehat{\alpha}_{i,1}\widetilde{a}^2_{i,t} + \widehat{\beta}_{i,1}\widetilde{\sigma}^2_{i,t}
\end{aligned}$$

단, w_1, w_2는 포트폴리오에서 각 자산의 투자 비중을 나타낸다.

(단계 4) 포트폴리오 수익률 예측값 $\widetilde{r}_{p,t+1,k}$, $k = 1, \cdots, K$의 α-분위수 $\widetilde{r}^{(\alpha)}_{p,t+1,k}$로 t+1시점의 VaR를 예측한다.

4. 실증 분석

본 장에서는 2개의 자산으로 구성된 가상적 포트폴리오의 VaR 예측을 위해 다변량 정규분포를 가정한 후에 단순이동평균법 및 지수가중이동평균법의 방식을 이용한 경우와 3.1장에서 제안된 조건부 Copula 방식을 활용한 경우의 성과를 비교 분석하고자 한다. 가상 포트폴리오는 투자 비중이 동일한 KOSPI200과 KOSDAQ으로 구성된 국내주가지수의 경우를 고려하였으며, 2001년 1월 2일부터 2011년 4월 20일까지의 KOSPI200 및 KOSDAQ의 일별 자료를 이용하였다. 본 연구에서는 실증분석에 앞서 각 시계열 자료들의 특성을 기초통계량 분석을 통해 살펴보았으며, 그 결과가 표 4.1에 제시되어 있다.

표 4.1 KOSPI200 및 KOSDAQ 수익률의 기초통계량

통계량	KOSPI200	KOSDAQ
평균	0.0006	0.0000
표준편차	0.0169	0.0180
첨도	7.7940	8.9039
Jarque Bera 통계량 (유의확률)	2520.4210 (0.0000)	4011.0370 (0.0000)

표 4.1에 나타난 국내주가지수의 일별수익률에 대한 요약통계량을 보면 모든 종목의 평균은 거의 0에 가깝고 표준편차에 비해 작다. 따라서 일별수익률의 평균은 0이라는 가정 하에 분석해도 무방한 것으로 판단된다. 그리고 첨도 (kurtosis)가 모두 7보다 큰 것을 알 수 있는데 이는 자료의 분포가 급첨의 성질을 가지고 있음을 의미하며 Jarque-Bera 통계량과 더불어 수익률의 분포가 정규분포를 따르지 않음을 나타낸다.

VaR 예측을 위하여 수익률 자료의 조건부 모형으로 위에서 언급한 바와 같이 AR(1)-GARCH(1,1) 모형을 사용하였으며, 조건부 분포는 정규 분포와 t 분포를 사용하는 경우를 서로 비교해 보았다. 조건부 분포가 정규분포인 경우와 t 분포일 때 AR(1)-GARCH(1,1) 모형에 대한 모수추정 결과는 표 4.2에 나타나 있다. KOSPI200 자료에서는 정규분포를 가정하는 경우와 t 분포를 가정하는 경우의 모수 추정값이 상당한 차이를 보이는 반면에 KOSDAQ은 큰 차이를 보이지 않는다. AIC를 고려해 볼 때 t 분포를 사용한 모형이 다소 적절해 보이지만, 정규분포를 사용한 모형과 큰 차이는 없다고 판단된다.

표 4.2 KOSPI200 및 KOSDAQ 수익률의 AR(1)-GARCH(1,1)모형의 모수 추정

	ARMA-GARCH-NORMAL	ARMA-GARCH-T
KOSPI200		
$\phi_{1,0}$	0.00105	0.00133
$\phi_{1,1}$	0.0189	-0.0016
$\alpha_{1,0}$	2.4557×10^{-6}	2.333×10^{-6}
$\alpha_{1,1}$	0.0747	0.0691
$\beta_{1,1}$	0.9181	0.9239
AIC	-5.5587	-5.5946
KOSDAQ		
$\phi_{2,0}$	0.00018	0.00018
$\phi_{2,1}$	0.1575	0.1230
$\alpha_{2,0}$	1.138×10^{-5}	1.069×10^{-5}
$\alpha_{2,1}$	0.1868	0.1837
$\beta_{2,2}$	0.7906	0.7979
AIC	-5.5256	-5.6248

Clayton Copula와 Gumbel Copula를 이용하여 모수를 추정한 결과가 표 4.3에 나타나 있다. Clayton Copula 모수 추정값은 0과 큰 차이를 보이고 있으며, Gumbel Copula 모수 추정값도 1과 큰 차이를 나타내고 있다. 따라서 KOSPI200 및 KOSDAQ 자료의 AR(1)-GARCH(1,1) 모형에 적합된 잔차의 상호 의존성이 매우 강하다는 것을 알 수 있다. 이러한 현상은 그림 4.1의 잔차의 산점도에도 잘 나타나 있다.

표 4.3 KOSPI200와 KOSDAQ 자료의 Copula 모수 추정

Copula	Parameter	ARMA-GARCH-Normal	ARMA-GARCH-t
Clayton	γ	1.2325	2.1254
	(AIC)	-1501.48	-1811.58
Gumbel	δ	2.1739	2.6353
	(AIC)	-2025.57	-2251.14

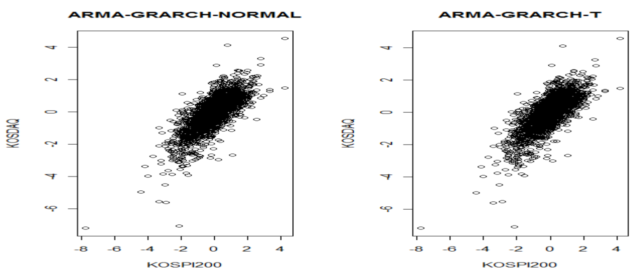

그림 4.1 KOSPI200의 KOSDAQ 자료의 잔자 산점도

정규분포와 t 분포를 가정하고 단순이동평균법과 지수가중이동평균법을 이용한 경우의 VaR성과를 측정하였다. 여기서는 신뢰수준으로 $\alpha = 0.005, 0.01, 0.05$ 및 0.10를 고려하였다. KOSPI200 및 KOSDAQ 자료의 경우 우선 $t = 1$ 부터 $t = 1000$까지의 자료를 이용하여 K =1000개의 수익률을 생성한 뒤 포트폴리오의 1시점 뒤의 VaR을 추정하고 한 시점씩 이동하며 반복적으로 작업을 하여 1553개의 VaR을 추정하였다. 실제 관측된 수익률이 VaR 예측치를 초과하는 경우 1, 그렇지 않은 경우 0의

값을 갖도록 하여 VaR 측정성과를 평가하였다. 구체적인 측정성과는 표 4.4에 각 유의수준에 따른 VaR을 초과하는 비율, 즉 실패율과 함께 신뢰수준 α가 실패율과 같다고 할 수 있는지에 대한, 즉 Christoffersen (1998)에 의해 제안된 비조건부 포함 (unconditional coverage; UC)을 검정하기 위해 우도비 검정을 시행하여 유의확률값을 괄호 안에 나타내었다. 우도비 검정에 대한 자세한 내용은 Jorion (2006)을 참고하기 바란다. 표 4.4를 살펴보면 대부분의 경우에 실패율의 값이 신뢰수준 α와 상당히 다르다는 것을 알 수 있다. 이 결과를 통해 조건부 분포가 비정규성을 나타내며 자료간의 의존도가 강한 경우에 기존의 VaR 예측 모형이 VaR를 적절히 추정하지 못한다는 것을 확인할 수 있다.

표 4.4 포트폴리오 손실이 VaR를 초과하는 비율 및 UC검정 결과

	$\alpha = 0.005$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.1$
SMA-NORMAL	0.01738	0.02318	**0.04764**	0.07791
	(0.0000)	(0.0000)	**(0.6709)**	(0.0037)
SMA-T	0.01159	0.01867	**0.04185**	0.07211
	(0.0002)	(0.0006)	**(0.1408)**	(0.0002)
EWMA-NORMAL	0.02060	0.02833	0.06632	**0.10750**
	(0.0000)	(0.0000)	(0.0032)	**(0.3223)**
EWMA-T	0.01223	0.02060	0.06374	**0.09980**
	(0.0000)	(0.0000)	(0.0129)	**(0.9798)**

다음으로 3.1장에서 제안된 조건부 Copula 방법을 이용하여 VaR를 추정하였다. 특히 잔차의 분포에 대하여 정규분포와 t 분포를 사용한 경우를 고려하였다. 기존 VaR 추정과 마찬가지로 $t = 1$ 부터 $t = 1000$까지의 자료를 이용하여 3.1장의 VaR 예측 과정에 따라 포트폴리오의 1시점 뒤의 VaR을 예측하고 한 시점씩 이동하며 반복적으로 작업을 하여 VaR을 추정한 뒤 실제 손실이 VaR 예측치를 초과하는 경우 1, 그렇지 않은 경우 0의 값을 갖도록 하여 VaR 측정성과를 평가하였다. 측정성과는 표 4.5에 각 유의수준에 따른 VaR을 초과하는 비율, 즉 실패율과 함께 신뢰수준 α가 실패율과 같다고 할 수 있는지에 대한 즉, 비조건부 포함을 검정하기 위해 우도비 검정을 시행하여 유의확률값을 괄호 안에 나타내고 있다.

이전의 단순이동평균 및 지수가중이동평균 결과와는 다르게 포트폴리오의 실패율이 신뢰수준 α의 값과 상당히 비슷하다는 것을 알 수 있다. 구체적으로 살펴보면, $\alpha = 0.005, 0.01, 0.05$인 경우에 t 분포를 이용한 결과가 좋음을 확인할 수 있다. 반면에 $\alpha = 0.10$인 경우에는 정규분포를 사용하는 것이 더 바람직해 보인다. 결론적으로 두꺼운 꼬리를 갖고 있으며 서로 상관관계가 강한 자산 수익률의 위험 예측에서는 α값이 작은 경우에 t 분포와 조건부 Copula함수를 이용하여 포트폴리오 분포함수를 더욱 정확하게 예측하고 이를 통해 VaR 예측의 정확도를 높일 수 있다고 판단된다.

5. 결론

다양한 VaR 예측 방법들을 평가한 결과 포트폴리오의 각 수익률 자료의 비정규성과 자료 사이에 상관관계가 VaR 예측의 정확도와 밀접한 관계가 있음을 확인하였다. AR(1)-GARCH(1,1) 모형 잔차의 의존관계가 상당히 강한 KOSPI200과 KOSDAQ의 경우에 기존 VaR 예측 방법을 사용하였을 때 $\alpha = 0.005, 0.01$의 유의수준에서 유의한 결과가 거의 나오지 않았으나, 조건부 Copula방법을 사용하였을 때는 조건부 분포를 t-분포를 고려하는 경우 유의한 결과를 도출할 수 있었다. 따라서 포트폴리오 구성 종목간의 의존성과 자료의 비정규성을 파악한 뒤 의존성과 비정규성이 있을 경우 t 분포와 Copula함수를 이용하여 VaR를 예측한다면 보다 정확하게 예측할 수 있다는 결론을 내릴 수 있었다. 본 논문에서는 주가지수만을 고려한 포트폴리오를 분석하였으나 개별 주식과 파생상품으로 이루어진 다양한 포트폴리

표 4.5 포트폴리오 손실이 VaR를 초과하는 비율 및 UC검정 결과: 조건부 Copula 방법

Copula	GARCH-N	GARCH-T
	$\alpha = 0.005$	
Clayton	0.01159 (0.00023)	**0.00451** **(0.78446)**
Gumbel	0.01869 (0.0000)	**0.00579** **(0.6554)**
	$\alpha = 0.01$	
Clayton	0.01933 (0.0002)	**0.00773** **(0.3692)**
Gumbel	0.02963 (0.0000)	**0.01031** **(0.9025)**
	$\alpha = 0.05$	
Clayton	**0.05863** **(0.1186)**	**0.04253** **(0.1767)**
Gumbel	0.06379 (0.0127)	**0.04639** **(0.5143)**
	$\alpha = 0.1$	
Clayton	**0.09600** **(0.5999)**	0.08054 (0.0106)
Gumbel	**0.09471** **(0.4878)**	0.07925 (0.0064)

오의 위험 예측에 일반화시킬 수 있는지에 대한 연구도 매우 의미 있고 흥미로운 과제일 것이다. 이는 향후 연구로 남기도록 한다.

참고문헌

김주철, 김우환 (2009). <금융공학 연구노트>, 자유아카데미, 서울.

김철중, 윤만하 (2010). <신용위험측정>, 한국금융연수원, 서울.

이상진, 김기범 (2008). 단일변량모형과 다변량모형의 포트폴리오 VaR 측정 성과. <증권학회지>, **37**, 877-913.

Christoffersen, P. F. (1998). Evaluating interval forecasts. *International Economic Review,* **39**, 841-861.

Franke, J., Hardle, W. K. and Hafner, C. M. (2008). *Statistics of financial markets,* Sprinker-Verlag, Berlin.

Hong, C. and Kwon, T. (2010). Distribution fitting for the rate of return and value at risk. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **21**, 219-229.

Hwang, C. and Shin, S. (2010). Estimating GARCH models using kernel machine learning. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **21**, 419-425.

Jorion, P. (2006). *Value at risk: The new benchmark for managing financial risk,* McGraw-Hill, Boston.

Kim, S. and Kim, J. (2009). Analysing financial time series data using the GARCH model. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **20**, 475-483.

Lee, T. (2009). Numerical study on Jarque-Bera normality test for innovations of ARMA-GARCH models. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **20**, 453-458.

Lee, T. and Ha, J. (2007). Testing the domestic financial data for the normality of the innovation based on the GARCH(1,1) model. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **18**, 809-815.

Lee, S and Lee, T (2011). Value at risk forecasting based on Gaussian mixture ARMA-GARCH model. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **81**, 1131-1144.

Palaro, H. P. and Hotta, L. K. (2006). Using conditional copula to estimate Value at Risk. *Journal of Data Science*, **4**, 93-115.

Journal of the Korean Data & Information Science Society
2011, **22**(6), 1065–1074

한국데이터정보과학회지

A numerical study on portfolio VaR forecasting based on conditional copula†

Eun Young Kim[1] · Tae Wook Lee[2]

[12]Department of Statistics, Hankuk University of Foreign Studies

Received 20 September 2011, revised 24 October 2011, accepted 31 October 2011

Abstract

During several decades, many researchers in the field of finance have studied Value at Risk (VaR) to measure the market risk. VaR indicates the worst loss over a target horizon such that there is a low, pre-specified probability that the actual loss will be larger (Jorion, 2006, p.106). In this paper, we compare conditional copula method with two conventional VaR forecasting methods based on simple moving average and exponentially weighted moving average for measuring the risk of the portfolio, consisting of two domestic stock indices. Through real data analysis, we conclude that the conditional copula method can improve the accuracy of portfolio VaR forecasting in the presence of high kurtosis and strong correlation in the data.

Keywords: ARMA-GARCH model, copula, exponentially weighted moving average, financial time series, simple moving average, VaR.

† This research was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology (2010-0011222).

[1] Graduate student, Department of Statistics, Hankyk University of Foreign Studies, Gyoenggi 449-791, Korea.

[2] Corresponding author: Assistant professor, Department of Statistics, Hankyk University of Foreign Studies, Gyoeng-gi 449-791, Korea. E-mail: twlee@hufs.ac.kr