韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2011. 11. 제 50권, 제 4호, 429-440.
J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
November. 2011, Vol. 50, No. 4, 429-440.

일상적 정의에서 수학적 정의로의 이행
- 영재 중학생들의 점과 선의 정의 인식 -

이 지 현 (서울전자고등학교)

Ⅰ. 서 론

유클리드는 순환논리를 피하기 위하여 증명 없이 수용하는 공리가 필요함을 분명히 인식하고 있었다. 그러나 왜 그는 '쪼갤 수 없는 것', '폭이 없는 길이'라는 정의가 순환 논리임은 깨닫지 못하였을까? 유클리드가 위와 같은 정의를 제시했던 맥락을 이해하기 위해서는 유클리드가 생각했던 '정의'란 과연 무엇이었는지를 살펴보아야 할 필요가 있다.

서양 사상사에서 정의는 플라톤의 대화편에서 소크라테스의 "X가 무엇인가?"라는 철학적 물음에 대한 대답으로써 처음 등장하였다(Robinson, 1954). 이렇게 고대 그리스의 철학자 소크라테스, 플라톤, 아리스토텔레스 등에 의하여 처음 전개된 '정의' 개념은 바로 '대상의 본질에 대한 기술'이었다. 그리스의 정의 관념은 사전에서 찾아볼 수 있는 일상적인 정의 개념, 즉 "어떤 말이나 사물의 뜻을 명백히 밝혀 규정함. 또는 그 뜻. 뜻매김(민중서림, 2001: 2045)"에서도 찾아볼 수 있다. 유클리드 원론의 '쪼갤 수 없는 것', '폭이 없는 길이'도 사전에서 찾아볼 수 있을 법한 일상적 정의이다. 따라서 수학에서 점과 선을 무정의 용어로 수용한다는 것에는 위와 같은 일상적 정의는 수학에서의 정의가 될 수 없음이 전제되어 있다.

일상적 정의는 정의되는 대상을 다른 것과 구별가능하도록 기술하는 것을 목적으로 하며, 이러한 일상적 정의에서는 정의와 정의되는 대상이 정확하게 일치할 필요가 없다. 반면 수학적 정의의 목적은 다른 대상과의 구분이 아닌 정의로부터 이미 알고 있는 성질뿐만 아니라 새로운 성질들을 증명하는 것에 있다. 수학적 정의는 정의와 정의되는 대상은 정확하게 동치 혹은 필요충분조건이다. 따라서 정의로부터 증명된 결론은 그 정의를 만족하는 모든 대상에 대해 항상 성립한다.

학교수학에서는 수학적 정의뿐만 아니라 일상적 정의도 흔하게 찾아볼 수 있기 때문에, 학생들이 대상 혹은 개념을 단순히 기술하는 '일상적 정의'와 증명에 사용되는 '수학적 정의'의 차이를 분명하게 인지하기란 쉽지 않다. 고등수학적 사고(advanced mathematical thinking)분야의 많은 연구들(Harel, Tall, 1991; Harel, Seldon, Seldon, 2006; Alcock, Simpson, 2002; Edwards, Ward, 2004; Tall, 1992a; Gray, Pinto, Pitta, Tall, 1999)이 학교수학의 관행에 젖어있는 대학생들은 일상적 정의와 수학적 정의를 구별하지 못할 뿐더러, 수학에서 정의는 일상적인 '기술'과 달리 증명의 기초라는 점도 명확하게 인식하지 못한다는 점을 보고하고 있다. 이들 연구에서 일상적 정의에서 수학적 정의로의 이행은 주로 대학초년생을 대상으로 극한, 벡터, 연속성과 같은 고등수학에 속하는 개념에 대하여 논의되었다.

수학 교과서에서 '정의'라는 용어는 중학교 2학년 논증기하에서 처음 등장한다. 특히 조영미(2001: 95-116)는, 논증기하에서 증명을 도입하면서 학교수학에서 요구하는 정의의 기능이 달라진다고 지적한다. 즉 논증기하에서는 도형의 정의에 대하여, 정의되는 용어가 그 정의항과 동치 혹은 필요충분조건이라는 수학적 정의의 특징을 필요로 한다. 예를 들어 "이등변 삼각형의 두 밑각의 크기는 같다."의 증명에서 '이등변삼각형'이라는 용어에 대하여 △이라는 개념 이미지만으로는 충분하지 않으며 '두 변의 길이가 같은 삼각형'라는 정의항으로 바꿀 수 있어야 한다(조영미, 2000). 이렇게 논증기하에서 증명의

* 접수일(2011년 7월 19일), 수정일(2011년 9월 13일), 게재확정일(2011년 11월 18일)
* ZDM분류 : E43
* MSC2000분류 : 97D70
* 주제어 : 정의, 중학교 기하, 증명, 무정의 용어

도입은 정의에 대해 대상을 기술하는 일상적 정의가 아닌 수학적 정의의 사용을 요구한다. 이 점에서 중학교 논증 기하는 일상적 정의로부터 수학적 정의로의 이행이 처음으로 이루어지는 지점이라고 할 수 있다. 이 논문은 영재 중학생들을 대상으로, 점과 선의 정의를 무엇이라고 생각하며 또 이와 관련하여 정의가 증명에 쓰인다는 것을 어떻게 이해하고 있는지를 분석하여, 중학교 논증 기하에서 영재 중학생들이 학습한 정의 개념을 확인하고 이것을 일상적 정의에서 수학적 정의로의 이행이라는 관점에서 논의하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 다음 절에서는 먼저 일상적 정의에서 수학적 정의로의 이행을 다룬 고등수학적 사고 분야의 연구들을 살펴본다.

Ⅱ. 일상적 정의에서 수학적 정의로의 이행

1. 개념 이미지와 개념 정의

Vinner(1991)는 어떤 개념의 명칭을 듣거나 봤을 때 마음속에 떠오르는, 정의와는 같지 않으나 그 개념과 관련된 그 무엇을 개념 이미지라고 하였다. 개념 이미지는 마음속에서 그 개념의 명칭과 결합된 비언어적인 것으로서 보통 시각적인 표상 혹은 인상, 경험 등의 집합체이다. 개념 이미지는 언어적인 형태로 번역될 수 있으나, 마음속에서 제일 먼저 떠오르는 것은 비언어적인 것이며 언어적인 형태는 더 나중 단계에서나 나타난다. 반면 개념 정의는 어떤 특정 개념을 확인할 수 있는 문장이다. 특히 고등수학에서의 (개념) 정의는 그것의 예가 되기 위해 필요한 성질을 정확하게 명시하며, 정의에서 명시한 성질은 그 개념이 가진 다른 성질을 증명하기 위해 사용된다(Tall, 1997). Vinner(1991: 70)는 정의가 도입될 때 인지구조 안에서 일어나는 (개념) 정의와 개념 이미지 사이의 상호작용 유형을 다음과 같이 세 가지로 제시하였다.

ⅰ) 개념 이미지가 정의에 동화되어 변화한다.
ⅱ) 개념 이미지는 그대로 남아있다. 반면 정의는 망각되거나 혹은 왜곡된다.
ⅲ) 개념 이미지와 정의 모두 그대로 있다. 그러나 개념 이미지와 개념 정의는 서로 연결되지 않은 채 독립적으로 작용한다.

일상적 맥락에서 정의는 개념의 전개와 직접적으로 관련이 없을 수도 있다. 그러나 전문적 맥락에서는 정의가 개념의 전개와 직접적으로 관련되므로 반드시 개념 정의를 참조해야 한다. 그러나 학생들은 흔히 개념 정의 대신 일상 경험에서 많은 예를 통해 형성한 이미지만을 환기한다. Vinner는 학생들의 이러한 행동을 일상적 상황에서의 사고 습관이 전문적인 상황에 해당하는 수학적 사고로까지 전이된 결과라고 보았다.

2. 학교수학에서 학문수학으로의 정의 개념의 이행

Raman(2004)는 학생들이 학교수학에서 학문수학으로의 이행에서 겪는 어려움을 이해하기 위해 고등학교, 미적분학, 해석학 교과서에서 연속함수 정의의 취급 방식을 비교하였다. 고등학교 교과서는 '종이에서 연필을 떼지 않고 그래프를 그릴 수 있는 함수'를 마치 형식적 정의인 것처럼 서술하고, '연속'에 대한 직관에 의존하여 연속함수와 불연속함수를 분류해 보도록 하였다. 반면 미적분학에서는 '$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$'라는 형식적 정의를 제시하였으며, 이 정의를 이용하여 어떤 함수가 연속인가 아닌가를 판단하는 문제들이 많았다. 하지만 연속함수의 형식적 정의 없이도 대부분의 문제를 해결할 수 있다는 점에서, 미적분학 수준에서도 학생들이 형식적 정의의 필요성을 느끼기는 어렵다. 마지막으로 해석학 교과서는 $\epsilon - \sigma$ 논법에 의한 형식적 정의를 제시하였으며, 미적분학과는 달리 "어떤 함수가 연속임을 보여라."라는 문제유형이 없었다. 해석학의 문제에서 연속함수의 정의는 가정 혹은 결론으로서, 연속성의 가정으로부터 어떤 다른 결론을 유도하는 것 혹은 어떤 가정 하에서 연속함수임을 증명하는 것이 요구되었다. 이러한 해석학 문제에서 정의는 필수불가결한 것이며 정의 문장은 매우 중요하다. Raman의 연구는 고등학교, 미적분학, 해석학 교과서의 정의 도입 방식 및 각 텍스트에서 학생들이 이러한 정의를 어떻게 사용하고 있는가를 분석하여, 각 텍스트들이 수학적 정의의 지위와 목적에 대해 상이한 인식론적 메시지를 전달할 수 있음을 구체적으로 보여주고 있다.

영국의 National Numeracy Strategy(NNS) 가이던스는 초-중등학교에서 수학 용어 사전의 사용을 권장하였다. 그런데 Morgan(2004, 2005)는 이렇게 수학 용어 사

전의 사용을 권장하는 것이 수학적 언어의 다른 중요한 특징들에도 불구하고 단순하게 용어만을 강조하는 것이라고 비판한다. Morgan(2005)는 정의의 여러 가지 역할을 다음과 같은 <표 1>로 제시하고 있다.

Morgan(2005)은 위와 같은 수학에서 정의의 다양한 역할을 고려할 때, 정의 학습에 대해 NNS 가이던스와 같이 수학 용어 사전의 사용을 강조하는 것은 어떤 개념의 예와 예가 아닌 것을 구별하는 것 이외의 수학적 정의가 가진 논리적이고 생산적, 창조적 측면을 간과할 수 있다고 지적하였다. Morgan(2004)은 수학 논문 및 중고등학교 교과서 상에서 확립되는 정의 개념을 체계-기능 문법(systemic functional grammar)으로 분석하였다.

수학 논문에서는 고등수학적 사고 분야의 연구들에서 언급된 수학적 정의의 특징(논증에서의 역할, 다른 가능한 정의들 중에서의 선택)을 찾아볼 수 있었던 반면, 교과서에서 학생들이 정의를 정말 수학적으로 사용할 수 있는 기회는 매우 드물었다. 그녀는 수학적 관행에의 참여와 수학적 사고방식의 계발이 수학교육의 목표 중 하나라 한다면, 학교수학에서도 여러 대안적인 정의들 사이의 선택, 또 합의된 어떤 정의로부터의 연역 및 정의로 귀착되는 논증과 같은 정의 경험을 제공해야 한다고 주장하였다(Morgan, 2004).

Alcock과 Simpson(2002)은 대학생들이 '수렴하는 수열은 유계이다.'라는 명제의 증명과정에서 수열의 수렴 정의를 다루는 유형을 세 가지로 분류하였다.

예를 들어 Wendy라는 학생은 '수렴하는 수열'에 대해 단조수열만을 떠올렸다. Cary는 Wendy와 달리 단조수열 외에도 다른 수렴하는 수열들을 고려하였으며, 이러한 수열들의 공통 성질을 찾아 증명을 시도하였다. 반면 Greg는 수렴에 대한 $\epsilon-\delta$ 정의를 이용하여 a_n값의 집합이 유계임을 증명하였다.

Alcock과 Simpson은 이 세 학생들이 생각한 '수렴하는 수열' 정의의 성격에 근본적인 차이가 있다고 지적하였다. 예를 들어 개념이미지에 의존한 Wendy와 Cary에게 수렴하는 수열이 형식적 정의이전에 이미 존재하고 있는 어떤 것이었던 반면에, $\epsilon-\delta$ 정의를 이용한 Greg에게 수렴하는 수열은 바로 $\epsilon-\delta$ 정의 성질로부터 존재하는 것이었다. 이렇게 수열의 수렴의 정의에 대한 사례를 분석한 Alcock과 Simpson의 연구는 많은 대학생들이 이미 존재하는 어떤 대상을 기술하는 일상적 정의와 수학적 정의의 사용을 구별하지 못하며, 그 결과 교수가 정의를 전달할 때 교수와 대학생들의 대화는 단절될 수 있음을 보여주고 있다. 즉 교수는 수학적 정의를 제시하면서 학생들이 수학적 정의를 사용할 것이라고 기대하지만, 많은 대학생들은 비전문적인 방식으로 개념 이미지를 구성 혹은 개선하려고만 시도하며 자신이 구성한 개념 이미지에 만족하면 이내 수학적 정의를 무시해 버린다. Edward와 Ward(2004)도 역시 대학생들이 수학적 정의의 성격에 대한 이해 부족으로 인하여 겪는 어려움을 대수학의 사례에서 논의하고 있다.

<표 1> 수학에서 정의와 관련된 활동(Morgan, 2005)

		정의의 성격과 기능	
		어떤 개념의 예와 예가 아닌 것을 구별하기	증명의 기초로 사용하기
정의에 대한 사용자의 지위	권위에 의해 제시된, 이미 존재하는 어떤 것	A: 예들을 테스트하기 위해 기준을 적용하기 혹은 기준을 만족하는 예를 만들어 보기 목적: 개념 자체를 이해하기	C: 그 이상의 성질을 연역하고 증명을 구성 목적: 관련된 지식의 전개; 증명 기술을 계발; 수학적 연역 추론하기
	사용자가 구성할 수 있는 것	B: (토론이나 반례 등을 통하여) 사용자의 개념 이미지를 명확히 고정하기, 개념이미지를 정확한 정의에 가깝도록 정련하기 목적: 개념의 전개, 수학적 추론 및 논쟁	D: 흥미롭거나 유용한 결과를 산출하는 새로운 개념을 창조하기 목적: 진정한 수학적 관행에의 참여

Ⅲ. 영재 중학생들의 점과 선의 정의 인식

1. 연구방법 및 연구 참여자

본 연구에서는 중학교 논증기하에서 영재 중학생[1]들이 학습한 정의 개념을 조사하기 위하여 다음과 같은 세 개의 설문 문항을 개발하였다. 설문 문항의 개요는 <표 2>와 같다.

<표 2> 설문조사의 개요

문항	문항 내용
문항 1	유클리드 점, 선의 정의에 대한 동의 여부를 '수학에서의 정의'라는 관점에서 서술하기
문항 2	일상적 정의와 수학적 정의 개념 비교하기
문항 3-1	증명에서 유클리드 점, 선 정의가 사용되는지를 판단하기
문항 3-2	증명에서 유클리드 점, 선 정의와 이등변삼각형 정의의 사용을 비교하기

문항 1은 유클리드 원론에서의 점과 선의 정의를 제시하고, 이에 대한 동의 여부를 서술하는 과정에서 수학에서의 정의에 대한 자신의 생각을 서술하는 것이다. 문항 2는 수학적 정의와 사전에서의 '백조' 정의와 비교한 Alcork과 Simpson(2002)의 예를 이용하여, 일상적 정의와 수학적 정의 개념을 비교하는 문항이다. 문항 3은 증명에서의 정의 사용에 관한 것으로, 문항 3-1에서는 유클리드의 점과 선의 정의가 증명에서 사용되는지를, 문항 3-2에서는 문항 3-1의 응답을 보다 자세히 확인하기 위해 연구자의 이전 연구(2011)에서 얻은 한 학생의 응답 사례를 예시하여 유클리드의 점 정의가 이등변삼각형의 정의처럼 증명에 사용되는가를 질문하였다.

설문 조사는 2011년 5월, 서울대학교 과학영재센터 수학분과 사사반 소속 중학교 3학년 영재 중학생 8명을 대상으로 약 1시간동안 실시하였다[2]. 설문 조사는 먼저 실시한 문항의 응답이 다음 문항의 응답에 영향을 끼치는 것을 차단하기 위하여, 앞의 문항에 대한 응답을 걷은 후 다음 문항을 배부하였다. 연구자는 설문 조사가 진행되는 동안 학생들의 답안 작성 과정을 관찰하면서 각 학생들의 생각을 이해하기 위하여 대화를 나누고 이를 기록하였다. 그리고 좀 더 긴 대화가 필요했던 3명의 학생들은 설문이 끝난 뒤에 추가적인 인터뷰를 실시하였다.

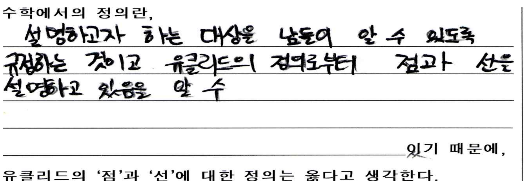
2. 조사 결과

(1) 유클리드의 점, 선의 정의에 대한 동의 여부와 '수학에서의 정의'에 대한 생각

문항 1을 다음과 같이 제시하였다.

> 문항 1. 유클리드는 기하학 원론에서 '점'과 '선'을 다음과 같이 정의하였다.
>
> '점'은 더 이상 쪼갤 수 없는 것이다.
> '선'은 폭이 없이 길이만 있는 것이다.
>
> 위와 같은 '점'과 '선'에 대한 정의에 동의합니까? 수학에서 '정의'란 무엇인지 생각해 보고, 유클리드의 정의에 동의 혹은 동의하지 않는 이유를 수학적 정의라는 관점에서 설명하여 보세요.

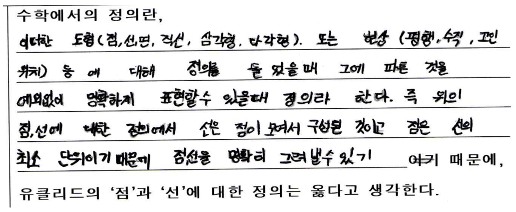
한 명을 제외한 모든 학생들이 유클리드의 정의에 동의하였는데, 다음은 유클리드의 정의에 동의한다고 밝혔던 두 학생의 수학적 정의에 대한 생각이다.


수학에서의 정의란,
설명하고자 하는 대상을 남들이 알 수 있도록 규정하는 것이고 유클리드의 정의로부터 점과 선을 설명하고 있음을 알 수
있기 때문에,
유클리드의 '점'과 '선'에 대한 정의는 옳다고 생각한다.

<그림 1> 유클리드 정의에 동의한 학생A의 수학적 정의에 대한 생각

1) '일상적 정의에서 수학적 정의로의 이행'은, 학교수학에서 학문수학으로의 이행과 관련하여 대학에서 수학을 전공하지 않을 보통의 학생들보다는 수학을 전공할 학생들에게 더 중요한 문제이다. 따라서 본 연구에서는 보통 학생들보다 수학 또는 그 관련 학문을 전공할 가능성이 높다고 기대할 수 있는 수학 영재학생들을 연구대상자로 선정하였다.

2) 서울대학교 과학영재교육원 수학분과에서는 초등학교 6학년 겨울에 15-20명의 학생을 선발하여 기본적으로 2년간 100시간씩의 영재교육을 실시하고 있다. 본 연구의 설문에 참여한 학생들은 2년간의 영재교육 후에 다시 선발되어 1년간의 사사교육을 받고 있는 매우 우수한 학생들로서 중학교 과정은 모두 선행 학습한 상태였다. 또 8명의 학생 중 남학생은 5명, 여학생은 3명이었다.


수학에서의 정의란,
어떠한 도형(점,선,면, 직선, 삼각형, 다각형). 또는 현상(평행,수직, 꼬인 위치) 등 에 대해 정의를 들었을때 그에 따른 것을 예외없이 명확하게 표현할수 있을때 정의라 한다. 즉 위의 점,선에 대한 정의에서 선은 점이 모여서 구성된 것이고 점은 선의 최소 단위이기 때문에 점선을 명확히 그려낼수 있기 이기 때문에,
유클리드의 '점'과 '선'에 대한 정의는 옳다고 생각한다.

<그림 2> 유클리드 정의에 동의한 학생B의 수학적 정의에 대한 생각

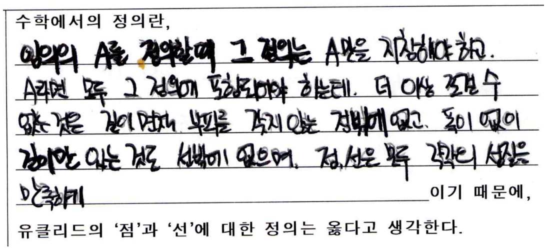
학생 A, B가 서술한 "설명하고자 하는 대상을 남들이 알 수 있도록 규정하는 것", 또 "그것을 들었을 때 그에 따른 것을 예외 없이 명확하게 표현하는 것"으로서의 정의는 사실 국어사전의 일상적 정의와 다르지 않은 것이다. 학생 A와 B의 이러한 응답은 정의에 대하여 '용어의 뜻을 명확하게 정한 것'이라는 설명에 그치는 교과서의 영향도 크다고 생각된다. 우리나라 교육과정상에서는 '정의'라는 용어를 중학교 수학 2에서 처음으로 다음과 같이 설명한다(이준열 외 5인, 2010: 170).

> 정삼각형의 뜻은 '세 변의 길이가 모두 같은 삼각형' '세 내각의 크기가 모두 같은 삼각형'과 같이 서로 다르게 말할 수 있지만 한 용어의 뜻을 여러 가지로 정하면 혼란이 생길 수 있으므로 '세 변의 길이가 모두 같은 삼각형'으로 정한다.
> 이와 같이 용어의 뜻을 간결하고 명확하게 정한 문장을 그 용어의 **정의**라고 한다.

그러나 수학에서의 정의는 일상적 정의와는 달리, 정의되는 개념(피정의항)과 그 정의가 정확하게 필요충분조건이다. 이것을 미국 기하교과서 Jacob(2003), Schultz 외 3인(2003)에서는 논증기하의 도입부에서 자세히 다루고 있는데, 예를 들어 Schultz외 3인(2003: 99-100)에서의 정의에 대한 설명을 살펴볼 수 있다.

> 정의를 조건명제로 서술하면 특별한 성질을 가지고 있다. 예를 들어,
>
> flopper는 하나의 눈과 두 개의 꼬리를 가지고 있다.
>
> 이 명제에서 가정과 결론을 교환하면 그 역명제를 얻을 수 있다.
>
> 하나의 눈과 두 개의 꼬리가 있는 도형은 flopper이다.
>
> 여기서 원 명제와 그 역명제가 모두 참임에 주목하자. 이러한 성질은 모든 정의에서 성립한다. 이 때 둘 다 참이 되는 어떤 명제와 그 역명제는 "if and only if" (기호로 표현하면($p \Leftrightarrow q$)를 이용하여 다음과 같이 하나로 쓸 수 있다.
>
> p if and only if q or $p \Leftrightarrow q$
>
> 이 때 flopper의 정의는 다음과 같다.
>
> 어떤 도형이 하나의 눈과 두 개 꼬리를 가지고 있을 때, 그리고 그때만이 flopper이다.

학생 C는 위와 같은 수학적 정의의 특징을 "수학에서 A의 정의란 A만을 지칭해야 하고, 또 A라면 모두 그 정의에 포함되어야 한다."라고 서술하였다(<그림 3>). 하지만 학생 C는 '쪼갤 수 없는 것'이 이러한 수학적 정의의 특징을 만족한다고 생각하였다.

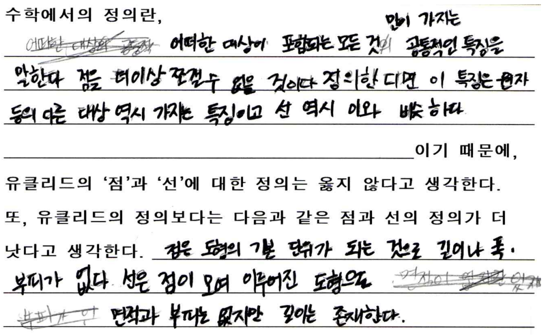

수학에서의 정의란,
임의의 A를 정의할때 그 정의는 A만을 지칭해야 하고. A라면 모두 그 정의에 포함되어야 하는데. 더 이상 쪼갤 수 없는 것은 길이 면적 부피를 갖지 않는 점밖에 없고. 폭이 없이 길이만 있는 것도 선밖에 없으며. 점,선은 모두 각각의 성질을 만족하기 이기 때문에,
유클리드의 '점'과 '선'에 대한 정의는 옳다고 생각한다.

<그림 3> 유클리드 정의에 동의한 학생C의 수학적 정의에 대한 서술

연구자는 학생 C와의 인터뷰에서, 점의 정의가 어떻게 이러한 수학적 정의의 특징을 만족할 수 있는지를 질문하였다. 이에 학생 C는 "점은 쪼개지지 않으며, 또 쪼개지지 않는 것이 점이다."이라고 다음과 같이 부연 설명하였다.

> 학생 C: 제가 일반적으로 점이라고 알고 있는 게, 위치만 있고 길이나 면적이나 부피나 그런 것은 없는 건데... 쪼개지지 않는다는 것은 길이나 면적이나 부피나 이런 것을 가지고 있어서는 안 되고, 그런 것(길이나 면적이나 부피를 가지고 있지 않은 것)은 쪼개지지도 않을 테니까.

한편 유클리드 정의에 동의하지 않았던 유일한 학생인 D는 수학적 정의에 대하여 다음과 같이 서술하였다(<그림 4>).


수학에서의 정의란,
~~어떠한 대상의 공통적~~ 어떠한 대상에 포함되는 모든 것~~의~~ 만이 가지는 공통적인 특징을
말한다 점은 더이상 쪼갤수 없을 것이다 정의한다면 이 특징은 원자
등의 다른 대상 역시 가지는 특징이고 선 역시 이와 비슷하다
이기 때문에,
유클리드의 '점'과 '선'에 대한 정의는 옳지 않다고 생각한다.
또, 유클리드의 정의보다는 다음과 같은 점과 선의 정의가 더
낫다고 생각한다. 점은 도형의 기본 단위가 되는 것으로 길이나 폭,
부피가 없다 선은 점이 모여 이루어진 도형으로 ~~면적이 없지만 있게~~
~~부피가 없~~ 면적과 부피는 없지만 길이는 존재한다.

<그림 4> 유클리드 정의에 동의하지 않은 학생 D의 수학적 정의에 대한 생각

학생 D는 수학에서의 정의란 "어떠한 대상에 포함되는 모든 것만이 가지는 공통적인 특징"이라고 하였으며, 학생 C와 달리 '쪼갤 수 없는 것'은 점만이 가질 수 있는 고유한 성질은 아니라고 보았다. 그러나 학생 D도 점이 무정의 용어라는 사실은 모르고 있었으며 "도형의 기본 단위가 되는 것으로 길이나 폭, 부피가 없다."라는 정의가 더 낫다고 하였다.

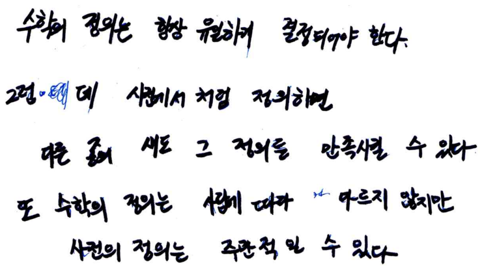
이상과 같은 문항 1에 대한 학생들의 응답결과에서, 대부분의 영재학생들이 서술한 수학적 정의는 사실 사전에서의 일상적 정의와 거의 같은 것이었다. 그리고 유클리드 원론에서의 혹은 그 외의 점과 선에 대한 직관적 기술을 그것의 수학적 정의라고 생각하고 있음을 확인할 수 있었다. 나름대로 수학적 정의의 특징을 정확하게 서술할 수 있었던 학생 C도 '쪼갤 수 없는 것'이라는 점의 정의가 수학적 정의가 될 수 있다고 생각하고 있었다.

(2) 일상적 정의와 수학적 정의의 비교

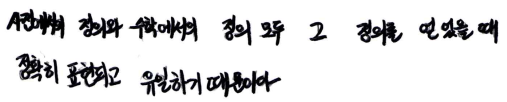
일상적 정의와 수학적 정의 개념을 비교하기 위한 문항 2는 다음과 같이 사전에서의 백조 정의를 이용하여 제시하였다.

> **문항 2.** '정의'는 수학에만 있는 것은 아닙니다. 예를 들어 사전에서도 다음과 같은 '백조'의 정의를 찾아볼 수 있습니다.
>
> 백조: 백조속의 큰 물새로 유연한 긴 목과 물갈퀴가 있는 발을 가지고 있으며, 대부분의 종들은 하얀 깃털을 가지고 있다.
>
> 이렇게 사전에서 찾아볼 수 있는 정의와 수학에서의 정의는 같은 것이라고 생각합니까?
> 만약 수학에서의 정의가 사전에서 찾아볼 수 있는 정의와 다른 특징을 갖는다고 생각한다면, 수학에서의 정의가 갖는 고유한 특징을 예를 들어 적어주십시오.

문항 2에 대하여, 사전에서의 일상적 정의와 수학적 정의는 다르다는 응답과 같다는 응답은 똑같이 4명이었다. 다음은 각각 수학에서의 정의가 사전에서 찾아볼 수 있는 일상적 정의와 다르다(<그림 5>), 같다(<그림 6>)고 답변한 응답 사례이다.


수학의 정의는 항상 유일하게 결정되어야 한다.
그런데 사전에서 처럼 정의하면
다른 종의 새도 그 정의를 만족시킬 수 있다
또 수학의 정의는 사람에 따라 다르지 않지만
사전의 정의는 주관적 일 수 있다

<그림 5> 수학에서의 정의는 일상적 정의와 다르다(학생 E)


사전에서의 정의와 수학에서의 정의 모두 그 정의를 읽었을 때
정확히 표현되고 유일하기 때문이다

<그림 6> 수학에서의 정의가 일상적 정의와 같다는 응답(학생 B)

그 외 수학에서의 정의는 사전에서의 일상적 정의와 다른 것이라고 답변한 학생들은 수학에서의 정의는 "사전에서의 정의 중 이미 명확하고 이미 증명된 것", 또는 "객관적이고 엄밀한 것"이라고 언급하였다. 한편 수학에서의 정의는 일상적 정의와 같은 것이라고 생각한 학생들은 "사전에서의 정의도 수학적 정의와 마찬가지로 A를 B로 정의할 때, A이면 B이고 A가 아니면 B가 아니어야 하는 성질을 만족한다.", 또 "사전에서의 정의와 수학에서의 정의는 실생활과 수학 각각에서 편리하게 이용할 수 있도록 정의한 것이므로 용도가 같다.", "모두 그 물체를 설명함으로서 그것의 고유한 특징을 나타낸다."라고 서술하였다.

한편, 앞에서 살펴본 미국교과서 Schultz외 3인(2003: 102-103)에서도 문항 2와 유사하게 사전적 정의와 수학적 정의의 차이에 관한 다음과 같은 문제를 찾아볼 수 있었다.

> **문제 8-16.** 다음 주어진 문장이 (수학적) 정의인지 아닌지를 다음 과정을 따라 판단하시오.
>
> **a. 주어진 문장을 조건명제로 써보아라.**
> **b. 그 역명제를 써보아라.**
> **c. "if and only if" 명제로 써보아라.**
> **d. 주어진 문장이 정의인지 판단하고, 그 이유를 설명하여라.**
>
> 8. 십대란 13살 이상의 사람이다.
> 9. 십대란 13세부터 19세 사이의 사람이다.
> 10. 0은 -1과 1사이의 정수이다.
> 11. 짝수는 2로 나눠지는 수이다.
> 12. 각은 두 개의 반직선으로 이루어져 있다.
> 13. 직각이란 90° 이다.
> 14. 화강암이란 매우 단단한 결정체 암석이다.
> 15. 수소는 알려진 물질 중에서 가장 가벼운 물질이다.
> 16. 수달은 물갈퀴가 있는 발로 수영하는 털로 덮인 작은 포유류이다.

앞에서 살펴보았듯이, Schultz외 3인(2003)에서는 수학적 정의에서는 정의되는 개념과 그 정의항은 필요충분조건임을 설명하고, 위와 같은 문제를 통해 사전에서의 일상적 정의가 수학적 정의의 조건을 만족하지 않을 수 있다는 점을 다루고 있었다.

그러나 문항 2에서 4명의 영재학생들은 사전에서의 정의와 수학에서의 정의가 같은 것이라고 생각하였다. 또 사전에서의 정의와 수학에서의 정의가 다르다고 생각한 학생들도 사전에서의 정의와 수학적 정의의 차이를 정확하게 언급하기 보다는 '명확성', '객관성', '엄밀성'등과 같은 단순한 느낌만을 서술하였다. 이러한 문항 2의 조사 결과는, 수학적 정의의 특징을 자세히 취급하는 미국 교과서와 비교하여 볼 때 정의에 대하여 '용어의 뜻을 명확하게 정한 것'이라는 설명에 그치고 있는 교과서의 영향과 무관하지 않다고 생각된다.

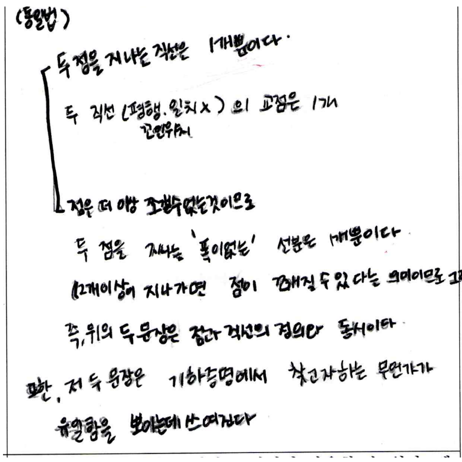
(3) 증명에서의 정의의 사용

문항 3-1은 다음과 같이 제시되었다.

> **문항 3-1.** 기하 증명에서 유클리드의 '점'이나 '선'의 정의를 사용합니까?
> '점'이나 '선'의 정의가 기하 증명에서 사용되는 예를 들어 설명하여 보십시오.
> 만약 '점'이나 '직선'의 정의는 기하학적 증명에서 사용되지 않는다고 생각한다면, 왜 이러한 정의는 증명에서 사용할 수 없는지, 또 '점'이나 '선'의 정의가 가지고 있는 증명 외적인 역할은 무엇인지 설명하여 보십시오.

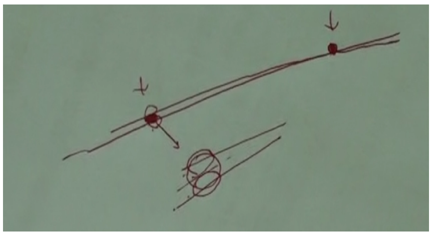
조사 결과 두 명을 제외한 나머지 6명의 학생들이 유클리드의 정의가 증명에 사용된다고 답변하였다. 증명에서 유클리드의 정의를 사용하지 않는다고 대답한 두 명의 학생은 유클리드의 정의는 증명에서 사용하기에는 조건이 너무 부족하며, 증명 대신 그림을 설명 혹은 유추하는 데 쓰인다고 하였다.

다음은 유클리드의 점과 선에 대한 정의가 증명에 사용된다고 답변한 학생 중에서, 특히 점과 선에 대한 정의가 "두 점을 지나는 직선은 유일하다(유클리드 공리 1)." 와 "두 직선이 만나면 한 점에서 만난다."라는 두 명제와 동치라고 서술했던 학생 F와의 인터뷰 중 일부이다.


(동일법)
두 점을 지나는 직선은 1개뿐이다.
두 직선 (평행, 일치 x) 의 교점은 1개
꼬인위치
점은 더 이상 쪼갤수 없는것이므로
두 점을 지나는 '폭이없는' 선분은 1개뿐이다.
(2개이상이 지나가면 점이 2개질 수 있다는 의미이므로 그러하다)
즉, 위의 두 문장은 점과 직선의 정의와 동치이다.
또한, 저 두 문장은 기하증명에서 찾고자하는 무언가가
유일함을 보이는데 쓰여진다

<그림 7> 유클리드의 정의를 증명에서 사용할 수 있다는 응답(학생 F)

학생 F는 "만약 점이 크기를 가진다면 두 점을 지나는 직선은 하나 이상일 수 있다."는 것을 <그림 8>을 그려 설명하였다.



<그림 8> 학생 F의 "점이 크기를 가지면, 두 점을 지나는 직선은 하나 이상이다." 설명

학생 F: 만약에 두 점을 지난다고 했을 때요,......두 직선이 두 점을 지난다면 이렇게 돼야 되는 거잖아요. 그러면은 만약에 여기랑 여기서 완벽하게 동일한 같은 두 지점을 지난다면, 두 직선이 같은 직선이잖아요. 지금, 여기가 다르게 그려져 있으니까, 이 점을 확대해서 보면 여기가 이렇게 된 거잖아요. 점의 정의 이용해서 두 부분으로 나눠질 수 있다고 생각했어요. <중략>

연구자는 학생 F에게 언급한 두 명제 중 "두 점을 지나는 직선은 유일하다"라는 명제가 유클리드의 첫 번째 공리임을 아는지를 질문하였다. 그러나 학생 F는 그것을 기억하지 못하였기 때문에, 연구자는 이 명제는 유클리드의 첫 번째 공리임을 알려주었다. 그리고 이 공리부터 다른 명제 "두 직선이 만나면 한 점에서 만난다."를 학생 F가 직접 증명해보도록 한 후, 이 증명에서 점의 정의가 사용되는가를 다시 물었다.

학생 F: 공리로 하면은, (점의 정의는 증명에) 안 쓰인다고 보는데, 일단 공리가 성립하려면, 점이 크기가 있으면 안 되지 않나요?
연구자: 공리가 성립하려면?
학생 F: 글쎄요. 직접적으로 사용되는 것은 아니지만, 없으면...<중략>
연구자: 점의 정의가 증명에 사용된다고 답변했을 때, "두 직선이 만나면 한 점에서 만난다."라는 것을 유클리드의 첫 번째 공리로부터 증명할 수 있다는 사실을 알고 있었니?
학생 F: 그냥 증명이 아니라 (점과 선의 정의와 "두 직선이 만나면 한 점에서 만난다."라는 것이) 동치라고 생각했어요.

학생 F는 유클리드의 첫 번째 공리로부터 "두 직선이 만나면 한 점에서 만난다."를 증명할 때는 점의 정의를 증명에서 사용하지 않는다고 하면서도, 일단 공리가 성립하려면 "쪼갤 수 없는 것"이라는 정의가 필요하다고 하였다. 학생 F와 같이, 본 설문 조사에서 반 이상의 영재 학생들은 "유클리드의 점과 선의 정의를 증명에서 사용할 수 있는가?"에 대해 놀랍게도 유클리드의 정의를 증명에서 사용할 수 있다고 생각하고 있었다.

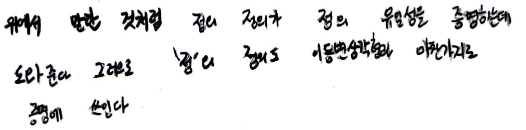
문항 3-2는 문항 3-1에 대해 보다 자세히 확인하고자 연구자의 이전 연구(2011)에서 얻은 한 학생의 사례를 예시하고, 증명에서 유클리드의 점의 정의와 이등변삼각형의 정의 사용을 비교하게 하였다.

문항 3-2. 소민이는 '쪼갤 수 없는 것'이라는 점의 정의가 "두 직선은 기껏해야 한 점에서 만난다"라는 성질의 증명에 쓰인다고 다음과 같이 설명하였습니다.

소민: '쪼갤 수 없는 것'이라는 점의 정의는 기하 증명에 사용됩니다. 예를 들어 두 직선이 한 점에서 만나는 경우, 점이 쪼개진다면 위 문장을 명확히 할 수 없습니다. 또 점이 쪼개지지 않기 때문에 특정한 점의 유일성을 보일 수 있습니다.

여러분은 소민이의 생각에 동의합니까? 예를 들어 소민이의 설명과 "이등변 삼각형의 두 밑각의 크기는 같다."의 증명에서 '두 변의 길이가 같은 삼각형'이라는 이등변 삼각형의 정의가 쓰이는 것을 비교하여 보십시오.

앞서 유클리드의 점, 선의 정의도 증명에 사용된다고 답변한 여섯 명의 학생들은 모두 점의 정의가 이등변 삼각형의 정의와 똑같이 증명에 쓰인다고 하였다. 다음은 이렇게 답변한 학생인 학생 G와의 인터뷰 내용 중 일부이다. 학생 G는 "두 직선은 한 점에서 만난다."라는 명제는 유클리드의 첫 번째 공리로부터도 증명할 수 있지만, '쪼갤 수 없는 것'이라는 정의로부터도 증명가능하다고 하였다.



<그림 9> '점'의 정의는 '이등변 삼각형'의 정의와 똑같이 증명에 쓰인다는 응답(학생 G)

학생 G 역시 명제 "두 점을 지나는 직선은 유일하다."가 유클리드의 첫 번째 공리임을 기억하지 못하였으므로 연구자가 상기시켰다. 그리고 학생 G도 학생 F와 마찬가지로 이 공리로부터 쉽게 "두 직선은 한 점에서 만난다."를 증명하였다. 연구자는 유클리드의 첫 번째 공리로부터 증명할 수 있는데 점의 정의가 증명에서 쓰이는가를 질문하였다.

> 학생 G : 이렇게(공리로부터) 증명할 때는요. 점이 '쪼갤 수 없는 것'은 쓰이잖아요.
> 연구자 : 그렇다면, 이렇게 정의로부터 증명하는 거랑 지금 선생님이랑 해 봤던 것처럼 유클리드의 첫 번째 공리로부터 증명하는 거랑 똑같다고 생각하니?
> 학생 G : 네. 지금 이런 것 설명할 때도 점이 '쪼갤 수 없는 것'라는 가정 하에 이 점이 유일하게 정해진다는 그런 말을 쓰는 것 아니에요?

문항 3에 대한 영재 중학생 F, G의 반응은 영재 학생들에게도 어떤 기하학적 성질을 일상적 정의 혹은 개념 이미지가 아니라 공리로부터 증명할 수 있음을 이해한다는 것, 혹은 개념 이미지로부터의 비형식적 추론과 공리로부터의 증명을 구별하는 것이 결코 쉽지 않다는 것을 보여주고 있다. 그렇다면 이렇게 생각하는 학생들에게 점이나 선의 정의는 증명에 사용되지 않는다는 것을 어떻게 설명할 수 있을까? 이와 관련하여, 우리나라 중학교 수학 2(강신덕 외 5인, 2010: 171)에서는 증명을 어떻게 설명하고 있는지를 살펴보자.

> 이와 같이 실험이나 관찰에 의하지 않고, 가정과 이미 알고 있는 정의 또는 성질들을 근거로 하여 어떤 명제가 참임을 밝히는 것을 증명이라고 한다.
> 또, 증명된 명제 중에서 기본이 되는 것이나 여러 가지 성질의 증명에 활용되는 중요한 것을 정리라고 한다.

우리나라 교과서는 무정의 용어를 도입하지 않으며, 증명을 위와 같이 "가정과 이미 알고 있는 정의 또는 성질들을 근거로 하여 어떤 명제가 참임을 밝히는 것"이라고 설명한다. 그런데 만약 다음 미국교과서 Tagliapietra와 Pilger(2000: 10)에서와 같이, 점 혹은 선이 무정의 용어임을 밝힌다면, '쪼갤 수 없는 것' 과 같은 직관적인 기술은 증명에 사용되는 정의가 아니라는 것을 쉽게 설명할 수 있다.

> 점이라는 용어를 생각하여 보자. 점을 정의할 수 있을까? 대부분의 사람들은 점이 무엇인가에 대한 어떤 생각을 가지고 있을 것이다. 만약 점을 정의한다면, 이 정의에 들어가는 다른 단어들에 대해서도 정의가 필요하므로 이러한 과정은 끝이 나지 않는다. 불필요한 시간과 노력을 절약하기 위하여 수학자들은 몇몇 무정의 용어들을 수학적 체계를 구성하는 기본 단위로 받아들인다. 당연히 가능한 가장 적은 수의 무정의 용어가 바람직하다. … 기하학에는 기술될 수는 있으나 정의될 수는 없는 무정의 용어로 점, 선, 면이 있다. … 이러한 기술은 정의가 아니다. 이러한 기술은 단순히 개념을 시각화하는데 도움이 된다.

그러나 무정의 용어를 도입하지 않은 상태에서 위와 같은 증명에 대한 서술로는 왜 직관적인 점이나 선의 정의는 증명에 사용할 수 없는가를 설명하기 어렵다는 점을 알 수 있다.

Ⅳ. 결론 및 논의

Morgan(2004, 2005)은 학교수학에서 정의를 수학적으로 사용해 볼 수 있는 경험이 부족하다고 지적한다. 학교수학에서 친숙한 어떤 대상을 기술하는 일상적 정의를 주로 다루어왔던 대학생들은 일상적 정의와는 사뭇 다른 수학적 정의에 당황하며, 대학수학의 정의를 '정의'로 받아들이는데 어려움을 겪는다. 예를 들어 수학자 McClure(2000)는 자신의 교수경험을 통하여, 대학수학에서 형식적 정의의 인식론적 장애가 대학생들의 '정의' 개념이 수학자인 교수의 정의 개념과 다르다는 점에 기인할 수 있음을 발견하였다. 그는 수학에서는 정의라는 용어를 증명이라는 맥락에서 전문적이며 특수한 의미로 사용한다는 점을 고려할 때, 대학생들의 수학적 정의에 대

한 부족한 이해는 당연한 결과라고 하였다. 이렇게 고등 수학적 사고로의 이행과정에서 학생들이 정의와 관련하여 겪는 인식론적 장애는, 정의에 담긴 구체적인 수학 내용 외에도 학생들이 '정의' 자체를 무엇이라고 생각하고 있는가도 매우 중요하다는 점을 시사한다.

우리나라 교과서에서 정의라는 용어는 바로 중학교 2학년 논증기하 부분에서 등장한다. 특히 증명이 도입되는 논증기하를 기점으로 대상을 기술하는 일상적 정의가 아닌 수학적 정의의 기능을 요구하게 된다. 이런 맥락에서 앞에서 간단히 살펴보았듯이, 미국 교과서 Jacobs(2003), Schultz외 3인(2003)에서는 증명을 도입하면서 수학적 정의의 특징을 자세히 다루고 있음을 주목할 필요가 있다. 즉 수학에서 정의되는 용어 'a'와 그 정의 'b'는 정확히 필요충분조건이므로, 정의문장 "a이면 b이다."은 그 역명제 "b이면 a이다."도 항상 참임을 설명한다(Jacobs, 2003: 46-47).

그러나 우리나라 중학교 수학 2에서는 증명과 같이 등장하는 정의에 대하여, '용어의 뜻을 명확하게 정한 것'이라는 일상적 정의만을 기술하는 데 그치고 있다. 또 무정의 용어를 도입하지 않기 때문에 기하학의 대표적인 무정의 용어인 점, 선, 면에 대하여 직관적인 기술만을 제시한다. 본 연구에서는 중학교 논증기하를 학습한 영재 중학생들을 대상으로 기하학에서 점과 선의 정의를 무엇이라고 생각하며, 또 이와 관련하여 증명에서 정의가 사용된다는 것을 어떻게 이해하고 있는지를 조사하였다. 조사에 참여한 대부분의 영재 중학생들은 점과 선에 대한 직관적인 기술을 그것의 정의라고 받아들였으며, 사전에서의 일상적 정의와 수학적 정의의 차이를 막연한 느낌 외에는 명확하게 설명하지 못하였다. 또 일부 영재 학생들은 "유클리드의 점과 선의 정의를 증명에서 사용할 수 있는가?"라는 설문에 대해 놀랍게도 직관적인 기술에 불과한 유클리드의 정의를 증명에서 사용할 수 있다고 생각하고 있었다. 영재학생들의 이러한 반응은 결국 뛰어난 학생들에게도 개념 이미지로부터의 비형식적 추론과 진짜 증명을 구분하는 것이 결코 쉽지 않음을 보여주고 있다.

일상적 정의로부터 수학적 정의로의 이행을 다룬 여러 연구들(Raman, 2004; Morgan, 2004; 2005; Edward, Ward, 2004; Tall; 1992b)은 학교수학에서도 이러한 이행을 예비할 수 있는 경험을 제공하는 것이 필요하다고 지적하고 있다. 본 연구의 점과 선의 정의를 소재로 영재 중학생들을 대상으로 실시한 인식 조사 결과에서 다음과 같은 두 가지 시사점을 찾을 수 있었다. 첫째, 사전에서의 일상적 정의 개념을 가진 학생들에게 논증기하에서의 수학적 정의의 개념으로의 이행은 쉽지 않다. 따라서 수학적 정의 개념은 학생들이 스스로 깨달을 수 있으리라고 기대하기 어려우며, 학생들이 암묵적으로 그것을 깨닫도록 하는 것보다는 앞에서 예시한 미국교과서들의 사례와 같이 논증기하의 도입부에서 수학적 정의의 특징을 보다 적극적으로 설명할 필요가 있다. 둘째, 기하학에서의 점, 선의 정의에 대하여 대부분의 영재 중학생들도 점과 선에 대한 일상적인 기술을 그것의 정의라고 생각하고 있었다. 따라서 중학교 논증기하에서 점, 선, 면을 무정의 용어로 도입하는 것은, 수학적 정의와 대상에 대한 직관적인 기술 혹은 일상적 정의와의 차이를 명확하게 다룰 수 있는 계기가 될 수 있다고 생각된다.

학교수학에서 정의 개념에 대한 보다 심도 있는 교수학적 이해를 위해서는, 학교수학의 다양한 주제 및 다양한 연구 참여자 집단을 대상으로 한 연구들이 후속되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

강신덕 외 5인 (2010). 중학교 수학 2. 서울 : 교학사.

박영훈 외 5인 (2009). 중학교 수학 1. 서울 : 천재문화.

민중서림 편집국 (2001). 국어사전. 서울: 민중서림.

이준열 외 5인 (2010). 중학교 수학 2. 서울: 천재문화.

이지현 (2011). 학교수학에서 대학수학으로 공리적 방법의 이행에 관한 연구. 서울대학교 박사논문.

조영미 (2000). 직관기하의 정의 사용 양태 분석과 증명 지도에 대한 시사점. 수학교육학연구, 10(2), 215-227.

조영미 (2001). 학교수학에 제시된 정의에 관한 연구. 서울대학교 박사논문.

Alcock L., & Simpson A. (2002). Definitions: Dealing with categories mathematically. *For the Learning of Mathematics,* 22(2), 28-34.

Edwards, B. S., & Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis)use of mathematical definitions. *The American Mathematical Monthly,* 111, 411-424.

Gray, E. M., Pitta, D., Pinto, M., & Tall, D. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary & advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 38, 111-133.

Harel, G., & Tall, D. (1991). The General, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics,* 11(1), 38-42.

Harel, G., Selden, A., & Selden, J. (2006). Advanced mathematical thinking: Some PME perspectives. In A. Gutierrez, P. Boero. (Eds), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future.* Sense Publishers.

Jacobs, H. R. (2003). *Geometry seeing, doing, understanding*(3rd ed.). New York : W. H. Freeman and Company.

McClure, J. E. (2000). Start where they are: Geometry as an introduction to proof. *American Mathematical Monthly,* 107(1), 44-52.

Morgan, C. (2004). Word, definitions and concepts in discourses of mathematics. *Teaching and Learning,* 19(2). 103-117.

Morgan, C. (2005). What is a definition for in school mathematics?. *European Research in Mathematics Education IV.*

Raman, M. (2004). Epistemological messages conveyed by three high-school and college mathematics textbooks. *Journal of Mathematical Behavior,* 23, 389-404.

Robinson, R. (1954). *Definition.* Oxford University Press.

Schultz, J. E., Hollowell, K. A., Ellis, W., & Kennedy, P. A. (2003). *Geometry.* Austin, Texas: Holt, Rinehart, and Winston.

Tagliapietra, R., & Pilger, K. D. (2000). *Geometry for christian school*(2nd ed.). Bob Jones University Press.

Tall, D. (1992a). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. In D. A. Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*(pp. 495-511). New York : Macmillan.

Tall, D. (1992b). Construction of objects through definition and proof, *PME Working Group on AMT,* Durham, NH.

______ (1997). From school to university: The transition from elementary to advanced mathematical thinking. In M. O. J. Thomas(Ed.), *Proceedings of The Seventh Annual Australasian Bridging Network Mathematics Conference*(pp.9-26). University of Auckland.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall(Ed.), *Advanced mathematical thinking*(pp. 65-81). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

The Transition from Everyday Definitions to Mathematical Definitions
- Gifted Middle School Students' Conceptions of Point and Line definitions -

Lee, Ji Hyun
Seoul Electronic High School, Bangbae-dong, Seocho-gu, Seoul, Korea.
E-mail : leeji_hyun@naver.com

This paper analysed gifted middle students' conception of the definitions of point and line and the uses of definitions in proving. The findings of this paper suggest that the concept of mathematical definitions is very unnatural to students, therefore teachers and textbooks need to explain explicitly the characteristics of mathematical definitions which are different from dictionary definitions using common sense. Also introducing undefined terms in middle school geometry would give students a critical chance to deal with the transition from dictionary definitions to mathematical definitions.

* ZDM Classification : E43
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70
* Key Words : definition, deductive geometry, proof, undefined terms