

## 초등 교사의 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식 분석

이 명 희 (서울봉은초등학교)

황 우 형 (고려대학교)

연구의 목적은 자연수 개념에 대한 초등 교사들의 교수학적 내용지식을 분석하는 것이다. Shulman(1986b)은 교사의 지식을 이해하기 위한 도구를 개발하면서, 가르치는데 필요한 내용지식을 교과내용지식, 교육과정지식, 교수학적 내용지식의 세 가지로 구분하였고, 방정숙(2002)은 교사의 교수 방법에 포함되는 요소를 개인 요소와 사회·문화 요소로 구분하였다. 연구 문제는 (1) 초등 교사들은 자연수 개념에 대하여 어떤 교수학적 내용지식을 가지고 있는가, (2) 초등 교사들이 가지고 있는 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식에는 어떤 요소들이 포함되어 있는가의 두 가지이다. 연구 결과 (1) 초등 교사들은 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식의 세 가지 유형을 적절히 갖추고 있고, (2) 초등 교사들이 가지고 있는 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식에는 사회문화적 요소 보다는 개인 요소가 더 많이 포함되어 있다. 연구의 제한점으로는 (1) 보통의 현장 교사와 수학교육을 전공한 교사간의 비교 연구와 (2) 자연수 개념에 대한 교실 활동에 대한 연구가 수행되기를 바란다.

### I. 서론

#### 1. 연구의 필요성 및 목적

수학을 성공적으로 가르치기 위해서는 학생들의 현재 지식 상태와 앞으로 필요한 지식 상태를 먼저 이해하고 다음으로 학생들이 더욱 적절히 학습하도록 도와야 한다. 학생들은 교사가 제공하는 경험을 통해 수학을 학습하고 이해하게 되며, 문제 해결을 위해 수학을 사용하게 된다. 학생들의 수학에 대한 자신감이나 성향은 학교에서 경험하게 되는 수업에 의해 형성된다(NCTM, 2000).

특정 내용을 가르치기 위해 가장 필요한 것은 그 내용이 무엇인지에 대하여 숙지하고 있는 것이다. 교사의 교과 내용에 대한 이해는 최소한 같은 영역 전공의 전공자의 이해와 비슷한 수준이어야 할 것이다. 수학 교과에서도 마찬가지이다. 수학 교사는 가르치고자 하는 수학 내용에 대하여, 그 내용의 전공자가 내용에 대하여 갖고 있는 정도의 이해를 하고 있어야 한다.

더 나아가 어떤 근거에 의해서 그러한 지식이 나온 것인지, 왜 그러한지도 이해해야 한다. 그러나 다른 한편으로는 내용 영역의 전공자와는 달리, 어떤 주제는 가르치고자 하는 교과에 핵심이 되고, 어떤 주제는 그다지 중요하지 않은지 그리고 그에 대한 이유도 이해하고 있어야 할 것이다. 결국 교사는 교과 내용에 대하여 같은 영역 전공자의 이해와 같은 수준의 이해 또는 한 단계 더 나아간 이해를 하고 있어야 한다.

교사의 지식은 효과적인 수업을 위해 필수적인 요소이며(Ball, Lubienski, & Mewborn, 2001), 수업 외적인 요인과는 다르게 교수·학습에 직접적인 영향을 끼친다(Ma, 1999). 교사가 가진 지식의 문제를 탐구하는 이론의 하나인 Pedagogical Content Knowledge(이후, PCK)는 Shulman(1986b, 1987)이 처음으로 사용한 것으로 알려져 있다. 그 후로 Cochran et al(1991)은 PCK를 학생에게 특수하고 교사에게 독특한 특정 교과 개념의 교수에 관한

\* 접수일(2011년 10월 16일), 심사(수정)일(1차: 2011년 11월 16일, 2차: 11월 23), 게재확정일(2011년 11월 25일)

\* ZDM분류 : F32

\* MSC2000분류 : 97C90

\* 주제어 : 자연수 개념, 교수학적 내용지식, 초등 교사

지식이라 하였고, Van Driel et al(1998)은 학습을 촉진시킬 상황에서의 교과 지식에 대한 교사의 해석과 변형으로, Hammerman(2006)은 알고 생각하고 아는 방법과 관련된 일련의 교수 전략으로 이야기하며 연구하고 있다.

PCK에 대하여 국내에서는 ‘교수 내용 지식’(김만희, 2003; 민윤, 2003), ‘교수학적 지식’(서관석·전경순, 2000), ‘교수적 내용 지식’(김용대, 2001; 박경민, 2001), ‘교수법적 내용 지식’(방정숙, 2002), ‘교수학적 지식’(조성민, 2006) 등으로 번역되어 연구되고 있다. 본 연구에서는 교사가 자연수 개념에 대하여 교수를 목적으로 그 내용 지식을 변환하여 사용한다는 입장에서 PCK를 ‘교수학적 내용지식’이라고 하겠다.

교사가 갖추어야 하는 지식은 복합적이고 기능적인 지식이기 때문에 한 마디로 말하기는 어렵지만 이에 대해 Shulman(1986b)은 세 가지 지식 즉, 교과내용지식(Subject Matter Knowledge), 교육과정 지식(Curricular Knowledge), 교수학적 내용지식(Pedagogical Content Knowledge)으로 구별함으로써 교사 지식의 이해에 대한 틀을 마련하였다.

교사는 교과 내용에 대하여 같은 영역 전공자의 이해와 같은 수준의 또는 한 단계 더 나아간 이해를 하고 있어야 한다. 여기서의 더 나아간 이해에 해당하는 것이 교육과정지식, 교수학적 내용지식일 것이다. 가르치고자 하는 내용이 해당 교육과정의 어느 위치에 있어서 같은 영역 및 다른 영역의 교육과정 내용들과 어떤 관계를 맺고 있는지를 파악하고 있어야 한다. 또한 내용지식 자체에 대한 이해만이 아니라 그것을 가르칠 때는 어떠한 형태로 가르쳐야 학생들의 이해가 용이해 지는지에 대해서도 알고 있어야 한다.

특히나 본 연구는 자연수 개념에 대한 교사의 교수학적 내용지식에 대한 연구이다. 교사의 교과 지식과 교수학적 내용지식에 대한 연구는 1980년대 이래로 많이 이루어져 왔지만(Ball, 1988a, 1988b, 1991; Even, 1990; Kennedy, 1990; Leinhardt&Smith, 1985; Shulman, 1986; Tamir, 1987; Wilson et al., 1987; 민윤, 2003; 김용대, 2001; 박경민, 2001; 방정숙, 2002), 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식의 연구는 거의 없다. 이에 본 연구는 자연수 개념에 대한 교사의 교수학적 내용지식에 대하여 알아보는 연구를 하고자 한다.

## 2. 연구 문제

수학을 성공적으로 가르치기 위해서는 학생들의 현재 지식 상태와 앞으로 필요한 지식 상태를 먼저 이해한 다음 학생들이 더욱 적절히 학습하도록 도와야 한다. 학생들은 교사가 제공하는 경험을 통해 수학을 학습하게 된다. 교사가 갖추게 되는 수학에 대한 학생들의 이해, 문제해결을 위해 수학을 사용하는 능력, 그리고 수학에 대한 자신감이나 성향은 학교에서 경험하게 되는 수업에 의해 형성된다(NCTM, 2000).

본 연구는 초등학교 교사의 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식을 알아보는데 주 목적이 있다. 교수학적 내용지식을 언급함에 있어 교과내용지식과 교육과정지식에 대한 연구가 함께 이루어져야 한다. 연구 문제는 다음과 같다.

1. 자연수 개념을 가르치는 교사가 갖추어야 할 지식으로는 어떤 것이 있는가.
  - 1-1. 자연수 개념에 대한 교사의 교과내용지식
  - 1-2. 자연수 개념에 대한 교사의 교육과정지식
  - 1-3. 자연수 개념에 대한 교사의 교수학적 내용지식
2. 초등 교사들이 가지고 있는 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식에는 어떤 요소들이 포함되어 있다.
  - 2-1. 교사 개인의 특성과 관련된 요소
  - 2-2. 교사가 속한 사회·문화적 특성과 관련된 요소

본 연구는 자연수 개념에 대한 교사의 교수학적 내용지식을 알아보는 것이 주 목적이므로 초등학교 교사 6명을 대상으로 면담하여 그들이 갖고 있는 자연수 개념에 대한 자료를 수집하였다. 수집한 면담 자료를 바탕으로 연구문제 1에서는 Shulman(1986b)이 언급한 교사가 갖추어야 할 지식의 세 요소를 자연수 개념에 천착하여 자연수 개념의 교과내용지식, 자연수 개념의 교육과정지식, 자연수 개념의 교수학적 내용지식에 대하여 분석한다.

연구문제 2에서는 연구문제 1의 분석에 대하여 자연수 개념을 주로 가르치는 초등학교 교사가 갖고 있는 자연수 개념의 교수학적 내용지식에 포함된 요소로는 어떠한 것이 있는지 살펴본다. 특히 교사 개인의 특성과 관련된 요소와 교사가 속한 사회 문화적 특성과 관련된 요소로 구분지어 분석한다.

## II. 이론적 배경

본 연구의 목적은 초등학교 교사의 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식을 알아보는 것이다. 이를 위한 연구 문제로 초등 교사들은 자연수 개념에 대하여 어떠한 교수학적 내용지식을 가지고 있는지를 알아보고, 그들이 갖고 있는 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식에는 어떠한 요소들이 포함되어 있는지 알아본다.

II절의 이론적 배경에서는 첫째로 교수학적 내용지식이 무엇인지 살펴본다. 둘째로는 교사의 교수학적 내용지식에 포함되는 요소에 대한 이론적 연구를 진행하고, 마지막으로 자연수 개념의 교과내용지식, 교육과정지식, 교수학적 내용지식에 대한 연구를 한다.

### 1. 교수학적 내용지식

본 절에서는 연구의 핵심이 되는 교수학적 내용지식에 대하여 살펴본다. Shulman(1986b)<sup>1)</sup>은 교사에 대한 평가에서 교과와 내용에 대한 항목은 거의 없어지고, 개인차 인식, 문화적 자각, 젊은이에 대한 이해, 학급 경영 등에 대한 항목만을 평가하고 있다고 하면서, 교사에 대한 평가에서 교과와 내용에 대한 사항을 중요시 다뤄야 한다고 한다.

가르치는 수업의 *내용content*, 질문, 설명에 대한 것은 놓치고 있었다. 평가 문제의 핵심은 교사의 발전과 교사 개발에 두어야 한다. 교사의 설명은 어디에서 기원한 것인가? 교사는 무엇을 가르칠지에 대하여 어떻게 결정하고, 그것을 어떻게 나타내며, 그것에 대하여 학생들에게 어떻게 질문하고, 바르게 이해하지 못한 문제는 어떻게 다루는가? 최근 학습의 인지 심리학에서는 위와 같은 질문은 다루고 있기는 하나, 학습자의 관점에서만 다룬 뿐이다. 교수에 대한 연구는 교사의 관점에서만 생각하고 위와 같은 주제는 무시해 왔다. …… 교사 지식의 근원은 무엇인가? 교사가 알고 있는 것은 무엇이고, 언제 그것을 알게 되었는가? 새로운 지식은 어떻게 획득되고, 오래된 지식은 어떻게 퇴보하며, 이 둘은 어떻게 새로운 지식으로 결합되는가?(Ibid, p. 8)

이러한 의문에서 시작하여 Shulman은 “교수에서의 지식의 성장(knowledge growth in teaching)”이라는 주제

1) Shulman(1986b)이 쓴 논문 Those who understand: Knowledge growth in teaching은 국내외의 많은 교과교육학 관련 논문에 인용되고 있다. 이 논문은 “He who can, does. He who cannot, teaches.”(할 수 있는 사람은, 한다. 할 수 없는 사람은 가르친다)라는 격언으로 시작한다. Shulman은 이 격언을 분석하면서 교수학적 내용지식에 대한 자신의 의견을 전개한다. 이 격언은 George Bernard Shaw가 그의 희곡 Man and Superman의 부록인 “혁명가들을 위한 격언”에서 한 말이다. 처음 생각하기에 이 격언은 가르치는 사람, 즉 교사를 매우 비하하는 발언으로 생각된다. 할 수는 없어도 가르칠 수는 있다는 말로 들리기 때문이다. Shulman은 자신의 글을 마무리하면서 다음과 같이 반박한다. Shaw의 말은 중상모략이라 할 수 있으며, 교사는 해당 교과에 대한 교수학적 전문가로서 같은 전공을 갖고 있는 자가 갖고 있는 내용지식 그 이상을 갖추고 있어야 한다고 주장한다. 그리고 다음과 같이 결론을 내린다. Those who can, do. Those who understand, teach. 즉 해당 교과에 대하여 진정으로 이해한 자만이 가르칠 수 있다.

의 연구를 하고, 교사가 갖추어야 할 내용지식으로는 교과내용지식, 교육과정지식, 교수학적 내용지식의 세 가지가 있다는 결론에 이르게 된다.

그 다음 해인 1987년, Shulman은 지난해의 연구에 이어, 가르치는데 필요한 지식의 기반(knowledge base)은 무엇인가에 대한 연구를 한다. 즉 수업을 하는 교사는 무엇을 알고 있어야 하고 그것을 어떻게 알아내는가에 관한 것이다. 교수의 시작도 바로 여기라고 한다. 그는 지식 기반을 일곱 가지<sup>2)</sup>로 범주화 하였는데, 그 중 하나가 교수학적 내용지식이다. 교수학적 내용지식은 내용과 교수법의 혼합으로, 교수를 위해서는 특정 문제 및 주제를 어떻게 채택하여, 조직하고, 나타내어 학습자의 다양한 관심과 능력을 끌어낼 것인가에 대한 것이다.

Carpenter등(1988)은 교수학적 내용지식은 개념적 지식과 절차적 지식이 모두 포함되는 지식이라고 한다. 그들에 의하면 교수학적 내용지식은 학생들의 이해 수준을 평가하고, 학생들의 오개념을 진단하는 전략에 대한 지식, 학생들이 새로 학습한 지식과 예전에 학습한 지식을 빠르게 연결시킬 수 있도록 하는 교수 전략에 관한 지식, 학생들의 오개념을 교정하기 위한 전략에 대한 지식, 교수 내용을 쉽게 이해시키기 위해 그 내용을 표현하고 명료한 형태로 조직하는 방법들에 대한 지식이다. 또한 학생들이 수학을 어떻게 이해하고 어떤 오개념을 가지고 있는가에 대한 교사의 이해와 수학적 지식을 학습하는 학생들의 사고과정과 관련된 교사의 이해 등 교수방법을 결정하는데 필요한 지식도 교수학적 내용지식에 포함시킬 수 있다(p. 386).

Marks(1990)는 기존의 교수학적 내용지식에 관련된 연구들에서는 교수학적 내용지식의 개념을 아날로그적인 도구로만 사용하고, 연구 결과에 대한 비판이나 개념의 재해석이 이루어지지 않고 있다고 비판한다. 그리고 초등 5학년 교사 8명의 분수 동치에 관한 수업에 대하여 면담을 하고, 면담 결과의 분석을 통해 교수학적 내용지식의 개념은 네 가지 요소로 구성된다고 한다. 교수 목표 달성을 위한 교과 내용, 교과 내용에 대한 학생들의 이해, 수업 매체, 수업 과정이 그것이다. 교수학적 내용지식은 교사가 연구해야 하는 핵심이기에 그 개념을 중요하게 다뤄야 하고, 나아가 교사 교육자들로 하여금 교사는 무엇을 가르쳐야 하고, 그것을 가르치기 위해 교사는 그것을 어떻게 학습해야 하는가를 연구해야 한다고 한다. 이에 Marks(1991)는 교수학적 내용지식에 대한 사항이 교사교육에서 중요시되어야 한다고 강조한다.

교수학적 내용지식은 내용에 대한 해석이라고 볼 수 있다. 즉 일반 교수법 지식을 특정 내용을 가르치는데 적용하는 과정에서 성장한 것이라 볼 수 있다. 일반 교수법 지식의 특수화된 형태로 간주해도 좋을 것이다. 즉 교수학적 내용지식은 일반 교수법 지식과 교과 지식의 총합체로 볼 수 있다(Marks, 1990; Marks, 1991).

요약하자면, 교수학적 내용지식은 내용지식을 가르치고자 할 때 새롭게 형성되는 지식이라고 볼 수 있다. 특정 내용을 가르치고자 할 때는 그 내용의 정의 및 성질을 그대로 학생들에게 전달할 수는 없다. 학생들의 수준에 맞게 변환하여 그들이 쉽게 이해할 수 있도록 제시해야 한다. 따라서 교수를 하려면 교사는 가르치려는 내용의 지식에 대하여 먼저 이해하고 있어야 하고, 그 내용이 해당 교과의 어느 학년 단계에 위치해 있는지에 관한 교육과정지식을 파악하고 있는 상태에서 그 내용을 가르치기에 적당한 형태로 변환시킨 교수학적 내용지식을 갖추고 있어야 한다.

## 2. 교사의 교수학적 내용지식에 포함된 요소

교사가 갖추어야 할 지식에는 교과내용지식, 교육과정지식, 교수학적 내용지식이 있다. 본 연구는 자연수 개념에 대한 교사의 교수학적 내용지식을 알아보는데 주 목적이 있다. 따라서 교과내용지식과 교육과정지식도 함께 살펴보아야 한다. 본 연구의 면담은 현장 교사에게 자연수 개념을 지도하는 방식을 묻는 형식으로 진행된다.

2) 내용지식, 일반 교수학 지식, 교육과정지식, 교수학적 내용지식, 학습자에 대한 지식, 교육맥락에 대한 지식, 교육 목표·목적·가치·절차적 배경·역사적 배경에 대한 지식의 일곱 가지가 그것이다.

따라서 교사의 교수학적 내용지식에 포함되는 요소를 알아보는 것은 교수 방법에 포함되는 요소를 알아보는 것과 유사할 것이다.

방정숙(2002)에 의하면, 수학 교사의 교수 방법에 포함되는 요소는 그 초점이 어디에 맞춰지느냐에 따라 크게 두 가지로 나누어 생각해 볼 수 있다. 하나는 교사 개인이 갖고 있는 특성과 관련된 요소이고, 다른 하나는 그 교사가 속한 사회문화적 특성과 관련된 요소이다. 교사 개인 요소에는 교사 자신의 수학 학습 경험 및 교수 경험(learning and teaching experience), 지식, 신념, 개별인성 특징(personality traits) 등을 들 수 있고, 사회문화적 요소로는 문화적·교육적 규준(cultural-educational norms), 교육과정 개발 및 운영, 교사교육, 전문적 모델과 교사공동체(professional models and community) 등이 포함될 수 있다.

교사 개인 요소 중 수학 학습 경험 및 교수 경험에는 교사가 학생으로서 경험했던 수학 학습, 수학에 관한 흥미, 개인적으로 의미가 있다고 생각되는 교수 모델, 이전의 교수 경험 등을 들 수 있고, 지식에 대한 것으로는 교사 개인의 수학 지식, 수학교육 지식, 교육과 관련된 일반 지식 등을 들 수 있다(방정숙, 2002).

신념으로는 교사 개인이 갖는 수학에 관한 신념, 수학의 교수·학습에 관한 신념을 들 수 있다(방정숙, 2002). 지식은 일정한 준거에 맞아야 하며 지식의 주장들을 받아들이거나 거부하는데도 공적으로 인식된 규준이 있다. 반면 신념은 지지와 준거를 필요로 하지 않는다. 신념은 경험으로부터 구성된 개인의 규칙들이다. 이러한 규칙은 종종 무의식적으로 새로운 경험과 정보를 해석하며, 행동을 지도하는데 사용된다(Pajares, 1992). McLeod(1992)는 수학교육에서 신념 연구를 네 가지로 범주화 하였는데 수학에 대한 신념, 자신에 대한 신념, 수학교수에 대한 신념, 사회적 상황에 대한 신념이 그것이다. 각각에 대한 예를 들자면 '수학은 규칙에 기초를 두고 있다, 나는 문제를 풀 수 있다, 가르치는 것은 말하는 것이다, 학습은 경쟁이다'와 같다. 마지막으로 개별인성 특징으로는 교사 개인이 갖는 자율성, 도전정신, 학생들의 경험과 이해에 관한 민감성, 전문성을 들 수 있다(방정숙, 2002).

방정숙(2002)에 의하면, 사회문화적 요소 중 문화적·교육적 규준에 대한 것으로는 그 사회 및 문화에서 대표 또는 모범이 되는 교수 방법에 대한 통념, 가르친 결과에 대한 교육적 기대, 해당 사회에서 인지되는 교육적 가치 등이 해당된다. 교육과정 개발 및 운영에 대한 것으로는 그 사회 및 문화에서 행해지는 교육과정 개발의 구조 양상, 교육과정 개발에서 교사의 참여 정도, 교육과정 운영을 위한 행정적 지시 및 교사의 순응 정도를 들 수 있다.

교사 교육에 대한 것으로는 그 사회 및 문화에서 행해지는 예비 교사를 위한 교사교육 프로그램이나 현장 교사를 대상으로 하는 연수를 들 수 있고, 전문적 모델과 교사 공동체 요소로는 그 사회나 문화에서 통용되는 이용 가능한 대안적인 교수 모델 및 교사 공동체에 관한 친밀도와 동일화를 들 수 있다(방정숙, 2002).

### 3. 자연수 개념의 교수학적 내용지식

교사가 갖추어야 할 지식은 Shulman(1986b)의 구분에 따르면 교과내용지식, 교육과정지식, 교수학적 내용지식으로 구분할 수 있다. 본 연구는 초등학교 교사의 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식에 대하여 알아보는 것이 주 목적이므로 먼저 자연수 개념의 교과내용지식에 대하여 연구한다.

#### 가. 자연수 개념의 교과내용지식

자연수 개념의 교과내용지식은 자연수 개념에 대한 내용이 어떠한 것이 있는지를 아는 것이다. 자연수 개념에 대한 논의는 매우 다양하다. 자연수 개념에 대한 교과내용지식은 그것에 대한 역사적, 수리철학적, 그리고 수학교육적 논의를 알아보는 것으로 같음하여도 무방할 것이다. 따라서 자연수 개념에 대한 세 측면의 논의를 살펴보고자 하겠다.

## (1) 자연수 개념의 역사적 고찰

역사적으로 자연수 개념에 대한 논의는 Pythagoras 시대(B.C. 500년경) 이후나 B.C.2500년 경의 바빌로니아 수학의 출현 이후에 혹은 그보다 더 일찍부터 “수는 무엇인가?”라고 자문해 왔다(Brainerd, 1979). 수를 있는 그대로의 모든 것이라고 정의내린 Pythagoras, 수의 성질은 매우 추상적이라고 한 Plato(Heath, 1956), 수의 개념은 감각적인 대상으로부터 추상화를 통해 얻어진다는 Aristotle의 입장(Moreno-Armella & Waldegg, 2000), 그리고 Euclid는 존재하는 사물의 각각을 하나라 부를 수 있는 단위와 단위가 몇 개 결합된 크기로서의 수를 바라 보았다(Klein, 1980; Clason, 1968). 중세기 Newton은 수를 어떤 양에 대하여 같은 종류의 다른 어떤 양으로 추상화된 비라고 정의하였고, Kant는 선천적인 형식으로 주어진 직관, 즉 정신 능력의 산물로 보았다(Newton, 1769; Clason, 1968에서 재인용; Brooks, 1904; 임정대, 1996에서 재인용).

## (2) 자연수 개념의 수리철학적 고찰

수리철학적으로 자연수 개념에 대한 논의는 고대 그리스 시대부터 19세기 초반까지 이어져 온 플라톤 주의와 19세기 말부터 20세기 초반까지의 현대수리철학으로 나누어 살펴볼 수 있을 것이다. 후자는 논리주의적 사조에서 직관주의, 그리고 형식주의로 흘러왔다.

수학적인 입장에서 수에 관한 가장 창의적이고 성공적인 최초의 이론은 1887년에 발표된 Dedekind의 수에 관한 연구업적이다. 그는 자연수의 개념을 ‘집합’과 ‘대응’이라는 두 원시 개념으로부터 논리적으로 완벽하게 구성할 수 있음을 보여주었다(Clason, 1968). 그 후 1891년, 그의 이론을 바탕으로 자연수가 갖는 측정의 의미를 찾아내어 공리로 제시한 것이 Peano의 이론이다. Peano에 의하면 “수는 원초적 명제에서 선언된 모든 속성을 가진 체계이며 이것만을 가진 체계이다.”(Russell, 1903, p. 125; Brainerd, 1979에서 재인용).

현대수리철학에서의 자연수 개념은 논리주의, 직관주의, 형식주의의 흐름에 따라 살펴보면 될 것이다. 논리주의 수리철학을 대표하는 Frege는 자연수에 대하여 같은 성질을 갖는 집합(임정대, 1996)이라는 입장을 취하였다. 그리고 Russell은 ‘수’란 각 수마다 갖는 성질의 어떤 공통된 특질을 의미한다(임정대, 1996)는 입장이다. 직관주의를 주장하는 Brouwer에 따르면 자연수 전체는 차례차례로 만들어지는 과정으로 파악되는 것이며 결코 완성된 어떤 무엇도 아니라고 보았다. 즉 자연수란 그 전체가 생성되어지는 것이지 존재하는 것이 아니라는 입장(임정대, 1996)이다.

수리 철학으로서의 형식주의는 수학이 아무런 의미가 없는 기호에 의해 형식화된 체계에 불과하다고 보는 입장이다. 그 중심에 있는 학자인 Hilbert는 수학을 의미없는 기호에 의해 형식화된 체계로 파악하였다. 형식주의 입장에서는 수학의 체계를 형식화하면 불필요한 다의적인 해석을 모두 극복할 수 있다고 본다(임정대, 1996).

## (3) 자연수 개념의 교수학적 관점에서의 고찰

자연수 개념을 교수학적 관점에서 고찰하려면 자연수 개념의 원리, 교수를 하는 교사의 입장, 교수를 받는 학생의 입장 등의 여러 각도에서 바라보게 된다. 교수학적 관점에서 자연수 개념에 대한 연구로는 수를 계열, 집합, 비, 관계의 네 가지 의미로 본 Thorndike(1922), 심리학적 수 발달 이론과 그것을 지지하는 Piaget(1969), 수를 측정 활동의 산물로 보는 Dewey(1972), 수개념은 단일하거나 불변하는 것이 아니라 변화하는 것이라는 입장의 Confrey(1980), 수개념의 다양한 측면에 대한 교수현상학적 분석을 한 Freudenthal(1973, 1983) 등을 들 수 있다.

Thorndike는 자연수가 갖는 의미 자체를 부정하지는 않았다. 실제로 그는 자연수의 의미를 계열, 집합, 비, 관계의 네 가지 의미로 설명하였다. 이 네 가지 의미는 초등학교에서 특히 중요하다. 사(4, 넷)은 수 계열에서 3(삼, 셋)과 5(오, 다섯) 사이에 있다. 이것은 이산수로 특정 크기의 집합의 이름이기도 하며, 양에 대한 지칭이기도 하다. 또한 1 더하기 3의 결과이기도 하고, 10에서 6을 뺀 수, 또는 2 곱하기 2, 8의 반이기도 하다. 수의 의미를 안다는 것은 이러한 제반 사항들에 대해서 어느 정도 안다는 것을 의미한다(Thorndike, 1922, p. 6). 즉 4명

일 때 4는 집합수로서 이산량이고, 4kg일 때 4는 측정수로서 연속량의 의미(이명희·황우형, 2010)로 파악하는 것이다.

Piaget(1969)는 수개념의 근거를 수 세기나 이미지에 두지 않고 행동 및 조작과 관련된 심적 구성에 둔다. 그는 자연수를 기수와 순서수로 구분하는 것은 자연수를 단일 개념으로 정의하고 있지 못한 것이며, 수를 개별적으로 정의하는 결과가 되어 1로부터 차례로 생성되는 자연수열의 기본적인 특성을 소홀히 다루게 된다고 비판한다. 이에 집합과 순서 관계의 구성이 수의 구성에 선행한다고 보고 있지 않고, 자연수는 집합과 순서 관계의 종합이라 가정한다. 따라서 집합, 순서 관계, 1대 1 대응을 서로 관련시키면서 그 조정을 증진시키는 지도 방법을 지지한다.

Dewey에 의하면 수란 객관적인 지식이 아니며 동시에 측정을 인간 활동의 소산으로 간주한다(Dewey&McLellan, 1895). 측정 활동을 통해서 수의 발생의 과정을 아동에게 경험시키는 형태로 수 교육을 시도하고 있어, 구성주의 수학 교육론의 구체적인 모습을 제시하고 있다. Dewey에게 수는 구체물의 성질이 아니라 측정 활동의 결과이므로 수개념을 지도할 때는 구체물을 다루는 활동을 중시한다(Brainerd, 1979).

Confrey(1980)는 하나의 개념은 단 한 가지의 변하지 않는 영원한 것이 아니라 변하는 개념이며, 또 변함으로써 몇몇 현상을 잘 설명할 수 있게 된다고 수개념을 정의한다. 수개념은 변하지 않는 것도 아니고 절대적인 것도 아니다. 여러 가지 서로 다른 수개념은 서로 다른 문제들을 해결할 수 있으며 서로 다른 딜레마를 나타내기도 한다. 그는 수개념을 집합 또는 류(class)로서의 수개념, 순서수로서의 수개념, 비로서의 수개념, 무한소수로서의 수개념, 점-수 대응으로서의 수개념, 조작적 수개념의 여섯 가지로 설명한다. 집합 또는 류로서의 수개념은 집합수적인 측면이며, 순서수로서의 수개념은 그 용어 그대로 순서수적 속성을 갖는 수개념이다. 비로서의 수개념은 유리수적 측면까지를 포함하는데, 산술과 기하를 서로 연관지어서 알아보는 가운데 생겨난 것으로 길이나 넓이, 부피와 같은 크기들 간의 관계에서 발생하는 수를 의미한다. 무한소수로서의 수개념은 실수까지 포함되는 수개념이기는 하나 실수 전체를 포함하지는 못한다. 점-수 대응으로서의 수개념에서 드디어 수와 수직선의 일대일 대응이 가능하게 된다. 마지막으로 조작적 수개념은 산술 법칙을 근거로 한 대수적인 수개념이다. 따라서 Confrey가 생각한 수개념 중 자연수가 갖는 속성은 집합 또는 류(class)로서의 수개념과 순서수로서의 수개념, 그리고 약간의 비로서의 수개념이 해당할 것이다.

Freudenthal(1991)은 수학은 상식적인 것이며, 수나 기하의 발달에서 보듯이 상식에서 출발해서 점진적으로 체계화·조직화되는 순환적 과정에 의해 발달해 간다고 본다. 개인에게 수학이 어떻게 발달하는가를 자연수 개념의 발달을 통해 살펴보면 다음과 같다. 아동은 초등학교 1학년 정도만 되어도 계속해서 제한 없이 셀 수 있다는 것을 파악하며 이것은 매우 중요시 다루어야 할 것이다. 아동들에게 숫자를 쓰도록 하면 1, 2, 3, ..., 19, ..., 29, ..., 99와 같은 식으로 계속 써 내려가다가 '그렇게 그렇게 계속된다'는 것을 알게 된다. 사실상 '그렇게 계속된다'라고 하는 것이 수학이고, 이것이 바로 인류가 생각해 낸 최초의 수학이며 현대적인 수학인 것이다.

본 절에서는 자연수 개념에 대하여 교사가 갖추어야 할 지식을 구성하는 세 요소 중 첫째 요소인 교과내용지식에 대하여 살펴보았다. 특히 역사적 고찰과 수리철학적 고찰을 통한 교수학적 관점에서 살펴보았다. 교수학적 관점에서 자연수 개념은 Thorndike(1922), Piaget(1969), Dewey(1985), Confrey(1980), Freudenthal(1973, 1983) 등의 연구를 대표로 들 수 있다. 각각을 정리하면 다음의 표와 같다.

&lt;표 1&gt; 자연수 개념의 교과내용지식

고찰 관점	자연수 개념의 교과내용지식
역사적 고찰	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Pythagoras, 수는 있는 그대로의 모든 것(Heath, 1956)</li> <li>-Plato, 수의 성질은 매우 추상적(Heath, 1956)</li> <li>-Aristotle, 수의 개념은 감각적인 대상으로부터 추상화를 통해 얻어진다 (Moreno-Armella &amp; Waldegg, 2000)</li> <li>-Euclid, 존재하는 사물의 각각을 하나라 부를 수 있는 단위가 존재, 이러한 단위가 몇 개 결합된 크기로서의 수(Klein, 1980; Clason, 1968)</li> <li>-중세기 Newton, 수는 어떤 양에 대하여 같은 종류의 다른 어떤 양으로 추상화된 비 (Newton, 1769; Clason, 1968에서 재인용)</li> <li>-Kant, 수는 선천적인 형식으로 주어진 직관, 즉 정신 능력의 산물(Newton, 1769; Clason, 1968에서 재인용)</li> </ul>
수리철학적 고찰	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Dedekind, 자연수의 개념을 '집합'과 '대응'이라는 두 원시 개념으로부터 논리적으로 완벽하게 구성할 수 있음(Clason, 1968)</li> <li>-Peano, 수는 원초적 명제에서 선언된 모든 속성을 가진 체계이며 이것만을 가진 체계 (Russell, 1903, p. 125; Brainerd, 1979에서 재인용).</li> <li>-Russell, '수'란 각 수마다 갖는 성질의 어떤 공통된 특질을 의미(임정대, 1996)</li> <li>-Brouwer, 자연수 전체는 차례차례로 만들어지는 과정으로 파악되는 것이며 결코 완성된 어떤 무엇도 아님(임정대, 1996)</li> </ul>
교수학적 관점에서의 고찰	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Thorndike(1922), 수를 계열, 집합, 비, 관계의 네 가지 의미</li> <li>-Piaget(1969), 자연수는 집합과 순서 관계의 종합</li> <li>-Dewey(1972), 수는 측정 활동의 산물</li> <li>-Confrey(1980), 자연수는 집합 또는 류(class)로서의 수개념, 순서수로서의 수개념, 비로서의 수개념</li> <li>-Freudenthal(1973, 1983), 수개념의 다양한 측면에 대한 교수현상학적 분석</li> </ul>

#### 나. 자연수 개념의 교육과정지식

교사가 갖추어야 할 지식을 Shulman(1986b)은 세 가지 즉, 교과내용지식, 교육과정지식, 교수학적 내용지식으로 구별한다. 앞에서는 자연수 개념에 대한 교과내용지식을 살펴보고 본 절에서는 자연수 개념에 대한 교육과정지식을 알아보았다.

교사는 해당 교과에 대한 교육과정은 물론이거니와 대안적인 교육과정 자료도 알고 있어야 한다. 또한 교사는 자신의 학생들이 학습하는 타 교과도 연구하여 교육과정 자료에 능통한 전문가 교사가 되어야 한다 (Shulman, 1986b). 즉 가르치고자 하는 주제에 대하여 동일 교과와 관련된 종적 지식과 타 교과와 관련된 횡적 지식을 동시에 갖추고 있어야 하는 것이다. 또한 교사는 가르치는 교과에 대한 대안적인 교육과정 자료도 파악하고 있어야 한다.

이에 수학과 교육과정에서 자연수 개념이 교육과정상의 어느 위치에 있으며(종적인 측면), 대안적인 교육과정 지식으로는 어떤 것이 있고, 해당 주제를 가르칠 때 타교과에서 사용할 수 있는 소재로는 어떤 것이 있는지(횡적인 측면) 고찰해 본다.

#### (1) 자연수 개념의 교육과정상의 위치

우리나라 교육과정에서 자연수 개념이 교육과정에서 차지하는 위치는 다음과 같다.



<표 2> 교육과정에서 자연수 개념의 위치(교육과학기술부, 2009)

영역 \ 학년	1학년	2학년	3학년	4학년
수와 연산	· 100까지의 수	· 1000까지의 수	· 10000까지의 수	· 다섯 자리 이상의 수

자연수 개념은 주로 1학년에서부터 4학년 사이에 학습된다. 교사는 자연수 개념에 대한 교육과정 상의 위치를 숙지하여 종적인 관계를 파악하고 있어야 할 뿐만 아니라 대안적인 교육과정 자료도 주지하고 있어야 한다. 다음과 같다.

(2) 대안교육과정 자료

우리나라 교육과정에서 자연수 개념에 대한 지도는 셈수를 기초로 한 기수적 측면의 지도를 중심으로 하고 있다. 특히 기수적 측면의 내용이 자연수 개념에 대한 내용의 반 정도를 차지하고 있다(이명희·황우형, 2010, p. 452). 앞에서 살펴본 바와 같이 자연수 개념은 다양한 측면을 갖고 있고 어느 한 측면이 다른 측면을 대신할 수 없는 것이라 생각해 볼 때, 다른 측면에 대한 지도도 소홀히 될 수 없는 부분이다.

자연수 개념 지도와 관련하여 기수적 측면과 순서수적 측면의 적절한 균형을 생각해 볼 필요가 있다는 연구(정영옥, 2005)가 있다. 정영옥(2005)은 우리나라 교육과정에서 자연수 개념에 대한 지도를 분석하여 순서수적 측면의 내용을 더 넣을 것을 주장한다.

1학년에서 100까지의 수를 지도하면서 물건의 개수와 수의 순서에 대해 지도하지만, 2학년에서는 세 자리 수를 도입하면서 농도수의 측면, 즉 기수적 측면은 강조되는 반면 100씩, 10씩, 1씩 뛰어 세기 활동을 통해 수의 계열을 지도하는 활동만이 한 차시 지도된다. 3학년에는 10000까지의 수를 도입하면서 1씩 차이가 나는 몇 개의 수의 차례를 구하고 화폐 모형을 통해 뛰어 세기 활동이 한 차시 지도되며, 4학년에는 다섯 자리 이상의 수에 대해 뛰어 세기 활동이 한 차시 지도된다(교육인적자원부, 2009).

수 개념 지도와 관련하여 농도수와 순서수의 적절한 균형에 대해 생각해 볼 필요가 있다. 네덜란드의 교과서에서는 다양한 상황을 통해 수개념의 다양한 의미를 제공해 줄 뿐만 아니라 빈 수직선을 통해 수세기를 강조함으로써 농도수 뿐만 아니라 순서수를 특히 강조한다. 우리나라의 경우 특히나 기수적 측면의 지도에 비하여 순서수적 측면의 지도가 미비하며, 뛰어 세기에 주로 사용되는 화폐 모형은 순서수의 측면을 드러내 주기에는 적합한 모델이 아니라고 한다(정영옥, 2005). 즉, 화폐 모형은 묶음 모델로 순서수를 지도하기에는 효과적이지 않다는 것이다.

한편, Treffers(1991; p. 137), Gravemeijer(1994; pp. 120-127), Klein(1998; p. 8), Beishuizen(1999; pp. 160-161), Sundermann&Selter(2000; pp. 122-125) 등은 수의 여러 가지 측면 중 순서수는 묶음 모델과 잘 맞지 않으며, 실제로 여행 거리와 같은 상황에는 묶음 모델이 적합하지 않고, 이는 직선 모델이 더 적합하며 빈 수직선은 이러한 기능을 충분히 갖추고 있음을 주장하고 있다. 한편, 화폐 모형을 활용하여 100씩, 10씩, 1씩 뛰어 세는 활동은 오히려 농도수의 개념을 강조하는 것이라 할 수 있다. 따라서 순서수의 지도를 위해서는 교육과정에서 사용이 미미한 직선 모델을 좀 더 적극적으로 활용하는 문제를 고려해 볼 필요가 있다(정영옥, 2005).

이명희·황우형(2010)의 연구에서도 언급되었듯이, 자연수 개념에서 측정수적 측면에 대한 내용 역시 자연수 개념의 한 측면을 보여주는 부분이다. 측정수적 측면에 대한 내용도 순서수적 측면에 대한 내용만큼이나 우리나라 수학과 교육과정에는 그 내용이 적게 제시되어 있다. 수 개념에서 측정수적 측면을 중요시한 학자들의 연구(Dewey, 1972; Davydov, 1990; Minskaya, 1975; 고정화, 2005)에서 볼 때, 전통적인 자연수 지도 방법은 자연수를 이산량의 집합으로 보는 관점을 바탕으로 전개된다. 이러한 관점에 따르면, 개개의 사물을 보유한 개별성에 기초한 ‘하나’가 자연수의 고정 단위를 이루며 이 고정단위의 누적을 통해 자연수가 만들어진다. 여기서의 ‘하나’

는 어떤 전체량과의 관련 없이, 즉 측정과 무관하게 그 자체에 내재한 성질로 규정된다.

이와는 달리 양의 측정에 기초한 관점에서는 대상과 단위와 수라는 세 요소 사이의 상호 관계가 중심에 놓인다. 여기에 측정되는 대상과 단위 사이의 관계를 결정하는 것 그리고 그 결과를 나타내기 위해 숫자들을 사용하는 것이 자연수 학습의 주요 과정을 이룬다. Minskaya(1975)는 양의 측정을 통해 자연수를 지도하는 교육과정을 다음의 네 가지 활동을 통해 예시하고 있다.

- 첫째, 단위를 도입하기
- 둘째, 숫자를 도입하기
- 셋째, 측정을 수직선 위로 확장하기
- 넷째, 측정을 문자식으로 표현하기

자연수 개념에 대하여 교사가 갖추어야 할 지식의 둘째 요소인 교육과정지식 중 자연수 개념에 대한 대안 교육과정 자료에 대하여 알아보았다. 자연수 개념은 셈수적 측면, 기수적 측면, 순서수적 측면, 측정수적 측면 등 다양한 측면으로 볼 수 있는데 우리나라 교육과정에서는 셈수적 측면에 기반을 둔 기수적 측면에 대한 내용이 주류를 이루고 있다는 점과, 순서수적 측면 및 측정수적 측면에 대한 미비한 사항과 대안적인 교육과정 자료를 살펴보았다. 다음으로는 자연수 개념에 대한 교육과정지식 중 타교과와 관련된 내용을 살펴본다.

### (3) 타교과에 대한 연구

교사는 해당 교과만이 아니라 학생들이 학습하고 있는 타 교과에 대하여도 연구하여 교육과정 자료에 능통한 전문가로서의 교사가 되어야 한다. 자연수 개념에 대한 학습에서 학생들이 학습하고 있는 타 교과에 제시되어 있는 대상을 소재로 제시하면 보다 학생들의 관심을 끌 수 있다. 자연수 개념에 대하여 셈수, 기수, 순서수적 측면을 학습하게 되는 1학년 1학기과 같은 시기에 학습하게 되는 슬기로운 생활의 14, 15쪽이다.



<그림 1> 1학년 1학기 슬기로운 생활 14, 15쪽 (교육과학기술부, 2009g)

이 부분에 제시되어 있는 어른의 수, 어린이의 수, 사람의 수 등을 자연수 개념 학습에 사용하면 흥미로운 것이다. 이러한 활동은 교사가 아니면 할 수 없는 것이며, 학생들이 현재 학습하고 있는 타 교과와의 횡적인 연구를 하지 않으면 쉽지 않은 일이다. 자연수 개념의 교육과정 지식은 그것의 교육과정상의 위치, 대안이 되는 교육과정 자료, 타 교과에 대한 연구로 구분하여 연구할 수 있다. 자연수 개념은 우리나라 교육과정에서 주로 1학년 부터 4학년 사이에 학습된다. 우리나라 교육과정에서 자연수 개념은 셈수를 기초로 한 기수적 측면의 내용이 많

은 부분을 차지하고 있다. 그러나 자연수 개념은 셈수적 측면과 기수적 측면만이 아니라 순서수적 측면과 측정수적 측면 등도 고려해야 한다.

자연수 개념에 대한 교육과정지식에 대하여 대안이 되는 교육과정 자료로서 순서수적 측면에 초점을 두는 교육과정 자료와 측정수적 측면에 초점을 두는 교육과정 자료를 살펴보았다. 또 다른 입장에서 타교과에 대한 연구를 통하여 자연수 개념의 내용이 보다 넓어질 수 있다. 살펴본 내용을 정리하면 다음과 같다.

<표 3> 자연수 개념의 교육과정지식

고찰 관점	자연수 개념의 교과내용지식
교육과정에서 차지하는 위치	-1~4학년 사이
대안적인 교육과정 자료	-셈수를 기초로 한 기수적 측면의 지도가 중심 -기수적 측면과 순서수적 측면의 적절한 균형 필요(정영옥, 2005) -측정수적 측면으로 자연수 개념 지도 필요
타교과에 대한 연구	-다른 교과와의 관련성 파악

다. 자연수 개념의 교수학적 내용지식

교과 내용 전공자는 앞에서 언급한 정의와 성질 및 그 활용을 아는 것으로 충분하다. 그러나 교사는 이와는 다른 특수한 형태의 지식에 대해서도 간파하고 있어야 한다. 바로 교수학적 내용지식이 그것이다. 자연수 개념에 대한 학자들의 견해가 다양하지만 어느 한 견해가 다른 견해를 대신할 수는 없다. 그만큼 자연수 개념은 발생과정이나 그 성격을 여러 측면에서 볼 수 있는 것이다. 자연수를 바라보는 입장은 셈수, 기수, 순서수, 측정수, 이름수(명목수)(Freudenthal, 1983; Brainerd, 1979; Piaget, 1969; 김남희 외, 2006; 교육과학기술부, 2009; Dewey, 1972; Davydov, 1990)등으로 연구하는 학자들의 수 만큼이나 자연수 개념의 측면 또한 다양하다.

본 절에서는 자연수 개념의 교수학적 내용지식에 대하여 알아보는데 주안점이 있다. 이에 자연수 개념에 대한 교수·학습이 주로 이루어지는 초등학교 수준을 고려하고 동시에 수의 크기 비교나 순서짓기가 가능한 의미에서 살펴본다.

앞 절에서 자연수 개념을 교수학적 관점에서 고찰해 보았다. 교수학적 관점에서 자연수 개념은 Thorndike(1922), Piaget(1969), Dewey(1985), Confrey(1980), Freudenthal(1973, 1983) 등의 연구를 대표로 들 수 있는데 이들의 연구에서 자연수 개념에 대하여 공통적으로 언급되고 있는 바는 셈수적 측면, 기수적 측면, 순서수적 측면, 측정수적 측면이다. 본 절에서는 자연수 개념을 교수학적 관점에서 고찰한 사항들에 천착하여 셈수, 기수, 순서수, 측정수적 측면의 네 측면으로 구분하고, 각각에 대한 교수학적 내용지식을 살펴본다.

(1) 셈수적 측면

세기는 아동이 최초로 언어화하는 수학이다. 말로 수를 세는 것이 사물을 세는 것에 앞서기도 한다. 아동의 세계에는 세어야 할 아주 많은 종류의 사물이 존재하며, 세어지기를 기다리고 있는 많은 사물들이 존재하고, 세는 것을 위해 제공될 수 있는 많은 새로운 사물들이 존재한다(Freudenthal, 1983, pp. 86~89).

Klein에 의하면 센다는 것은 세는 대상을 같은 류의 것으로 간주하고, 그것들을 함께 취해서 각각에 다른 명칭을 부여한다는 것이다. 다른 명칭으로 세는 데는 단위가 필요하며, 셀 때는 단위 앞에 '일one'을 붙이게 된다. 이렇게 셈을 한 결과를 수라고 한다. 같은 류가 존재하기 때문에 단위 및 '일one'에 비추어 볼 때, (셈)수에서 순서는 중요하지 않다(Freudenthal, 1983, p. 75). 셈수란 자연수의 수열이며 수세기와 계산 활동에 필수 불가결한 것(Skemp, 1987)이다. 전통적으로 초등학교 수학에서는 수 세기를 학습한 후, 덧셈은 잇달은 수 세기로, 뺄셈은 거꾸로 세기로, 곱셈은 들씩 셋씩 세기 등으로 지도한다.

## (2) 기수적 측면

Russell은 자연수 계열을 기수와 같은 뜻으로 생각해야 한다고 한다.

수는 본질적으로 유목에 적용할 수 있다. 그래서 어떤 유목개념(내포)이 주어질 때 이 유목개념이 적용 가능한 개체의 어떤 수가 있으며 따라서 그 수는 그 유목의 속성으로 간주될 수 있다(Russell, 1903, pp. 112-113; Brainerd, 1979에서 재인용).

다시 말해서 두 유목  $R_x$  와  $R_y$ 가 주어질 때,  $R_x$ 를 충족시키는 모든 속성  $x$ 에 대해  $R_y$ 를 충족시키는  $y$ 의 한 속성가가 대응되고, 그 역으로도 대응되면 “같은 수”라고 한다(Brainerd, 1979). 집합에서 기수의 불변성은 수세기에서의 시간 경과, 시점 변화, 섞기 변형, 흩뜨리고 모으는 자연수 등 여러 가지 자연수 아래에서의 불변성을 생각할 수 있다. 1대 1 대응 아래에서의 불변성을 강조하고 서로 대등한 집합의 집합을 의식적으로 생각하게 하려는 것은 집합론의 영향을 받은 것으로 볼 수 있다(Piaget, 1969). Cantor의 집합론에 영향을 받아 이러한 측면에서 아동의 수개념 발달을 생각한 Piaget의 연구 결과를 바탕으로 한 학습-지도 이론은 ‘세수학’의 일반적 배경이 되었다(우정호, 2001, pp. 186~187). 자연수의 개념을 학습함에 있어 기수적 측면은 매우 중요한 입장이며, 초등학교 수학에서 자연수 개념의 지도를 할 때 기수적 측면에 관한 언급은 필수적이다.

## (3) 순서수적 측면

기수 개념과 대비될 수 있는 것이 순서수 개념이다. 순서수적 입장에는 자연수가 0, 1, 2, 3, ...이라는 수열을 형성한다는 사실을 자연수의 본질적인 구성 원리로 파악하고 있는데, 최초의 자연수인 0과 후자에 대한 개념, 그리고 수학적 귀납법의 원리 등을 포함하는 Peano의 공리계로 자연수를 정의한다. 순서수 개념을 중심으로 한 이와 같은 정의는 개별적인 수의 의미에 관심을 기울이지 않으며, 전체로서의 자연수 체계를 생성하는 속성인 1씩 더해 나가는 규칙, 또는 순서 구조를 강조한다고 할 수 있다. 이때 개별 자연수의 의미는 비대칭적이고 추이적인 ‘순서 관계’ 속에서 찾아야 한다(김남희 외, 2006, p. 28).

자연수 체계의 가장 현저한 특징은 그 고유한 순서짓기라는 견해는 수의 관계론에서 나온다. 이 체계에서 항은 단순 무한수열을 이루며, 그 항의 유한 부분집합은 유한수열을 이룬다. 우리는 1, 2, 3, ...을 말하거나 쓰거나 읽을 때, 그것은 동일한 불변의 순서로 우리의 앞 속에서 진행된다. 마찬가지로, 수를 물체에 배정할 때, 그 수는 언제나 같은 고정된 순서로 배정된다. 직관적으로, 이것은 순서의 성질이, 더 정확하게는 자연수를 특징지우는 특별한 순서짓기가 수개념의 의미를 알아내는 열쇠임을 시사한다. 이 추측은 자연수를 유한서수로서 밝혀 본다는 이론에 대한 역사적 기원의 역할을 한다(Brainerd, 1979). 순서수적 측면의 이러한 특징은 셈수적 측면과 유사한 것으로 볼 수 있다.

그러나 셈수적 측면에서 진일보 하여 순서수적 측면에서 보면, 수는 순수하게 관계의 개념이다. 관계수란 갖가지 관계의 관계수, 즉 모든 서로 상사인 관계의 집합을 원소로 하는 집합이다. 혹은 달리 말해서 하나의 관계수란, 그 속의 하나의 원소와 상사인 모든 관계의 집합이라고도 정의된다(Russell, 1919; Brainerd, 1979에서 재인용). 순서수로서의 자연수를 알아보려고 한 사람은 Dedekind이다. 자연수는 보통 산수에 수열을 형성한다. 서수는 모든 수열의 항이 공통적으로 가진 수이기 때문에, Dedekind는 자연수를 순서수적 측면에서 고찰한다. “이 요소는 자연수 혹은 서수 혹은 단순히 수라고 불린다”(Dedekind, 1887 p. 68; Brainerd, 1979에서 재인용).

## (4) 측정수적 측면

Piaget에 의하면 길이 측정의 개념은 자연수 개념보다 조금 늦게 구성되지만 동일한 조작 활동이다. 길이를 측정하기 위해서 구간을 분할하는 것은 전체 내에 부분을 끼워 넣는 것과 대응되며, 단위의 전사(轉寫)는 계열화에 대응된다. 이 두 조작이 하나로 융합된 것이 바로 측정이라고 본다(Piaget, 1969). Piaget의 이러한 해석은

자연수가 측정수적 측면을 갖고 있다는 것으로 간주되며, 이는 측정을 통해서 수개념이 발생된다고 생각한 Dewey의 주장과 연결되는 것이다.

수 그 자체는 측정 단위 양을 몇 배하면 측정될 크기가 되는 양을 만들게 되는지를 나타낸 것이다. 이것이 Dewey가 말하는 변별과 관계짓기이다. Dewey에게 있어서 수개념은 측정 활동을 통해 파악되는 전체량과 단위량 사이의 비이며, 이것이 바로 측정수이다(Dewey, 1972; 고정화, 2005). 살펴본 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식을 정리하면 다음과 같다.

<표 4> 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식

고찰관점	자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식
셈수적 측면	-소박한 수세기(Freudenthal, 1983) -역사적, 언어학적, 심리발생적, 이론적으로 수학의 초석(Freudenthal, 1973) -세는 대상은 같은 류의 것으로 간주하고, 그것들을 함께 취해 각각에 다른 명칭을 부여하여 세는 것(Freudenthal, 1983). -수세기는 계산활동에 필수 : 자연수는 덧셈과 곱셈 연산이 있는 셈수의 집합(Skemp, 1987)
기수적 측면	-집합론에서 개수는 기수로 형식화 됨, 집합의 수(Brainerd, 1979) -아무 조건 없이 수라고 할 때 보통 기수를 의미함(Brainerd, 1979) -수세기의 결과가 사물의 개수, 즉 기수(Brainerd, 1979) -수세기에 대하여 시간 경과, 시점 변화, 섞기의 변형, 흩뜨리고 모으는 변환 등 여러 변환 하에서도 불변성을 자각하는, 곧 수세기에서 보존성을 갖는 개념이 기수 개념(Piaget, 1969)
순서수적 측면	-셈수가 Peano의 공리체계로 형식화된 것(김남희 외, 2006) -집합론에서 보는 관계의 수 : 자연수를 어떤 유형의 관계 영역에 있는 속성가에 환원시키는 것(Brainerd, 1979) -순서짓기(Brainerd, 1979) -수열의 관계수(Brainerd, 1979)
측정수적 측면	-수는 정확한 측정, 정확한 평가에서부터 생겨나는 것(Dewey, 1972) -사물을 변별하여 관계짓기를 한 결과(Dewey, 1972) -수는 전체량과 단위량 간의 상대적인 관계를 나타낸 것(Dewey, 1972; Davydov, 1990; Minskaya, 1975) -양의 조작 활동을 통하여 양 사이의 비로 자연수 개념 형성됨(Dewey, 1972; Davydov, 1990)

자연수의 의미가 이 네 가지 측면만 있는 것은 아니나, 자연수의 초기 학습 시기에 이루어지는 수개념 형성을 위한 학습에서는 이 네 가지 측면이 주를 이룬다고 할 수 있다. 수가 사용되는 상황에 따라 자연수가 이 네 가지 측면에서 각각 한 가지 의미만을 갖기도 하지만, 상황에 따라 여러 측면을 동시에 가질 수도 있다.

### III. 연구 방법

#### 1. 연구 방법

본 연구의 목적은 초등학교 교사는 자연수 개념에 대하여 어떠한 교수학적 내용지식을 가지고 있으며, 그러한 교수학적 내용지식에 포함되는 요소로는 어떠한 것이 있는지 알아보고자 하는 데 있다. 주요 연구 방법은 현장 교사를 대상으로 한 개별 면담이다. 개별 면담의 전 과정은 녹취하였으며, 녹취한 내용은 모두 전사되었다.

면담 도중 현장 노트를 작성하고, 교사의 자연수 개념에 대한 수업에 사용되었던 자료 수집도 병행한다. 더불어 면담 전후 개별 설문지도 실시한다.

면담은 비구조화 면접을 사용한다(Holland&Ramazanoglu, 1994). Rubin & Rubin(1995: 43)에 의하면 질적 면접은 사전에 면밀히 준비되고, 어떤 틀에 고정됨이 없이 융통적이고, 곰곰이 다각도로 사고하며, 질문의 계속적인 재구조화가 요구되는 과정이라고 한다. 본 연구에서 사용한 면접 방식은 비공식 대화면접이다. 질적 면접 중 면접자와 응답자간에 사전에 계획하거나 예측할 필요 없이 자연스럽게 이루어지는 상호 작용의 대화 형식을 취하는 방식을 비공식 대화면접(informal conversational interview)이라 한다(Patton, 1990, p. 280).

연구자가 면담에서 알고자 한 것은 현장 교사가 가지고 있는 자연수 개념에 대한 것이다. 교사가 자연수 개념에 대한 지식을 어떻게 얼마나 알고 있는지 직접적으로 질문하거나 테스트하지는 않았다. 연구자는 자연수 개념에 대하여 면밀히 준비한 후, 오히려 그들과의 자유로운 면담의 과정에서 나오는 언급들을 분석함으로써 자연수 개념에 대하여 교사들이 갖고 있는 교과내용지식, 교육과정지식, 교수학적 내용지식을 알아내고자 한다. 교사는 자연수 영역을 지도할 때 어떻게 하는지가 면담의 주요 내용이다. 면담에서 교사가 알고 있는 것을 말하지 못할 경우를 대비하여, 수학 교과서 및 수학 익힘책, 수학 교사용 지도서를 면담 내내 함께 가지고 페이지를 넘겨가며 자연수 영역에 해당하는 부분은 어떤 의미가 있다고 생각하는지, 그래서 수업을 할 때 어떻게 하는지에 대하여 자유롭게 말해 달라고 한다.

## 2. 면담 대상 교사

면담 대상 교사는 초등 교사 경력이 7년 이상 되는 교사를 선정한다. 경력이 7년 이상이 되면 초등 교사는 6개 학년을 골고루 가르쳐 보게 되기 때문이다. 연구자와 안목이 있는 교사에게 직접 면담 요청을 하기도 하고 다른 교사의 추천을 받기도 하였다. 면담 대상이 된 교사는 총 6명이다. 면담을 하기 전 각 교사에 대하여 간단한 설문지를 통하여 그들에 대한 기본적인 사항을 알아보았다. 연구에서 면담자의 이름은 알파벳 이니셜 A, B, C, D, E, F로 제시한다. 교사들이 작성한 설문지를 기초로 보았을 때 각 교사들의 속성은 다음의 <표 5>과 같다.

<표 5> 면담 참여 교사들의 속성

설문 항목 교사	1~4학년 지도경력 /총 경력	수학과 관련 연구 경험	수학교육관련 대학원 수학여부
A	8년/13년	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 각종 수학과 관련 연수 강의</li> <li>• 각종 수학과 관련 문항 출제</li> <li>• 수학교과서 및 관련교재집필</li> </ul>	박사
B	8년/10년	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 독특한 수학 교실 문화를 형성하기 위한 자료</li> <li>• 개방형 수학 수업을 위한 이론과 실제</li> <li>• 2007 개정수학교육과정과 초등학교 수학과 교수학습방법</li> </ul>	없음
C	7년/11년	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 수학교과서 및 관련교재집필</li> <li>• 각종 수학과 관련 문항 개발</li> </ul>	박사 수료
D	22년/29년	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 수준별 교육과정 연수</li> </ul>	없음
E	2년/8년	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 각종 수학과 관련 연수 강의</li> <li>• 각종 수학과 관련 문항 개발</li> <li>• 수학교과서 및 관련교재집필</li> </ul>	박사 수료
F	13년/22년	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 문제해결시 오류의 종류와 분석</li> <li>• 수학과 수업방법 개선 연구교사</li> </ul>	없음

초등에서 자연수 개념에 대한 내용은 주로 1~4학년 과정에 포함되어 1~4학년의 지도경력과 총 경력을 모두 조사한다. 6명의 교사의 경력은 위와 같다. 총 교사 경력은 8년에서 29년까지이며, 1~4학년 지도 경력은 2년~22년까지로 다양하다. 또한 면담 대상 교사 중 3명이 수학교육 관련 심화 전공을 한 교사이다. 그렇지 않은 교사들도 수학과 관련하여 다양한 연구를 한 경험이 있다.

면담은 교사별 2시간~4시간 가량 소요되었다. 일부 교사는 1회 면담으로 4시간 가량의 면담을 한번에 수행하기도 하고, 또 일부는 2시간씩 2회에 걸쳐 면담을 하기도 하였다. 물론, 면담의 시작부터 끝까지 녹음하고, 면담 후 다른 교사에 대한 면담을 하기 전까지 녹음한 면담 자료 전체를 전사 하였다. 이것은 기 면담한 교사가 갖는 교수학적 내용지식을 연구자가 파악한 후 다음 면담자에 대한 면담을 하기 위한 것이다. 면담 도중 현장 노트를 작성하고, 교사의 자연수 개념에 대한 수업에 사용되었던 자료 수집도 병행하였다.

### 3. 자료 분석

교사 6명에 대한 개별 면담을 하면서 전 과정을 녹취하였고 녹취한 전체는 전사한다. 전사한 자료에 대하여 문단별로 번호를 매겼다. 면담 내용의 구분을 위하여 번호를 '면담 대상자의 의견 번호'라고 명명하였고 번호는 327번까지이다.

#### 가. 연구문제 1의 분석

연구문제 1은 초등 교사들의 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식은 어떠한가이다. 이에 대하여 1차로 각 의견 번호별 내용을 분석하여 그 특징을 간단히 요약하였다. 1차 코딩 결과 0의 수학적 의미, 수학적 용어와 일상적 용어의 차이, 순서수 개념, 순서수 및 집합수의 개념, 십진기수법의 성격, 집합수 개념, 측정수에 대한 개념, 교과서 차시 순서 조정, 교육과정상의 순서, 단원 조정, 타 교과와의 관련성, 학년간 내용 관련성, 0에 대한 교과서 안내의 부적절성, 교과서 놀이의 부적절성, 교과서 발문의 부적절성, 교과서 방식대로 지도, 교과서 지도 방식에 대한 대안적인 의견, 교과서에 제시된 교구에 대한 대안, 교구를 이용한 지도, 대안적인 지도 방법 및 교구 제시, 일상생활과의 관련성 등 21가지로 요약된다.

2차 코딩으로는 1차 코딩 21가지에 대한 분석 결과, 교사들의 응답은 세 요소인 교과내용지식, 교육과정지식, 교수학적 내용지식의 세 가지로 분류될 수 있다. 이러한 세 가지 분류는 Shulman(1986a, 1986b)이 교수에서의 지식의 성장에 대한 연구에서 교사가 갖추어야 할 내용지식으로 꼽은 교과내용지식, 교육과정지식, 교수학적 내용지식의 세 가지와 같은 맥락을 갖는 것으로 나타났다.

#### 나. 연구 문제 2의 분석

연구 문제 2는 자연수 개념에 대한 교사의 교수학적 내용지식에는 어떤 요소들이 포함되어 있는가에 대한 내용이다. 연구 문제 2를 분석함에 있어 면담 내용 전체를 대상으로 포함되는 요소를 분석하였다.

'면담 대상자의 의견 번호'의 각 내용을 다시 상세히 읽고 수학을 가르치는 교사의 수업에 포함되는 요소에서 교사 개인 요소의 상세 항목, 사회문화요소의 상세 항목 중 어느 항목들에 해당하는지를 구분한다. 상세 항목들로 구분 후 각 상세 항목별로 교사 개인 요소인지 사회문화 요소인지를 구분한다.

본 연구에서 연구의 타당도를 확보하기 위해 사용한 방법은 다음과 같다. 첫째, 연구 대상이 된 교사와 최소 2시간 이상의 심층 면접을 실시한다. 둘째, 삼각측정법을 활용한다. 삼각측정법이란 다양한 자료를 바탕으로 접근하는 방법으로 이 연구에서는 면담 내용, 교사가 사용하는 학습 자료, 현장 노트, 녹취, 설문지 등 다양한 자료에서 확인되는 일치도를 중시한다. 셋째, 동료 연구자에 의한 조연과 지적을 들 수 있다. 이 연구의 초기, 중기, 후기에 각각 현장 교사 및 대학원에서 함께 연구를 진행하는 연구원으로부터 조연과 지적을 듣는다.

#### IV. 연구 결과

본 연구는 초등 교사의 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식과 그것에 어떤 요소들이 포함되어 있는지를 알아보고자 함이다. 연구 결과는 다음과 같다.

##### 1. 자연수 개념에 대한 교사의 교수학적 내용지식

자연수 개념에 대하여 교사가 갖추어야 할 지식은 교과내용지식, 교육과정지식, 교수학적 내용지식으로 구분할 수 있다. 면담 내용을 특징별로 정리하고 분석해 보니 응답 내용에서 세 지식에 나타나는 비율은 다음의 <표 6>와 같다.

<표 6> 면담에서 교사가 갖추어야 할 지식에 대한 비율(백분율, %)

지식 \ 교사	A	B	C	D	E	F	평균
교과내용지식	40.0	6.5	23.8	1.5	9.5	4.8	14.3
교육과정지식	16.5	12.9	11.4	13.4	14.3	9.5	13.0
교수학적 내용지식	43.5	80.6	64.8	85.1	76.2	85.7	72.7

교과내용지식이나 교육과정지식보다 교수학적 내용지식에 대한 내용이 여섯 명의 교사들에 대하여 평균적으로 5배 정도 많다. 또한 교사별로 세 요소들 중 특정 요소에 편향된 견해를 보이는 특징도 있다. 특히, 교과내용지식에 대한 의견이 많은 교사는 A, C정도이다. 이 두 교사는 수학교육에 대한 심화 전공을 한 교사이다.

반면 B, D, F 교사의 경우 면담 내용의 대부분이 교수학적 내용지식에 대한 것이다. 우리나라 초등학교의 경우 교사는 거의 전 과목을 가르치므로 그들이 전 교과에 대한 심화 내용을 숙지하는 것은 기대를 하기 어렵다. 하지만 그들의 교사양성과정 및 현장 연수, 그리고 교육적 경험 등을 통하여 형성된 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식에 대해서 알고자 하는 것이 본 연구의 목표이다.

##### 가. 자연수 개념에 대한 교사의 교과내용지식

교과내용지식이란 학생이 어떤 영역에서 받아들이고자 하는 참된 지식에 대하여 교사가 정의내린 지식이라 할 수 있다. 나아가 교사는 학생들이 이를 왜 알아야만 하고 이와 관련된 다른 명제들과의 관련성에 대해서도 통찰하고 있어야 한다. 또한 이론과 실제에서 어떻게 관련되는지도 설명할 수 있어야 한다. 교사별 면담 내용의 분석을 통하여 자연수 개념에 대한 교사의 교과내용지식을 살펴보았을 때, 그것에 대한 교사의 응답 여부는 다음과 같다.



<표 7> 자연수 개념의 교과내용지식에 대한 교사별 응답 여부

고찰 관점	자연수 개념의 교과내용지식	교사반응여부					
		A	B	C	D	E	F
역사적 고찰	-Pythagoras, 수는 있는 그대로의 모든 것(Heath, 1956)	○		○	○		
	-Plato, 수의 성질은 매우 추상적(Heath, 1956)	○					
	-Aristotle, 수의 개념은 감각적인 대상으로부터 추상화를 통해 얻어진 다(Moreno-Armella & Waldegg, 2000)	○		○	○	○	○
	-Euclid, 존재하는 사물의 각각을 하나라 부를 수 있는 단위가 존재, 이러한 단위가 몇 개 결합된 크기로서의 수(Klein, 1980; Clason, 1968)	○		○	○	○	○
	-중세기 Newton, 수는 어떤 양에 대하여 같은 종류의 다른 어떤 양으로 추상화된 비(Newton, 1769; Clason, 1968에서 재인용)	○		○			○
	-Kant, 수는 선천적인 형식으로 주어진 직관, 즉 정신 능력의 산물(Newton, 1769; Clason, 1968에서 재인용)	○					
수리철학적 고찰	-Dedekind, 자연수의 개념을 ‘집합’과 ‘대응’이라는 두 원시 개념으로부터 논리적으로 완벽하게 구성할 수 있음(Clason, 1968)	○			○	○	○
	-Peano, 수는 원초적 명제에서 선언된 모든 속성을 가진 체계이며 이것만을 가진 체계(Russell, 1903, p. 125; Brainerd, 1979에서 재인용).	○					
	-Russell, ‘수’란 각 수마다 갖는 성질의 어떤 공통된 특질을 의미(임정대, 1996)			○	○		
	-Brouwer, 자연수 전체는 차례차례로 만들어지는 과정으로 파악되는 것이며 결코 완성된 어떤 무엇도 아님(임정대, 1996)	○					
교수학적 관점에서의 고찰	-Thorndike(1922), 수를 계열, 집합, 비, 관계의 네 가지 의미	○		○		○	○
	-Piaget(1969), 자연수는 집합과 순서 관계의 종합	○		○		○	
	-Dewey(1972), 수는 측정 활동의 산물	○					
	-Confrey(1980), 자연수는 집합 또는 류(class)로서의 수개념, 순서수로서의 수개념, 비로서의 수개념	○		○		○	○
	-Freudenthal(1973, 1983), 수개념의 다양한 측면에 대한 교수현상학적 분석	○		○		○	

면담 내용에 대하여 자연수 개념의 교과내용지식에 대한 교사별 응답의 특징적인 부분을 살펴보자. 자연수가 갖는 개념 중 교사가 셈수적 측면의 교과내용지식을 갖추고 있음을 알게 된 것은 다음과 같다.



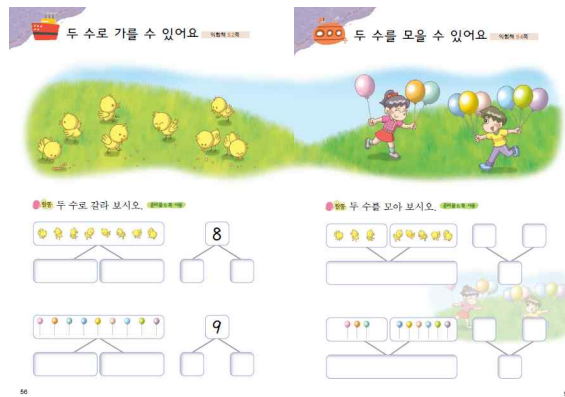
<그림 2> 교사의 셈수적 측면의 교과내용지식을 알 수 있는 교과서 예(교육과학기술부, 2009a)

<그림 2>의 내용의 학습 목표는 수 1, 2, 3, 4, 5의 개념을 이해하여 수를 읽고 쓸 수 있게 하는 것이다. 여러 가지 사물들 중 개수가 같은 사물들의 공통 특징으로서 수 1, 2, 3, 4, 5를 나타낸다는 것을 알고 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 읽고 쓰는 것을 학습하는 부분이다(교육과학기술부, 2009h, p.92). 이 부분에 대하여 C 교사는 썬수적 측면에 대하여 다음과 같은 교과내용지식에 대한 의견을 밝힌다.

C : 교과서의 그림을 보며 몇 개인지 세어보게 해요. 하나씩 세어서 수를 알아보게 하지요. 현장에서 실제 수업을 하다 보면 6, 7쪽의 두 페이지만으로 한 차시를 하기에는 분량이 작아요.....

<그림 2>를 보면서 C 교사는 ‘교과서의 그림을 보며 몇 개인지 세어보게 하고, 하나씩 세어서 수를 알아보게 한다’는 견해를 낸다. C 교사의 이러한 의견은 하나씩 하나씩 세어서 수 개념을 형성해 나간다(Freudenthal, 1991)고 하는 썬수적 측면의 교과내용지식을 보여주고 있다.

자연수 개념이 갖는 둘째 입장은 기수적 측면이다. 기수가 갖는 특징 중 썬수적 측면과 다른 점은 수세기에 대하여 시간 경과, 시점 변화, 썬기의 변형, 훌뜨리고 모으는 변환 등 여러 변환 하에서도 불변성을 자각하는 개념으로 볼 수 있다. 곧 수세기에서 보존성을 갖는 개념이 기수 개념이다. 이러한 기수적 측면이 갖는 교수이론은 교육과정에 ‘수의 합성과 분해 : 10미만의 자연수에 대한 합성과 분해, 10에 대한 보수 : 10을 두 수로 가르기와 합이 10이 되는 두 수의 모으기의 이해’로 변환되어 제시되어 있다. 교과서에는 ‘9까지의 수의 가르기와 모으기, 10을 가르기와 모으기’의 내용으로 제시되어 있다. <그림 3>을 보자.



<그림 3> 교사의 기수적 측면의 교과내용지식을 알 수 있는 교과서 예(교육과학기술부, 2009a, pp. 56~57)

<그림 3>의 내용은 8, 9를 두 수로 갈라 보기도 하고, 합이 8, 9가 되도록 두 수를 모아보기도 하는 활동이다. 8과 9의 가르기와 모으기는 보다 적은 수의 가르기와 모으기보다 경우의 수가 더 많으면서 가르기와 모으기 활동의 완성이 된다. 이러한 가르기와 모으기는 덧셈과 뺄셈의 기초가 된다(교육과학기술부, 2009h, p.92) A 교사는 기수의 보존성에 대한 교과서 내용을 교과내용지식의 하나로 다음과 같이 인식하고 있음이 면담을 통해 밝혀졌다.

A : 가르기와 모으기 활동은 중요하지요. 가르기를 할 때는 가르기를 하여도 가르기 전의 수는 그대로 입을 항상 인지하고 있어야 하고, 모으기를 하여도 모으기 전의 두 수는 그대로 있음을, 곧 수의 보존성을 생각해야 하는 것이지요. 또한 가르기와 모으기는 곱셈에서 인수찾기와 덧셈에서 보수찾기와 같은 의미를 갖는다고 볼 수 있어요.....

A 교사는 ‘가르기 전의 수는 그대로이고, 모으기 전의 두 수 역시 그대로라는 수의 보존성을 생각해야 한다’는 보존성에 대한 의견을 제시한다. 교사 A는 기수적 측면이 갖는 보존성을 인지하고, 이것이 교육과정, 교과서에 각각 변환된 양상을 파악하면서, 교사로서 교과내용지식으로 파악하고 있다.

자연수 개념 중 순서수적 측면에서 보면 순서수에는 관계의 개념이 포함되어 있다. 관계론적 견해는 자연수를 어떤 유형의 관계 영역에서 관계가 갖는 속성의 값으로 나타내는 것이다. 그러므로 개별 자연수는 관계에서 의미를 취한다. A 교사는 순서수가 갖는 관계론적 견해에 대하여 다음과 같이 말한다.

A : 수의 순서를 알아봄에 있어서는 여러 가지 방법으로 늘어시키고, 하는 활동을 할 수 있겠지요. 여기서는 수개념도 문제가 되겠고, 규칙을 정해서 순서화시키는 것이 중요한 작업의 하나가 되겠지요. 그 규칙에 따라 수의 순서를 매기는 것이 중요하겠지요. 앞에서부터인 1부터든, 뒤인 5부터든 순서를 매겨서, 수의 다양한 관계를 보는 것이지요.

A : 그 다음은 순서수로 9까지이니까 앞의 5가지와 유사한 방법으로 이루어지겠지요. 29쪽 활동 3은 1부터 서느냐, 9부터 서느냐에 대한, 즉 시작하는 점을 교사가 제시해야 한다고 봐요. 꼭 1부터만 첫째가 되는 것은 아니거든요. 9에서 1로 설 수도 있는 것이지요. 수의 순서를 할 때는 기준을 중심으로 하는 것이기 때문에 시작점, 기준점을 반드시 제시해야 한다고 봐요.……

A 교사는 ‘수의 순서를 알아봄에 있어서 여러 가지 방법으로 순서를 정할 수 있고 이것에 수 개념에 연결된다’, ‘규칙을 정해 순서화 시키는 것이 중요하다’, ‘규칙에 따라 수의 순서를 매기는 것이 중요하다’, ‘순서를 매겨 수의 다양한 관계를 본다’, ‘수의 순서를 정할 때는 기준을 제시해야 한다’는 등의 순서수에 대한 교과내용지식적 견해를 제시한다.

A 교사는 순서수의 관계론적 속성을 간파하고 집합 내에서 다양한 관계를 찾아볼 수 있도록 해야 함을 알고 있는 것이다. 수의 순서는 여러 가지 방법으로 규칙을 정하여 늘어놓아 보아야 하며 꼭 1부터 수를 배열해 보는 것이 아니라 시작점을 다양하게 정하여 수를 늘어놓아 보아야 순서수적 측면의 관계론적 속성을 다양하게 파악할 수 있게 된다는 것이다.

자연수의 측정수적 측면은 측정된 단위들이 얼마나 반복되었는가 또는 얼마나 많은 단위들로 이루어졌는가 하는 것의 의미이다. 측정 활동은 측정하고자 하는 전체 양을 단위로 분해한 다음, 그 단위의 반복을 통하여 전체 양을 다시 재구성하는 활동이다. 측정을 통해 알게 되는 수는 전체량과 단위량 사이의 상대적인 관계, 즉 비(ratio)이다. 수는 측정 단위와 함께 나타내면 측정된 양의 절대적인 크기를 나타내지만, 수 그 자체는 전체량과 단위량이라는 두 양 사이의 상대적인 관계를 나타내는 것이다. 다음의 A 교사의 견해를 보자.

A : 음. 모두 수와 연관되지요. 기하도 그렇고, 그 중 측정은 수개념과 보다 밀접하다고 봐요. 수개념이 시작하려면 분류하고 분류된 것을 서열화시키는 것이 기본으로 연결되어야 하는데, 측정에는 그러한 활동이 포함되죠. 또, 일부에서는 수 자체가 측정으로부터 시작되었다고 보기도 하지요. 교과서내에서의 길이비교, 높이비교가 자연수의 개념과 밀접한 측정 활동의 일부라고 볼 수 있지요. 측정이기는 하지만 길이를 수로 나타내어서 즉 양화시켜서 비교하는 것이 목적이니까요. 측정은 질적인 것을 양적인 것으로 표현하겠다는 의지이므로 수개념과 밀접하게 연관시켜볼 수 있지요.

A 교사는 ‘측정은 수개념과 밀접한 관계를 가지며’, ‘분류하고 분류된 것을 서열화 시키는 것에는 측정의 활동이 포함되며’, ‘수 자체를 측정으로부터 시작되었다는 보는 부류도 있으며’, ‘교과서내에서의 길이비교, 높이비교 활동은 자연수의 개념과 밀접한 측정 활동이며’, ‘질적인 것을 양적인 것으로 표현하겠다는 의지’라는 등의 측정수적 측면에 대한 교과내용지식적 견해를 밝힌다. A 교사는 측정은 수개념과 밀접하며, 수개념이 시작되려면 분류되고 분류된 것들을 서열화시키는 것이 기본으로 연결되어야 하는데 그러한 활동이 포함되는 것이 바로 측정이라고 한다. 또한 수 자체가 측정으로부터 시작되었다고 보는 견해도 알고 있다.

즉 자연수가 갖는 여러 입장인 셈수, 기수, 순서수, 측정수 등에 대한 교과내용지식을 현장교사들은 다양한 측면으로 갖추고 있음을 면담을 통하여 알 수 있다. 다음으로 교사가 갖고 있는 자연수 개념의 교육과정 지식에 대하여 살펴보려고 한다.

나. 자연수 개념에 대한 교사의 교육과정지식

교사별 면담 내용의 분석을 통하여 자연수 개념에 대한 교사의 교육과정지식을 살펴보았을 때, 그것에 대한 교사의 응답 여부는 다음과 같다.

<표 8> 자연수 개념의 교육과정지식에 대한 교사별 응답 여부

고찰 관점	자연수 개념의 교과내용지식	교사반응여부					
		A	B	C	D	E	F
교육과정에서 차지하는 위치	-1~4학년 사이	○	○	○		○	
대안적인 교육과정 자료	-셈수를 기초로 한 기수적 측면의 지도가 중심	○		○	○		
	-기수적 측면과 순서수적 측면의 적절한 균형 필요(정영옥, 2005)	○					
	-측정수적 측면으로 자연수 개념 지도 필요	○					
타교과에 대한 연구	-다른 교과와의 관련성 파악		○				

면담 내용에 대하여 자연수 개념의 교육과정지식에 대한 교사별 응답의 특징적인 부분을 살펴보자. 자연수 개념의 지도에 대한 교사 면담 과정에서 셈수적 측면과 관련된 교육과정지식으로는 다음과 같은 내용이 드러났다. 다음의 면담 내용은 <그림 4>의 교과서 부분을 보면서 교사와 면담한 내용이다.



<그림 4> 교사의 셈수적 측면의 교육과정지식을 알 수 있는 교과서 예1(교육과학기술부, 2009a, pp. 22~23)

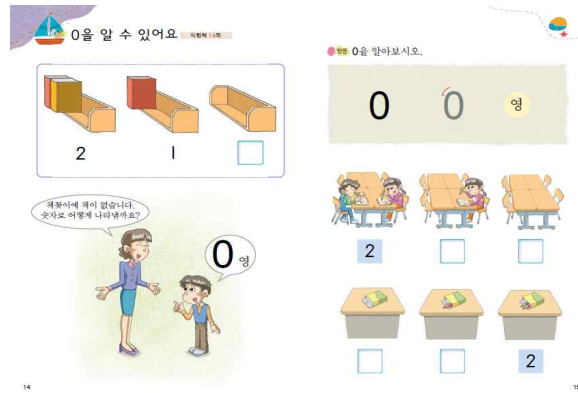
<그림 4>는 생활 장면에서 물건의 수 세기를 통해 6과 7의 의미를 알아보고 6과 7의 읽기, 쓰기를 할 수 있도록 하기 위한 과정이다(교육과학기술부, 2009h, pp. 120~121). 이 부분의 지도에 대하여 A 교사는 자연수 개념을 수 세기의 입장에서 생각하는 셈수적 측면에 대한 교육과정 지식으로 다음과 같은 견해를 피력한다.

A : …… 1학년이면 개수를 세는 정도는 K 단계3)에서 이미 이루어졌다고 봐요. 수에 대한 개념을 1학년에서는 느낌이 있게 여러 가지 방법으로 변형해 보는 것이 필요하다고 봐요. 일상에서의 수세기 수준에 머무르는 것은 1학

년으로서는 부족하지요. 수학 학문적 입장에서 수개념이 시작한다는 것으로 보면 매우 중요하지만 그것을 세어 보기, 수세기에 머물러서는 안 된다고 봐요.

즉 6, 7, 8, 9를 세어 봄으로서 인식하는 학습에서 A 교사는 해당 단원만을 가르치는 것이 아니라, 이 단원이 1학년 전 단계인 유치원 단계인 K단계(kindergarten 단계)에서 이미 이루어진 내용임을 알고 있고, 따라서 초등 1학년에서는 이를 ‘느낌이 있게 여러 가지 방법으로 변형해 보는 것이 필요하다’는 견해를 피력한다. 즉 전(前)학년의 교육과정을 숙지하고 이와의 관련성을 파악하고 있는 것이다.

A 교사가 말하는 ‘느낌이 있게 여러 가지 방법으로 변형해 보는 것’에는 교과서에 제시된 사물을 차례대로 하나, 둘, 셋, ………과 같이 세는 것 뿐만 아니라 거꾸로 셀 수도 있다. 또, 바둑알이 5개가 한 줄로 제시되어 있으므로 6의 경우는 5부터 6, 7의 경우는 5부터 6, 7로 1부터 세는 것 보다 간단하게 셀 수도 있다. 또한 둘씩 셀 수도 있고, 셋씩 셀 수도 있는 등 다양한 방법의 수세기를 도입할 수 있다는 것이다. 나아가 셈수적 측면에 대하여 초등학교를 넘어서 중학교 교육과정과의 관련성도 시도하는 교사도 있다. 다음의 교과서 내용을 보자.



<그림 5> 교사의 셈수적 측면의 교육과정지식을 알 수 있는 교과서 예2(교육과학기술부, 2009a, pp. 14~15)

<그림 5>는 전 차시에서 학습한 ‘하나 더 적은 것’을 바탕으로 ‘~이 없다.’는 0으로 나타낸다는 것을 학습한다. 그림에서 책이 한 권씩 없어지거나 학생이 한 명씩 줄어드는 상황에서 수를 세어보고 아무것도 없을 경우 수 0을 써서 나타내어 보도록 한다(교육과학기술부, 2009h, pp. 99~100). 이 부분에 대하여 F 교사는 다음과 같은 셈수적 측면에 대한 교육과정지식의 견해를 밝히고 있다.

자연수, 세기로 접근하려는 의도인데, 0의 개념도 다른 개념으로 접근할 수도 있겠지만, 중학교에서는 음수, 양수의 가운데 기준점에 있는 수.. 로 도입하기도 하겠지만..

위 차시는 0의 개념에 대하여 세기로 접근하려는 의도임을 A 교사는 파악하고 있다. 여기에서 머물지 않고 F 교사는 더 나아가 중학교에서는 0의 개념을 음수, 양수의 가운데 기준점에 있는 수로 도입한다는 것을 알고 있음을 면담에서 나타내고 있다. 이러한 견해는 A 교사 또한 동일하게 드러내고 있다. 동시에 초등수준에서의 0은 위와 같은 세기의 입장에서 도입한다고 하면서 셈수적 측면이 갖는 교육과정지식에 대한 견해를 밝힌다. 또한 교육과정 영역간의 관련성을 언급한 내용이 있다. 다음의 면담 내용을 살펴보자.

3) ‘K’ 단계는 Kindergarten, 즉 유치원 단계를 일컫는다.

A : 6단위에 비교하기는 수 영역에 넣기는 그렇지만, 측정 영역에 포함되지요.

연구자 : 측정 영역을 수개념과 연관시킬 있을까요?

A : 음.. 모두 수와 연관되지요. 기하도 그렇고, 그 중 측정은 수개념과 보다 밀접하다고 봐요. 수개념이 시작하려면 분류하고 분류된 것을 서열화시키는 것이 기본으로 연결되어야 하는데, 측정에는 그러한 활동이 포함되죠. 또, 일부에서는 수 자체가 측정으로부터 시작되었다고 보기도 하지요. 교과서내에서의 길이비교, 높이비교가 자연수의 개념과 밀접한 측정 활동의 일부라고 볼 수 있지요. 측정이기는 하지만 길이를 수로 나타내어서 즉 양화시켜서 비교하는 것이 목적이니까요. 측정은 질적인 것을 양적인 것으로 표현하겠다는 의지이므로 수개념과 밀접하게 연관시켜볼 수 있지요.

A 교사는 ‘수 자체가 측정으로부터 시작되었다고 보는 견해가 있다’, ‘자연수의 개념과 밀접한 측정 활동’ 등으로 수 영역과 측정 영역을 서로 관련시키는 교육과정 지식을 보인다. 즉 위의 면담 내용은 수 영역과 측정 영역을 서로 관련시켜 수 개념을 측정수적 측면으로 볼 수 있다는 교육과정지식을 알 수 있다.

다. 자연수 개념에 대한 교사의 교수학적 내용지식

교수학적 내용지식이란 가르치고자 하는 주제에 대하여 가장 많이 사용되는 유추, 묘사, 예, 설명 등의 방법을 사용하여 다른 사람이 이해할 수 있도록 만들어서 표상하고 형식화하는 지식이다. 최고의 표상 형태는 없으므로, 교사는 대안적인 참된 표상을 가까이에 갖고 있어야 한다. 이들 중 일부는 연구를 통하여 나온 것이고, 또 일부는 실제 경험에 의한 지혜에서 나온 것이 될 것이다(Shulman, 1986b). 교사별 면담 내용의 분석을 통하여 자연수 개념에 대한 교사의 교수학적 내용지식을 살펴보았을 때, 그것에 대한 교사의 응답 여부는 다음과 같다.

<표 9> 자연수 개념의 교수학적 내용지식에 대한 교사별 응답 여부

고찰관점	자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식	교사반응여부					
		A	B	C	D	E	F
셈수적 측면	-소박한 수세기(Freudenthal, 1983)	○	○	○	○		○
	-역사적, 언어학적, 심리발생적, 이론적으로 수학의 초석(Freudenthal, 1973)	○		○	○		
	-세는 대상은 같은 류의 것으로 간주하고, 그것들을 함께 취해 각각에 다른 명칭을 부여하여 세는 것(Freudenthal, 1983).	○		○	○		
	-수세기는 계산활동에 필수 : 자연수는 덧셈과 곱셈 연산이 있는 셈수의 집합(Skemp, 1987)	○					
기수적 측면	-집합론에서 개수는 기수로 형식화 됨, 집합의 수(Brainerd, 1979)	○		○	○	○	○
	-아무 조건 없이 수라고 할 때 보통 기수를 의미함(Brainerd, 1979)	○			○	○	
	-수세기의 결과가 사물의 개수, 즉 기수(Brainerd, 1979)	○		○	○	○	
	-수세기에 대하여 시간 경과, 시점 변화, 쉬기의 변형, 흩뜨리고 모으는 변환 등 여러 변환 하에서도 불변성을 자각하는, 곧 수세기에서 보존성을 갖는 개념이 기수 개념(Piaget, 1969)	○	○	○	○	○	○
순서수적 측면	-셈수가 Peano의 공리체계로 형식화된 것(김남희 외, 2006)	○					
	-집합론에서 보는 관계의 수 : 자연수를 어떤 유형의 관계 영역에 있는 속성가에 환원시키는 것(Brainerd, 1979)	○	○	○	○	○	○
	-순서짓기(Brainerd, 1979)	○	○	○	○		
	-수열의 관계수(Brainerd, 1979)	○	○	○	○		

측정수적 측면	-수는 정확한 측정, 정확한 평가에서부터 생겨나는 것(Dewey, 1972)	○					
	-사물을 변별하여 관계짓기를 한 결과(Dewey, 1972)	○					
	-수는 전체량과 단위량 간의 상대적인 관계를 나타낸 것(Dewey, 1972; Davydov, 1990; Minskaya, 1975)	○					
	-양의 조작 활동을 통하여 양 사이의 비로 자연수 개념 형성됨(Dewey, 1972; Davydov, 1990)	○					

면담 내용에 대하여 자연수 개념의 교수학적 내용지식에 대한 교사별 응답의 특징적인 부분을 살펴보자. 자연수 개념의 지도에 대한 면담 중 교수학적 내용지식과 관련하여서는 교과서 방식대로 지도, 교과서 내용 및 제시된 교구의 부적절성, 교과서 지도 방식 및 교구에 대한 대안 제시, 수 세기 지도에 대한 경험, 학생들은 셈수 보다는 순서수를 어려워한다, 교과 내용 지식과 교수학적 내용지식을 관련시켜 의의 찾기, 교과서에 제시된 교구의 장점 등의 내용이 있다. 이들은 모두 교수학적 내용지식으로 볼 수 있다. 면담 중 B 교사는 다음과 같이 말한다.

B : …… 수학 교과서는 대부분 잘 되어 있는 것으로 생각되어요. 교과서의 활동들도 그대로 따라하며 학생들이 수업 시간에 아주 재미있어 합니다. …

B 교사는 수학 ‘교과서의 활동들을 그대로 따라한다’는 견해를 보인다. 교과서에 제시된 방식대로 지도한다는 의견은 모든 교사가 한 번 이상 제시한다. 자연수 개념이 갖는 기수적 측면에 대하여 교사가 교수학적 내용지식으로 인식하고 있는 지식을 바탕으로 교사 스스로 대안적인 교구를 만들기도 한다. B 교사는 두 자리의 수 학습에 대하여 교사 스스로 단원 전체에 대한 내용을 인지하고 다음과 같은 대안적인 교구를 만들어 학생들이 자연수 체계에 익숙해 질 수 있도록 사용한다고 한다.



<그림 6> B 교사가 만든 대안적인 교구 사진

이 교구에 대하여 B 교사는 다음과 같이 언급한다.

B : …수 읽기를 반복적으로 지도하기 위해 저는 백판을 만들었어요. 수업시간에도 항상 사용합니다. 이것을 교실에 게시해 놓고, 아이들이 쉬는 시간에 놀이할 때도 하라고 하지요. 아이들에게 수 읽기가 더욱 익숙해 지도록요. 이 백판은 뛰어세기나 규칙찾기에도 매우 유용하답니다.

위와 같은 교수학적 내용지식은 학생들이 자연수 개념에 대하여 익숙해지도록 교사 스스로 새로운 교구를 만들어 수업에 활용하는 것이다. 그 교구는 교사가 명명하기를 ‘백판’이라는 것이다. 위의 <그림 6>과 같다. 이 교

구는 수업 시간에도 사용하고 교실에 항상 게시해 두어 아이들이 쉬는 시간에 놀이를 할 때도 사용하도록 하여 일상생활에서 백까지의 수가 익숙하게 받아들일 수 있게 된다. 자연수 개념의 기수적 측면에 대하여 교사가 갖고 있는 또 다른 교수학적 내용지식은 바로 교과서에 제시된 교수의 장점을 인지하고 있는 것이다. 다음의 <그림 7>을 보자.

자릿값을 알아보시오.

258에서

백의 자리	십의 자리	일의 자리
2	5	8

2는 백의 자리 숫자이고, 200을 나타냅니다.  
5는 십의 자리 숫자이고, 50을 나타냅니다.  
8은 일의 자리 숫자이고, 8을 나타냅니다.

빈 곳에 알맞은 수를 써넣으시오.

100이 8  
10이 3  
1이 6 이면

349는  100이  
 10이  
 1이

수 모형	백 모형	십 모형	일개 모형	수
	2			

<그림 7> 교사의 기수적 측면의 교수학적 내용지식을 알 수 있는 교과서 예3(교육과학기술부, 2009e, p. 11)

<그림 7>은 앞 차시에 세 자리 수 세기를 익힌 후 학습하는 내용이다. 세 자리 수의 기수법의 원리를 이해하고, 세 자리 수의 자리값, 자리의 숫자를 말할 수 있는 것이 학습 목표이다. 세 자리 수 기수법과 관련지어 명수법을 이해할 수 있도록 자리 수와 지릿값을 함께 읽도록 한다. 구체물을 수 모형으로 나타낸 후 10개씩 묶음 짓기의 원리를 활용하여 수 모형의 개수를 알아보는 활동을 하게 된다. 수 읽기에서는 단순히 수를 읽는 데에만 급급하지 않고 수를 읽으면서 자릿값 구성과 수의 크기를 생각하게 한다. 자릿값은 오른쪽부터 왼쪽으로 한 자리씩 옮겨 가며 차례로 일, 십, 백이 되며, 한 자리씩 나아갈 때마다 10배씩 커짐을 알게 한다(교육과학기술부, 2009j, pp. 86~87). F 교사는 위의 <그림 7>을 보면서 자리값을 알아보는 교구로 제시된 수카드가 매우 유용하다고 한다.

F : ...아주 효과적이었던 도구는 13쪽의 자리값을 알아보는 자리값을 나타내는 수카드예요. 258의 경우 백의 자리의 자리값은 2이고, 그 수의 값은 200임을 아이들이 잘 이해하더군요. 실제로 보이는 것은 2이지만, 그 뒤에 보이지 않는 0이 있음을 알 수 있으니까요. 하지만 이렇게 자리값을 나타내는 수카드 없이 지도를 했을 경우 2뒤에 0이 두 개 있어서 2의 실제 값은 200임을 이해하는 것을 어려워하지요.

F 교사에 따르면 자리값을 나타내는 수카드를 사용하면 십진기수법 258에서 백의 자리의 자리값은 2이고, 그 수는 200임을 쉽게 알 수 있게 된다. 자리값을 나타내는 수카드에는 보이지 않은 '0'이 제시되기 때문에 그러하다는 것이다. F 교사는 십진기수법의 위치적 수체계가 갖는 수학교육적 지식을 학생들이 학습하는데 유용한 교구로 교과서에 제시된 수카드를 매우 유용한 것으로 인지하고 있다.



자연수 개념의 지도에 대한 면담에서 순서수적 측면에 대한 내용 중 교수학적 내용지식과 관련한 특징 중 하나는 교과서 방식대로의 지도한다는 견해가 있다. 또한 다른 한 가지로는 교과서에 제시된 내용의 부적절성을 지적하고 대안적인 방법을 제시함으로써 순서수적 측면으로 변환된 교사의 교수학적 내용지식을 드러내기도 한다. 자연수 개념의 지도에 대한 면담에서 순서수적 측면에 대한 내용 중 교수학적 내용지식과 관련하여 교과서 방식대로의 지도한다는 견해를 먼저 살펴보자. 다음의 <그림 8>과 이에 대한 교사의 지도 방식에 대한 면담내용을 살펴보자.



<그림 8> 교사의 순서수적 측면의 교수학적 내용지식을 알 수 있는 교과서 예(교육과학기술부, 2009a, pp. 10~11)

<그림 8>은 앞 차시에서 학습한 5까지의 집합수를 바탕으로 5까지의 순서수를 학습한다. 본 차시를 통해 위치에 따른 수의 순서를 이해하도록 한다. 또한 5명이 한 모듬이 되어 주어진 상황에서 순서를 정하고 사물을 배열하는 활동을 통해 순서수를 사용할 수 있도록 한다(교육과학기술부, 2009h, pp. 95~96)는 것이 주요 학습 내용이다. 위의 <그림 8> 부분의 지도에 있어서 교과서에 제시된 방식대로 지도한다는 교수학적 내용지식의 견해가 있다. 다음과 같다.

B : 그렇게 서수의 용어에 대해서 정의를 하고 난 후 학생 다섯 명이 교실 앞으로 나오게 한 다음 한 줄로 세워놓고, 첫째, 둘째, 셋째, 넷째, 다섯째라는 기수적 용어를 다시 반복적으로 학습합니다. 그리고 나서 학생들에게 질문을 합니다. '첫째는 누구?'하면 학생들은 '민수!', '둘째는 누구?' 학생들은 답합니다. '영아'와 같아요. 여러 번 반복적으로 활동하고 난 후, 다른 형태의 질문을 합니다.

.....

B : '민수는 몇째?'하고 질문하면 학생들은 '첫째'라고 답하지요. 그리고, 첫째 학생 앉으세요, 둘째 학생 앉으세요..와 같이 첫째부터 다섯째까지의 서수를 반복적으로 사용하여 여러 가지 활동을 합니다.

즉 순서수가 갖는 의미를 교과서에 제시된 활동을 통하여 위와 같이 익힌다는 것이다. 자연수의 순서수적 측면이 갖는 개념을 교과서에 제시된 활동을 통하여 학습하게 한다는 의미이다. 이렇게 교과서에 제시된 순서대로 순서수적 측면을 가르친다는 견해와 반대로 다른 한 편으로는 교과서에 제시된 순서대로 가르치게 되면 학생들이 순서수적 측면을 기수적 측면과 혼돈하게 된다는 견해도 있다. 다음과 같다.

C : 첫째, 둘째, 셋째, 넷째, 다섯째라고 주어진 상황에서 '셋째에 색칠을 해보자'라는 상황에서 셋째에만 색칠하지 않고, 첫째, 둘째, 셋째 모두에 색칠을 해요.

D : ...의힘책에 동그라미 다섯 개를 놓고, '셋째에 동그라미치세요.' 라는 문제에 셋째에만 동그라미 치지 못하고 세



<표 5>에서 알 수 있듯이 자연수 개념에 대한 교사의 교수학적 내용지식에 포함된 요소의 98.8%는 교사 개인 요소이다. 즉 교사 개인의 자연수 개념에 대한 경험, 자연수 개념에 대한 지식, 자연수 개념에 대한 신념, 인성 등이 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식에 포함된 것이다. 반면 자연수 개념에 대한 교사의 교수학적 내용지식에 포함된 요소 중 사회문화요소가 차지하는 비율은 0.9%와 0.3%로 총 1.2%이다. 문화적·교육적 기준이나 교육과정 개발 및 운영, 교사 교육, 전문적 모델과 교사 공동체가 교사의 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식에 포함된 정도는 미비하다.

#### 가. 교사 요소

자연수 개념에 대한 교사의 교수학적 내용지식에 포함된 요소는 교사 개인 요소와 사회문화요소가 있다. 이중 교사 개인 요소에 대하여 상세히 살펴보고자 한다. 교사 개인 요소로는 교사의 경험, 지식, 인성, 신념 등이 있다(방정숙, 2002).

##### 1) 경험

교사 요소의 네 항목 중 가장 많이 포함된 요소는 경험 요소로 평균 44.2%이다. 여기에는 학생으로서 경험했던 수학 학습, 수학에 관한 흥미, 개인적으로 의미 있다고 생각되는 교수 모델, 이전의 교수 경험 등이 포함된다(방정숙, 2002). C 교사는 자연수 개념에 대하여 학생으로서 경험했던 수학 학습 내용으로 다음의 의견을 밝힌다.

C : 1등, 첫째, 둘째, 셋째.. 아이들도 말을 하지요. 이 학생은 둘째, 이 학생은 셋째 이렇게요. 진 초등학교 때도 그 의미가 다름을 알았을 거 같은데요.

자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식 중 일부에 교사 자신이 학생으로서 경험했던 내용이 포함된다고 밝힌다. 물론 C 교사의 추측이기는 하나 ‘초등학교 때도 그 의미가 다름을 알았을 거 같다’는 말은 기수와 순서수가 다름에 대하여 학생 시절부터 그 의미에 차이가 있음을 알고 있었다고 생각하는 것이다. 교사의 특히 초등 교사의 수학 수업에서 교구는 빠질 수 없는 요소이다. 면담에 참여한 교사들 모두 자연수 개념과 관련한 교구에 대하여는 적극적인 관심을 보이며 의견을 낸다. 그중 교사 개인적으로 의미가 있다고 생각되는 교수 모델에 대한 의견을 살펴보자.

A : 1학년에서는 수타일이 괜찮겠어요.

B : 바둑돌로 합니다. 저는 교과서의 많은 활동들을 바둑돌로 지도합니다. 아주 유용한 구체물이더라고요.

C : ..... 저는 아이들에게 세는 활동을 반복적으로 시키요. 1에서부터 10까지 세고, 거꾸로도 세어보고.....

D : .....제가 수업할 때는 색연필 5자루와 연필 4자루를 놓고 각각의 짝을 맞춰봅니다. 대응해 보는 것이지요. 한 자루씩, 또는 색종이와 색연필을 놓고, 하나씩 올려놓고, 대응시켜 봅니다. 하나씩 대응시켜보았을 때 남아 있는 것이 더 큰 수가 되지요.

수타일을 자연수 개념 이해에 사용하겠다는 A 교사의 견해와, 교과서의 많은 활동들에서 사용되는 교구로 다양한 구체물·반구체물이 사용되지만 바둑돌을 매우 유용하게 사용하고 있다는 B 교사의 견해 등이 있다. 또한 교사가 독창적으로 사용하는 수업 모델로 C 교사는 ‘1부터 10까지 세고, 거꾸로 세고 하는 등의 활동을 반복적으로 시킨다’는 견해와 교과서에 제시된 자료 이외에 연필과 색연필을 짝으로 색종이와 색연필을 짝으로 대응시키는 등의 새로운 교구를 사용한다는 C 교사의 견해 등이 있다. 즉 수타일이나 바둑돌, 수업 시간에 사용하는 다양한 활동들 등 교사가 개인적으로 의미있다고 생각되는 교구에 대한 다양한 견해가 나타난다. 또한 교사의 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식에 이전의 교수 경험이 포함되었다는 내용도 있다.

- D : ……처음에 수라고 하기 보다는 학생들의 상황에 친숙하게 여러 가지를 몇인지 세어보는 활동을 많이 하였습니다. 이 방법 말고, 또 다양한 세기 활동을 하기 위해 칠판에 다양한 대상을 제시하고 세어보게도 합니다.
- F : 네. 그리고 10개씩 여섯 묶음을 60이라고 한다는 부분에 대해서도 아이들이 많은 혼돈이 있었어요. 6묶음이 60이라는 부분이 이해하기 어려운 부분이라구요.
- A : ……가장 유용한 소재는 돈이지요. 그런데 돈의 문제는 수감각을 보여주기 어렵지요. 저의 경우는 수모형을 보여주고, 아이들은 돈을 가지고 활동하고, 수학적 표현이나 의미를 찾아보곤 하지요.

교사로서 이전의 교수 경험은 현재의 수업에 많이 포함된다는 것은 당연한 사실이다. D 교사처럼 학생들의 상황에 친숙하게 여러 가지를 몇인지 세어 보는 활동을 했던 경험, F 교사의 묶음에 대한 수업에서 학생들이 십진기수법의 자리값에 대한 혼돈의 경험, A 교사가 자연수 개념의 수업에서 교과서에 제시된 소재인 '돈'이 갖는 문제점 등 과거 자연수 개념에 대한 수업에서 얻은 경험이 현재 교사가 갖는 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식에 포함된다.

자연수 개념에 대한 교사의 교수학적 내용지식에 포함된 요소로 교사가 학생으로서 경험했던 수학 학습, 수학에 관하여 갖고 있는 흥미, 교사가 개인적으로 의미있다고 생각되는 자연수 개념에 대한 교수 모델, 자연수 개념에 대한 이전의 교수 경험 등이 있음이 면담 결과 드러난다.

## 2) 지식

교사의 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식에 포함된 지식 요소로는 수학 지식이나 수학교육 지식, 교육과 관련된 일반 지식 등의 지식 요소(방정숙, 2002)를 들 수 있다. 현장 교사와의 면담 자료를 분석해 본 결과 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식에 포함된 지식 요소는 약 18.7%였다. 먼저 자연수 개념이 갖고 있는 수학 지식이 교사의 교수학적 내용지식에 포함된 상황을 알아보자.

- A : 제6차 교육과정까지는 수의 순서라고 하지 않고 수의 계열이라고 했어요. 7차(교육과정)에서 수의 순서라고 하게 되었어요. 계열이라고 하는 것은 여러 가지 계열이 있지요. 홀수도 수의 계열이고, 짝수도 계열이지요. 수의 순서는 자연수로 가는 순서를 생각하니까, 순서는 큰 수와 작은 수가 앞뒤로 놓여 있는 거지, 자연수는 순서를 말하지 않을 수도 있다는 면에서 순서라는 개념을 보다 넓게 보는 것이지요. 수의 순서가 정해지면 크기를 비교할 수 있게 되지요. 반면 순서수라는 것은 수세기를 할 때 도입하기는 하지만 첫째, 둘째, 셋째, ... 라고 하는 보통 순서수라고 지칭하는 그것은 순서 개념 중 초보적이고 기본적인 것으로 볼 수 있는 것이 아닐까 생각합니다.
- C : 여기 앞 차시에 한 집합의 개수를 말하는 것이 집합수이고, 지금 하는 순서를 나타내는 수는 순서수가 되는 것이지요.
- E : 그리고 순서수 지도가 나오지요. 앞은 집합수이고요. 집합수는 특정 그룹의 원소의 개수를 일컫는 거고, 순서수는 그것과는 의미는 다르지요.

교사의 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식에 포함된 요소로 교사가 가지고 있는 수학교육 관련 지식이 있다. 이 지식에는 수학 지식이나 수학교육 지식, 교육과 관련된 일반 지식 등이 포함된다. 위의 면담 내용 중 A 교사의 경우 순서수에 대한 수학적 의미인 계열성과 관계성에 대한 지식을 말하면서 자연수 개념 형성에 대한 의견을 낸다. C, E 교사의 경우 집합수와 순서수를 각각 구분하는 수학 지식적 의견을 낸다. 위와 같은 면담 내용에서 볼 때 교사는 자연수 개념에 대하여 집합수적 의미, 순서수적 의미, 그 관계에 대하여 매우 높은 수준의 수학 지식적 견해를 밝히고 있는 것을 알 수 있다. 뿐만 아니라 자연수 개념의 수학교육적 내용 지식에 대하여 심도 있는 의견도 있다.

- C : 그러니까, 교과서에 제시된 몇 가지 활동만으로는 학생들에게 순서수적 개념이 충분히 이해되지 못한다고 생각해요. 순서수적 측면을 말하는 여러 가지 상황을 아주 많이 학생들과 함께 활동 해야만 이해하게 되더라고요.

몇 가지 활동, 즉 달리기를 할 때 1등한 학생이 첫째다, 2등한 학생이 둘째다라고 해도 여전히 잘 못하더라고요.  
E : 구체물인 동물에서 바둑돌인 반구체물로 그리고 수로 추상화되도록 지도합니다.

교사의 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식에 수학교육적 내용지식도 상당한 정도 포함된다. C교사의 경우 순서수적 개념을 이해하려는 데는 교과서에 제시된 몇 가지 활동만으로는 충분하지 못하며 추가적인 활동이 있어야 가능하다는 교수학적 내용지식의 견해를 밝힌다. 또한 E교사의 경우는 수개념을 형성하기 위한 교수 방법 중 하나인 구체물→반구체물→추상화된 수 단계로 지도한다는 수학교육적 지식을 밝힌다. 자연수 개념의 교수학적 내용지식에 포함된 요소 중 수학 학습에서 연습의 중요성에 대한 견해도 있다.

D : 습관적으로 말이 나오게 해야지요. 연습도 학습 과정에서 중요한 과정이라 생각해요.

수학적 이해를 해당 개념에 대한 이해를 중요시 한 관계적 이해와 연습을 중요시 한 도구적 이해로 보고, 도구적 이해 보다 관계적 이해를 중시하라는 견해(Skemp, 1976)가 있다. 하지만 수학의 학습에 있어서 연습에 초점을 두는 도구적 이해도 결코 소홀히 될 수 없는 부분임을 D교사의 견해로부터 알 수 있다.

### 3) 신념

본 연구에서의 면담 내용 분석 결과 교사의 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식에 포함된 교사 개인 요소 중 신념 요소는 8.7%이다. 지식은 일정한 준거에 맞아야 하는 것이라면 신념은 경험으로부터 구성된 개인의 규칙들이다(Pajares, 1992). McLeod(1992)는 수학교육에서 신념 연구를 네 가지로 범주화 하였는데 예를 들자면 ‘수학은 규칙에 기초를 두고 있다, 나는 문제를 풀 수 있다, 가르치는 것은 말하는 것이다, 학습은 경쟁이다’와 같은 것이 그것이다. 본 연구의 면담 과정에서 드러난 교사의 신념 관련 내용은 다음과 같다.

A : …… 수에 대한 개념을 1학년에서는 느낌이 있게 여러 가지 방법으로 변형해 보는 것이 필요하다고 봐요. 일상에서 수세기 수준에서 머무르는 것은 1학년으로서는 부족하지요. 수학 학문적 입장에서 수개념이 시작되는 것으로 보면 매우 중요하지만 그것을 세어보기, 수세기에 머물러서는 안된다고 봐요.

A 교사는 수 세기를 통해 수개념을 익히는 교과서 부분에 대하여 수학 및 수학교육적 신념을 강력하게 제시한다. 1학년의 교육과정에서 해야 할 자연수 개념에 대한 신념을 드러내는데 ‘1학년에서는 수 세기 수준에서 머무르는 것이 아니고 다른 측면도 함께 보아야 한다’는 신념을 피력한다. A 교사의 이러한 수학적·수학교육적 신념은 기존에 갖고 있던 경험, 지식 등과 총체적으로 연결된 것으로도 볼 수 있다. 교사의 신념과 관련하여 E교사는 다음과 같은 의견을 드러내기도 한다.

E : 네. 좋아요. 가장 먼저 <1-가>의 1단원 5까지의 수는요. 1, 2, 3, 4, 5는 아이들에게 가장 익숙한 수이기도 하고 숫자이기도 해요. 저는 아이들에게 1을 하나라고 읽기도 하고 일이라고 읽기도 하는데, 왜 그럴까.. 하고, 개미 하나도 1이고, 코끼리 하나도 1인데, 왜 그럴까.. 라는 측면에서 아이들에게 많은 생각을 하게 할거예요. 물론 숫자 쓰기도 바르게 쓰기에 초점을 두고 가르칠거예요.

E교사의 경우 수학책에 제시된 활동을 그대로 수업에 적용하는 것 보다는 ‘……왜 그럴까 라는 측면에서 아이들에게 많은 생각을 하게 한다’는 견해를 낸다. E 교사의 이러한 견해는 아이들과 교사에게 익숙하게 생각되는 수/숫자를 수동적으로 받아들이는 것이 아니라 그것의 발생을 생각해 볼 수 있는 기회를 제시하는 것이 수학 학습에서 중요하다는 E 교사의 신념에 의한 것으로 생각된다.

## 4) 인성

교사의 교수학적 내용지식에 포함된 요소 중 네 번째는 인성 요소이다. 인성 요소의 상세 항목으로는 자율성, 도전정신, 학생들의 경험과 이해에 관한 민감성, 전문성을 들 수 있다(방정숙, 2002). 본 연구의 면담 자료 분석에 의하면 인성 요소가 교사의 교수학적 내용지식에 포함된 정도는 27.2%로 경험 요소 다음으로 둘째로 많은 비중을 차지하는 것으로 나타난다. 다음의 A 교사의 면담을 보자.

A : 30, 31쪽 두 수의 크기를 비교하기예요. 사물의 개수를 보고, 수의 크기 비교하는 것인데, 1:1 대응으로 비교하는 것이네요. 수의 크기를 개수량 매칭시켜야하는데, (교과서 31쪽)나비와 꽃을 비교하는 것인데, 나비는 개수는 작아도 나비가 꽃보다 크기가 훨씬 크~~죠. 그런 것에 대해서 아이들이 혼돈한다면, 수의 보존성이 없다..라고 말할 수도 있지만, 어른인 내가 보기에든 거대한 것 하나와 작은 것 여러 가지와 크기 비교에서 느낌이.. 받아들이기 어렵지요. 사물의 개수와 수의 크기 비교가 저절로 가는 것 같지만 보존성이라고 하는 것도 마음으로는 쉽지 않지요. 느낌으로는 와 닿지 않는데, 수로는 받아들여야 하는 것. 그래서 수학이 어려운 거 같아요.

A교사는 자연수의 크기 비교에 있어서 ‘사물의 개수와 수의 크기 비교가 저절로 가는 것 같지만 보존성이라고 하는 것도 마음으로는 쉽지 않지요. 느낌으로는 와 닿지 않는데 수로는 받아들여야 하는 것, 그래서 수학이 어려운 거 같아요.’라고 언급하면서 자연수의 보존성에 대하여 학생들이 어려워하는 것을 민감하게 이해하고 있다.

교과서에 제시된 삽화로 나비의 개수와 꽃의 개수를 비교하여 두 수의 크기를 비교함에 있어서 삽화 상으로는 나비가 꽃보다 크게 제시되어 있다. 구체물을 추상화된 수로 받아들여 수의 크기 비교를 함에 있어서 구체물의 크기라는 요소를 배제한다는 것은 쉽지 않은 과정이다. 이러한 과정에 대하여 A교사는 민감하게 받아들이고 있는 것이다. B교사의 면담 내용은 다음과 같다.

B : 이 부분은 주로 학교 생활에서 더 많이 익히려고 해요. 체육관을 갈 때, 운동장을 갈 때 등등 아이들이 한 줄로 서서 가는 경우, 출발하기 전에 항상 몇제, 몇제, 하고 한번씩 쭉~ 순서수를 말해보게 하고 출발해요.

B교사의 경우 순서수적 측면의 학습에 있어서 교과서에 제시된 활동 외에도 학교 생활 속에서 순서수적 측면을 익히게 한다고 한다. 즉 수학 교과서 내에서의 활동만으로는 순서수적 내용에 대한 이해가 부족하므로 생활 속에서 익숙하게 하기 위한 교사의 교수 방법, 즉 교수학적 내용지식인 것이다. B교사의 이러한 교수학적 내용지식에는 학생들의 경험과 이해에 관한 민감성과 동시에 교사의 교수 방법에서의 자율성이 포함되는 것으로 볼 수 있다. C교사, E교사의 경우도 인성 요소로 학생들의 경험과 이해에 민감성이나 전문성을 드러내는 면담 내용이 있다.

C : 그렇게 말할 수는 없죠. 오류를 범하다가도 아.. 내가 이래서 틀렸었지, 하고 바르게 이해하기도 하고, 다시 또 오류를 범하기도 하고, 학생 별로 다릅니다.

C교사의 경우 학생의 경험과 이해에 관하여 민감하게 받아들이고 있음이 명백히 드러난다. ‘오류를 범하다가도 내가 이래서 틀렸었지 하고 바르게 이해하기도 하고, 다시 또 오류를 범하기도 하고, 학생별로 다르다’는 의견을 제시하는 것이 바로 그것이다.

E : 그리고 0을 알아봅시다예요. 초등에서 0을 지도하는 것이 어렵다고 생각해요. 중등에서는 정수에서 0이 기준이 되는데.... 초등에서 0은 어떻게 표현할까요. 그리고 교과서 16쪽 그림도.... 2개 있고, 1개 있고, 아무것도 없는 것을 어떻게 나타낼까요? 인데.. 아무것도 없는 것을 어떻게 나타내요. 표현할 수 없지요. 보이지 않는데, 그 보이지 않는 것을 표현하는 추상적인 문자가 0이라고 생각해요. 0은 대응될 수 있는 것이 없으니까요. 0을 아이들에게 어떻게 이해시켜주어야 할까요. 그것이 교사의 몫이라고 생각해요.

E 교사의 경우 0의 개념 이해에 대하여 초등과 중등이 다름에 대하여 전문성을 가지고 명백하게 이해하고 있으며, 이에 대하여 초등 교사는 초등의 교수학적 내용지식을 숙지하고 있어야 한다는 내용을 밝히고 있다. E 교사가 이러한 견해에는 E 교사의 수학 및 수학교육에 대한 전문성과 학생들의 경험과 이해에 관한 민감성 요소가 포함된 것으로 볼 수 있다.

자연수 개념에 대하여 교사의 교수 방법, 교수학적 내용지식에 포함되는 요소는 교사 요소와 사회문화요소(방정숙, 2002)가 있다. 본 연구의 면담 내용에 대하여 각 요소들이 포함된 정도를 분석해 본 결과 <표 7>처럼 교사 개인 요소는 98.8%, 사회문화요소는 1.2%인 것으로 드러났다. 위에서는 면담 내용을 바탕으로 자연수 개념에 대한 교사의 교수 방법, 교수학적 내용지식에 포함된 요소 중 교사 개인 요소를 경험, 지식, 신념, 인성의 측면으로 구분(방정숙, 2002)하여 면담 내용을 상세히 살펴보았다. 자연수 개념에 대한 교사의 교수학적 내용지식에 포함된 요소 중 중 사회문화요소가 차지하는 비율은 1.2%에 그쳤다. 문화적·교육적 기준이나 교육과정 개발 및 운영, 교사 교육, 전문적 모델과 교사 공동체가 교사의 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식에 포함된 정도가 매우 약하다고 볼 수 있다.

#### 나. 사회·문화 요소

본 연구의 면담 자료를 분석하여 교사의 자연수 개념의 교수학적 내용지식에 포함된 요소 중 교사 개인 요소에 대하여는 앞 절에서 살펴보았다. 본 절에서는 면담 자료에 대하여 사회문화적 특성과 관련된 요소를 분석해보겠다.

사회문화적 요소로는 문화적·교육적 기준, 교육과정 개발 및 운영, 교사 교육에 대한 것, 전문적 모델과 교사 공동체 요소를 들 수 있다. 문화적·교육적 기준에 대한 것으로는 그 사회 및 문화에서 대표 또는 모범이 되는 교수 방법에 대한 통념, 가르친 결과에 대한 교육적 기대, 해당 사회에서 인지되는 교육적 가치 등이 해당된다. 교육과정 개발 및 운영에 대한 것으로는 그 사회 및 문화에서 행해지는 교육과정 개발의 구조 양상, 교육과정 개발시 교사의 참여 정도, 교육과정 운영을 위한 행정적 지시 및 교사의 순응 정도를 들 수 있다. 교사 교육에 대한 것으로는 그 사회 및 문화에서 행해지는 예비 교사를 위한 교사교육 프로그램이나 교사 재교육을 들 수 있다. 마지막으로 전문적 모델과 교사 공동체 요소로는 그 사회나 문화에서 통용되는 이용 가능한 대안적인 교수 모델 및 교사 공동체에 관한 친밀도와 동일화를 들 수 있다(방정숙, 2002).

인급하였다시피 면담 내용을 분석한 결과 자연수 개념에 대한 교사의 교수학적 내용지식에 포함된 사회문화 요소는 1.2%로 매우 미약하다. 다음은 A 교사의 면담 내용이다.

A : 그 다음은 순서수로 9까지이니까 앞의 5까지와 유사한 방법으로 이루어지겠지요. 활동 3은 1부터 서느냐, 9부터 서느냐에 대한, 즉 시작하는 점을 교사가 제시해야 한다고 봐요. 꼭 1부터만 첫째가 되는 것은 아니거든요. 9를 기준으로 9가 1로 설 수도 있는 것이지요. 수의 순서를 말할 때는 기준을 중심으로 하는 것이기 때문에 시작점, 기준점을 반드시 제시해야 한다고 봐요. 일상에서는 항상 1부터 서는데, 모든 것의 기준점을 1부터 하는데.. 암묵적으로.. 그렇게 반복된 활동을 통하여 아이들이 1등만 좋아하게 되기도 하는 것이지요. 9등은 9등 대로의 가치가 있는데도 말이지요. 수학 시간에 수학만을 가르치는 것은 아니지요. 세상에 대한 자세도 알게 하는 것, 교육의 총괄적인 의미 아닐까요.

A 교사는 교과서의 순서수적 측면에 대한 지도 부분에 대하여 우리 사회에서 인지되는 교육의 가치를 비판적 입장에서 함께 말한다. 꼭 1부터만 첫째가 되는 것은 아니다. 9를 기준으로 9가 1로 설 수도 있는 것이다. 수의 순서를 말할 때는 기준을 중심으로 하는 것이기에 시작점 즉 기준점을 제시해야 한다는 견해를 피력한다. 동시에 일상에서는 항상 1부터 시작하고 특히 우리 사회에서 1등을 좋아하는 1등을 향한 초점에 대하여 약간의 비판적 견해를 드러낸다. 꼭 1등만이 좋은 것은 아니며 9등도 9등대로 충분히 가치가 있는 것임을 수학 학습에서

도 항상 교사가 주지하고 있어야 함을 주장한다. 특히나 A 교사의 언급 중 ‘수학 시간에 수학만 가르치는 것은 아니다. 세상에 대한 자세도 알게 하는 것이야 말로 교육의 총괄적 의미로 생각된다.’는 말은 교사로서 많은 것을 생각하게 하는 견해이다. 이와 같은 부분이 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식에 문화적 교육적 규준이 포함된 것으로 볼 수 있는 것이다.

면담 과정 중에 사용 가능한 또는 대안적인 교수(교구) 모델에 대한 제안도 있다. 다음은 A 교사의 면담 내용이다.

A : 꽃감보다는 달걀판 5개, 5개짜리. 달걀판이 차라리 낫죠. 구하기도 쉽고, 여기서 10은 9보다 1 큰 수로 도입하지요. 0은 1작은수, 10은 9보다 1 큰 수로.. 도입하지요. 0과 10도 모두 수의 순서로.

A 교사의 면담 내용은 교과서에 제시된 자연수 개념의 기수적 측면 학습의 교구인 ‘꽃감’이 구하기 불편한 교구이므로 주변에서 쉽게 구할 수 있는 달걀판이 대안적인 교구가 될 수 있음을 제안한다. 이는 이용 가능한 또는 대안적인 교수(교구) 모델이 교사의 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식에 포함된 것이라 볼 수 있다. 한편 교육과정에 대한 교사의 순응 정도가 교사의 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식에 포함기도 한다. 다음은 C 교사의 면담 내용이다.

C : 지도서는 지도서를 쓰는 교수님의 의도가 많이 들어가겠지요, 지도서에 1단원의 ‘5까지의 수’의 지도에서 단위를 넣어서 세지 않도록 하고 ‘하나, 둘, 셋’으로만 세게 하는 것은 수, 숫자를 익히는데 중점을 두라는 의미 같아요. 1, 2, 3, 4, 5를 알아보려고 하면, 일, 이, 삼, 사, 오 또는 하나, 둘, 셋, 넷, 다섯으로 세어보면서 수 및 숫자 자체를 익히는 것이 먼저이니까요.

C 교사의 경우 교사용 지도에서 연필 3자루, 지우개 3개, 색종이 5장 등에 대하여 모두 단위를 언급하지 않고 하나, 둘, 셋으로만 세게 하는 것에 대하여 그 수학교육적 의미를 파악하고 있다. 보통의 현장 교사라면 아이들도 알고 있는 단위를 언급하지 못하게 하는데 대해 의문을 갖기 마련이다. 하지만 C 교사의 경우 교사용 지도서에는 교과서 및 지도서를 집필하는 교수나 전문가의 의도가 많이 들어가는 것을 익히 알고 있으며 단위를 언급하지 않게 하는 이유(수/숫자 자체를 익히기 위함)까지도 간파한 것이다. 즉 C 교사의 자연수 개념에 대한 이러한 교수학적 내용지식에는 교육과정 운영을 위한 행정적 지식 및 교사의 순응 정도가 포함된 것이다.

수학 교사의 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식에 포함된 요소로 교사 개인의 특성과 관련된 요소와 교사가 속한 사회문화적 특성과 관련된 요소(방정숙, 2002)로 나누어 살펴보았다. 교사 면담 내용 전체를 분석해 보았을 때 교사 개인 요소는 98.8%, 사회문화요소는 1.2%가 포함된 것으로 나타났다. 사회문화요소가 교사의 자연수 개념의 교수학적 내용지식에 포함된 정도가 매우 적은 이유는 다음과 같이 생각할 수 있다. 사회문화요소의 하위 항목으로 문화적·교육적 규준, 교육과정 개발 및 운영, 교사교육, 전문적 모델과 교사공동체 등이 있다(방정숙, 2002).

본 연구는 현장 교사 6명을 대상으로 교과서와 교사용 지도서를 보면서 현장에서 자연수 개념을 지도하는 방법에 대한 개방형 면담 자료에 대한 분석이다. 교사가 자연수 개념에 대한 지도시 문화적 규준이나 교육과정 개발, 교사교육, 전문적 모델 등에 대하여는 수학교육을 전문적으로 심화 연구한 교사들이 언급할 수 있는 부분이다. 또한 면담 자체도 자연수 개념 지도 방법에 대한 것이므로 교사들이 평소에 생각하는 수학과 교육과정의 전반적인 것에 대한 사항이나 교사 연수에 대한 사항 등에 대하여는 굳이 언급할 필요를 느끼지 않았을 것이다. 이에 면담 내용의 대부분이 교사 개인 요소가 되었을 것으로 생각한다.



## V. 요약 및 결론

### 1. 요약

본 연구는 초등 교사의 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식을 알아보는 데 주 목적이 있다. 연구 문제 1은 자연수 개념에 대한 초등 교사의 교수학적 내용지식에 대하여 알아보고자 Shulman(1986b)이 교사가 갖추어야 할 지식의 세 가지로 구분한 교과내용지식, 교육과정지식, 교수학적 내용지식으로 구분하여 살펴보았다. 연구 문제 2에서는 자연수 개념에 대한 교사의 교수학적 내용지식에 포함된 요소를 방정숙(2002)이 구분한 개인 요소와 교사가 속한 사회 문화적 요소로 나누어 살펴보았다.

연구 방법은 초등 학교의 교사 경력이 7년 이상 된 교사 6명을 대상으로 면담을 하고 면담 자료를 전사한 것과, 현장 노트, 수업에 사용되는 자료 등을 분석하였다. 연구 문제 1의 연구 결과는 다음과 같다. 자연수 개념에 대하여 교사들은 하나씩 하나씩 세어서 수 개념을 형성해 나간다(Freudenthal, 1991)고 하는 썬수적 측면의 교과 내용지식을 면담을 통해 '교과서의 그림을 보며 하나씩 하나씩 모두 몇 개인지 세어보게 한다'고 밝히고 있다. 또한 기수의 보존성에 대한 교과내용지식도 '가르기와 모으기를 할 때 수의 보존성을 생각하고 한다'라고 이해하고 있음을 알게 되었다. 순서수가 갖는 관계론적 속성에 대하여도 '집합 내에서 다양한 관계를 찾아볼 수 있도록 지도해야 한다'는 의견을 드러낸다. 자연수를 측정할 단위들이 얼마나 반복되었는가의 입장에서 생각하는 측정수적 측면의 교과내용지식에 대하여는 '측정은 수개념과 밀접하며 수개념이 시작하려면 분류하고 분류된 것을 서열화시키는 것이 기본으로 연결되어야 한다'는 견해를 내기도 하였다. 즉 자연수가 갖는 여러 입장인 썬수, 기수, 순서수, 측정수 등에 대한 교과내용지식을 현장교사들은 갖추고 있음을 면담을 통하여 알게 되었다.

자연수 개념의 교육과정 지식에 대하여는 유치원 단계와의 연계성, 유치원 단계에서 가르치는 자연수와 초등 학교에서 가르치는 자연수의 차이점에 대한 의견, 0에 대한 지도에서 중학교 수준과 초등학교 수준에서의 교수의 차이점, 수 영역과 측정 영역을 넘나드는 수학과 교육과정 영역간의 관련성 등에 대하여 다양한 견해를 드러내었다.

교수학적 내용지식의 마지막 범주인 자연수 개념의 교수학적 내용지식에 대하여는 교과서에 제시된 방식대로 지도한다는 의견, 19쪽 <그림 8>의 '하나부터 백까지'라는 새로운 교구를 만들어 수업에 사용한다는 의견, 교과서에 제시된 교구의 장점에 대한 의견 등 다양한 의견을 제시하였다. 특히 면담 내용을 교사의 교수학적 내용지식의 세 범주인 교과내용지식, 교육과정지식, 교수학적 내용지식으로 분석해 본 결과 교수학적 내용지식에 대한 면담 내용이 72.7%로 면담의 많은 부분을 차지하는 것으로 드러났다.

연구 문제 2의 연구 결과는 다음과 같다. 자연수 개념에 대한 교사의 교수학적 내용지식에 포함된 요소를 교사 개인 요소와 사회문화 요소로 구분(방정숙, 2002)하여 분석하였다. 그 결과 98.8%는 교사 개인 요소, 사회문화 요소는 1.2%가 포함되는 것으로 나타났다. 교사의 교수학적 내용지식에 포함된 교사 개인 요소에 대한 것으로는 교사가 자연수 개념에 대하여 학습한 경험, 개인적으로 의미있다고 생각되는 교수 모델, 이전의 교수 경험 등에 대한 의견이 있었다. 또한 교사가 연구한 수학과 관련 지식, 수학교육 관련 지식, 교육과 관련된 일반 지식도 있었다. 자연수 개념에 대하여 교수할 때 교사가 갖는 신념 또한 교사의 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식에 포함되는 것으로 드러났으며, 학생들의 학습이나 경험, 이해에 관한 민감성, 교사의 교수 방법에서의 자율성 등도 포함되었다.

교사의 자연수 개념의 교수학적 내용지식에 포함된 요소 중 사회문화 요소는 면담 분석 결과 그 정도가 1.2%로 미약하지만, 사회에 대한 문화적·교육적 규준, 대안적인 교구에 대한 제안, 교육과정 운영에 대한 교사의 순응 정도 등이 포함되는 것으로 드러났다. 사회문화요소가 교사의 자연수 개념의 교수학적 내용지식에 포함된 정

도가 낮게 나온 이유는 다음과 같이 생각할 수 있다. 사회문화요소의 하위 항목으로 문화적·교육적 기준, 교육과정 개발 및 운영, 교사교육, 전문적 모델과 교사공동체 등이 있다. 본 연구는 현장 교사 6명을 대상으로 교과서와 교사용 지도서를 보면서 현장에서 자연수 개념을 지도하는 방법에 대한 개방형 면담 자료에 대한 분석이다. 교사가 자연수 개념에 대한 지도시 문화적 기준이나 교육과정 개발, 교사교육, 전문적 모델 등에 대하여는 수학교육을 전문적으로 심화 연구한 교사들이 주로 언급할 수 있는 부분이다. 또한 면담 자체도 자연수 개념 지도 방법에 대한 것이므로 교사들이 평소에 생각하는 수학과 교육과정의 전반적인 것에 대한 사항이나 교사 연수에 대한 사항 등에 대하여는 굳이 언급할 필요를 느끼지 않았을 것이다. 이에 면담 내용의 대부분이 교사 개인 요소가 되었을 것으로 생각한다.

## 2. 결 론

본 연구의 결론은 다음과 같다. 첫째로 자연수 개념을 주로 가르치는 초등 교사의 그것에 대한 교수학적 내용지식을 면담, 현장 노트, 자료 수집 등의 방법으로 분석하였다. 둘째로 교사의 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식에 어떤 요소들이 포함되는지를 교사 요소와 사회·문화 요소로 구분하여 살펴보았다.

자연수 개념은 한 가지로 규정하기 어려운 복합적인 것이며, 같은 의미에서 연구자가 연구한 자연수 개념이 그것의 이상적인 측면은 아닐 것이다. 본 연구를 통하여 첫째, 관찰되는 자연수 개념의 교육 현상을 설명하는 도구가 될 것이며, 둘째, 교사가 갖고 있는 자연수 개념에 대하여 분석함으로써 그들의 실제 수업을 예측해 볼 수 있을 것이다. 마지막으로 셋째, 자연수 지도에 대한 문제 의식을 가질 수 있을 것이다.

연구를 하면서 자연수 개념에 대한 역사적, 수리철학적 논의들을 살펴보고 연구함으로써, 그것이 갖는 다양한 의미를 알게 되었다. 자연수 개념에 대하여 의견을 펼친 철학자, 수학자, 수학교육자는 다양하다. 연구자의 수 만큼 각자의 견해에 따라 그것을 바라보는 입장도 다양하였다. 연구에서 이러한 견해들을 정리해 봄으로써 그것이 수학교육의 현장에서 발생하는 자연수 개념의 교육 현상을 설명하는 기준, 또는 도구가 될 수 있기를 기대한다. 또한 교사가 갖고 있는 자연수 개념에 대하여 면담을 통하여 분석해 보았다. 면담을 통하여 자연수에 대하여 교사는 어떠한 개념을 갖고 있는지를 알게 되었으며, 나아가 수업 시간에는 이를 어떻게 적용할지에 대하여 예측해 볼 수 있게 되었다.

연구 결과 다음의 두 가지 제언을 하겠다. 첫째, 후속 연구로서 자연수 개념의 교수학적 내용지식을 갖추고 있는 정도에 대하여 교사들이 갖는 지식의 소유 유형에 따른 교수 방법과의 관련성에 대한 연구가 진행되기를 바란다. 면담에서도 드러났듯이 자연수 개념에 대한 수학적 견해, 수학교육적 견해를 전문적으로 밝힌 교사와 그렇지 않은 교사가 갖는 교수 방법에는 어떠한 관련성이 있는지를 밝히는 연구가 진행되기를 바란다. 나아가 면담 내용 분석에서 교사의 교수학적 내용지식에 포함된 요소 중 사회·문화 요소의 내용이 적었다. 사회·문화 요소가 교사의 교수 방법에 어떻게 포함되는지에 관한 연구 또한 진행되기를 바란다.

둘째, 자연수 개념에 대한 실제 수업을 동영상으로 촬영한 후 그 내용에 대한 분석이 있기를 바란다. 본 연구는 초등학교 교사의 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식을 현장 교사 6명에 대한 면담과 현장 노트, 수업 자료 등을 분석하는 연구하였다. 하지만 자연수 개념에 대한 몇몇 교사의 수업을 일정 기간 동안 직접 참여하여 현장 노트를 하고, 수업을 동영상 촬영하여 그 결과를 분석한다면 보다 풍부한 연구가 이루어질 것이다. 실제 수업이 그렇게 될 것이라고 예상하는 것 보다 현장에서는 보다 역동적인 상황이 나타날 것이다. 상황 속에서 교사가 자연수 개념에 대한 교수학적 내용지식을 어떻게 표현하는지를 연구한다면 수학교육의 현장을 생생하게 보여줄 수 있게 될 것이다.

## 참 고 문 헌

- 강완 (2008). 수학교육학의 전개. 서울: 경문사.
- 강창동 (2003). 지식기반 사회와 학교지식. 서울: 문음사.
- 강홍규 (2005). Dewey의 경험주의 수학교육론 연구. 서울: 경문사.
- 강홍규 · 고정화 (2003). 양의 측정을 통한 자연수와 분수 지도의 교수학적 의의. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 5(3), 385-399.
- 고정화 (2005). 학력 초의 활동주의적 수개념 구성에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.
- 교육과학기술부 (2009a). 1-1 수학. 서울: (주)두산.
- 교육과학기술부 (2009b). 1-1 수학. 서울: (주)두산.
- 교육과학기술부 (2009c). 1-2 수학. 서울: (주)두산.
- 교육과학기술부 (2009d). 1-2 수학익힘책. 서울: (주)두산.
- 교육과학기술부 (2009e). 2-1 수학. 서울: (주)두산.
- 교육과학기술부 (2009f). 2-2 수학. 서울: (주)두산.
- 교육과학기술부 (2009g). 슬기로운 생활 1-1. 서울: 두산동아(주)
- 교육과학기술부 (2009h). 초등학교 교사용 지도서 수학 1-1. 서울: (주)두산.
- 교육과학기술부 (2009i). 초등학교 교사용 지도서 수학 1-2. 서울: (주)두산.
- 교육과학기술부 (2009j). 초등학교 교사용 지도서 수학 2-1. 서울: (주)두산.
- 교육과학기술부 (2009k). 초등학교 교사용 지도서 수학 2-2. 서울: (주)두산.
- 교육과학기술부 (2009l). 초등학교 교육과정 해설(IV): 수학, 과학, 실과. 서울 : 미래엔 컬처그룹.
- 교육과학기술부 (2010a). 3-1 수학. 서울: (주)두산.
- 교육과학기술부 (2010b). 4-1 수학. 서울: (주)두산.
- 교육과학기술부 (2010c). 초등학교 교사용 지도서 수학 3-1. 서울: (주)두산.
- 교육과학기술부 (2010d). 초등학교 교사용 지도서 수학 4-1. 서울: (주)두산.
- 김남희 · 나귀수 · 박경미 · 이경화 · 정영옥 · 홍진곤 (2006). 수학교육과정과 교재연구. 서울: 경문사.
- 김만희 (2003). 폴라니의 인식론에 근거한 과학교수의 내러티브적 성격 고찰. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.
- 김용태 (2001). 교사의 수학적 관념과 지식에 대한 조사 연구. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.
- 김용태 · 박승안 (1994). 정수론. 서울: 경문사
- 민윤 (2003). 사회과 역사 수업에서 초등 교사의 교수내용지식에 대한 이해. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.
- 박경민 (2001). 교수적 내용 지식에 대한 중등 과학 예비교사의 인식 조사. 서울대학교 대학원 석사학위논문.
- 박교식 (1997). 우리 나라 학교 수학의 세 가지 서로 다른 판(Version)에 관한 연구. 대한수학교육학회지 논문집, 7(2), 91-101.
- 방정숙 (2001). 사례 연구를 통한 초등학교 교사의 수학 교수법 개발에 관한 소고. 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육>, 5(2), 143-161.
- 방정숙 (2002). 수학교사의 교수방법에 영향을 미치는 요소에 관한 소고. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 41(3), 257-271.
- 방정숙 · 김상화 · 박금란 (2007). 초등교사의 수학과 교수법적내용지식 정립을 위한 교수학습 자료 개발. 한국교

- 원대학교 부설 교과교육공동연구소.
- 서관석 · 전경순 (2000). 예비초등교사들의 분수 연산에 관한 내용적 지식과 교수학적 지식 수준에 대한 연구: 교사교육적 관점. 수학교육학연구, **10(1)**, 103-113.
- 우정호 (2001). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교출판부.
- 이명희 · 황우형. (2010). 초등학교 교육과정에 제시된 자연수 개념의 지도 내용 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>. **49(4)**, 437-462.
- 임정대 (1996). 수학기초론의 이해. 서울: 청문각.
- 정영옥 (1997). Freudenthal의 수학적 학습-지도론 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.
- 정영옥 (2005). 네덜란드의 초등 수학 교육과정에 대한 개관 : 자연수와 연산 영역을 중심으로. 대한수학교육학회지 <학교수학>. **7(4)**, 403-425.
- 조성민 (2006). 교육과정 실행의 관점에서 본 수학교사 지식과 수업의 관련성 연구 : 고등학교 합수내용을 중심으로. 이화여자대학교 대학원 박사학위논문.
- 조용환 (1999). 질적연구 : 방법과 사례. 서울: 교육과학사.
- Ball, D. L. (1988a). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education*. Unpublished doctoral dissertation, Michigan State University, East Lansing.
- Ball, D. L. (1988b). Research on teacher learning: Studying how teachers' knowledge changes. *Action in Teacher Education*. **10(2)**, 17-24.
- Ball, D. L. (1991). Research on teaching mathematics: Making subject matter knowledge part of equation. In J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching*, Vol. 2(pp.1-48). Greenwich, CT: JAI Press.
- Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In Virginia Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp.433-456). Washington, D. C. : American Educational Research Association.
- Beishuizen, M. (1999). *The empty number line as a new model*. In I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (pp. 157-168). Buckingham: University Press.
- Benoit, R. (2006). 수란 무엇인가? : 원리와 개념으로 살펴보는 신비한 수의 세계. 정은비(역). 서울: 민음in.
- Brainerd, C. J. (1979). *The Origin of Number Concept*. 유승구(역) (1991). 수개념의 기원. 서울: 성원사.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.
- Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., & Carey, D. A. (1988). Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*. **19**, 385-401.
- Chevallard, Y. (1999). Didactique? Is it a plaisanterie? You must be joking! *A critical comment on terminology. Instructional Science*. **27(1-2)**, 1999.03. 5-7.
- Clarke, D. M. (1997). The changing role of mathematics teacher, *Journal for Research in Mathematics Education*. **28(3)**, 278-308.
- Clason, R. G. (1968). *Number concepts in arithmetic texts of the United States from 1880 to 1966, with related Psychological and mathematical developments*. Unpublished doctoral dissertation. The University of Michigan.
- Cochran, K. F., DeRuiter, J. A., & King, R. A. (1993). Pedagogical Content Knowing: An Integrative Model

- for Teacher Preparation. *Journal of Teacher Education*, **44**(4), 263-272.
- Cochran, K. F., King, R. A., & DeRuiter, J. A. (1991). Pedagogical content knowledge: A tentative model for teacher preparation. *Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association*. Chicago, April, 1991.
- Comenius, J. A. (1953). *The Analytical Didactic*. 이숙중(역). 분석교수학. 서울: 대한교과서주식회사.
- Confrey, J. (1980). *Conceptual Change, Number Concepts and the Introduction to Calculus*. Unpublished Doctoral Dissertation. The University of Chicago.
- Davydov, V. V. (1990). The Empirical Character of Generalization as One of the Sources of Difficulties in Mastering Instructional Material. in J. Kilpatrick (ed.). *Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula*. Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics. pp. 102-159.
- Delaney, K. D. (1997). *Understanding Social Studies for Teaching: A Sociocultural Approach to Teacher-Interns' Learning Pedagogical Social Studies Knowledge*, Unpublished Doctoral Dissertation, University of North Carolina.
- Dewey, J., & McLellan, J. A. (1895). *The psychology of number and its applications to methods of teaching arithmetic*. New York: D. Appleton company.
- Dewey, J. (1972). Psychology of Number. *John Dewey: The Early Works, 1882-1898*. Vol. 5: 1895-1898. Early Essays. Carbondale and Edwardsville : Southern Illinois University Press. 424-429.
- Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. The Falmer Press.
- Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational studies in mathematics*, **21**, 521-544.
- Fischbein, E. (1993). *The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity*, In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Straiser, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline*(p. 231-245). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational task*. Dordrecht: G. Reidel Publishing Company.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structure*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Kluwer Academic Publisher.
- Geertz, C. (1973). *Thick description: Toward an interpretive theory of culture*. In C. Geertz. *The interpretation of cultures*. 3-30. New York: Basic Books.
- Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CD β Press.
- Hammerman, E. (2006). *Becoming a better science teacher: 8 steps to high quality instruction and student achievement*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.
- Heath, L. T. (1956). The Thirteen Books of Euclid's Elements, translated from the texts of Heiberg with introduction and commentary, Vol. 2. New York: Dover Publications, Inc.
- Hermann, W. (1949). *Philosophy of mathematics and natural science*. 김상문(역).(1987). *수리철학과 과학철학*. 서울: 민음사.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). *Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis*. In J. Hiebert(Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. pp. 1-27.

- Holland, J., & Ramazanoglu, C. (1994) "Coming to conclusions: Power and interpretation in researching young women's sexuality", in Purvis, J. and Maynard, M. (eds) *Researching Women's lives from a Feminist perspective*, London: Falmer.
- Kang, W. (1990). *Didactic Transposition of Mathematical knowledge in Textbook*, Doctoral Dissertation, Athens: University of Georgia.
- Kaplan, R. G. (1991, October). Teacher Beliefs and practices: A square peg in a square hole, *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Blacksburg, VA.
- Kennedy, M. M. (1990). *A survey of recent literature on teachers' subject matter knowledge* (Issue Series 90-3). East Lansing: Michigan State University, National Center for Research on Teacher Education.
- Kennedy, L. M., & Tipps, S. (2000). *Guiding children's learning of mathematics*. Belmont, CT: Wadsworth/Thomson Learning
- Klein, M. (1980). *Mathematics: The Loss of Certainty*. 박세희(역)(1994). *수학의 확실성*. 서울 : 민음사.
- Klein, T. (1998). *Flexibilization of mental arithmetic strategies on a different knowledge base*: The empty line in a realistic versus gradual program. design. Utrecht: Freudenthal Institute.
- Krishner, D. (2002). Untangling teachers' diverse aspirations for student learning: A crossdisciplinary strategy for relating psychological theory to pedagogical practice, *Journal for Research in Mathematics Education*. **33(1)**, 46-58.
- Lappan, G. (1997). The challenges of implementation: Supporting teachers. *American Journal of Education*. **106**, 207-239.
- Leinhardt, G., & Smith, D. A. (1985). Expertise in Mathematics Instruction: Subject Matter Knowledge. *Educational Psychologist*. **77**.
- LeTendre, G. K. (1999). The problem of Japan: *Qualitative studies and international educational comparisons*. *Educational Researcher*. **28(2)**, 38-45.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Marks, R. (1990). Pedagogical Content Knowledge : *From a mathematical case to a modified conception*. *Journal of teacher Education*, **41(3)**, 3-11.
- Marks, R. (1991). *When Should Teachers Learn Pedagogical Content Knowledge?* American Educational Research Association. Chicago, IL. 1-15.
- McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. NY: Macmillan. pp. 575-596.
- Minskaya, G. I. (1975). Developing the concept of number by means of the relationship of quantities, In L. P. Steffe (Ed.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*. **VII**. Children's capacity for Learning Mathematics. 207-269. The University of Chicago.
- Moreno-Armella, L. E., & Waldeg, G. (2000), An epistemological history of numbers and variation. In V. J. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics: an international perspective*. *The Mathematical Association of America. Toeplitz, O. (1963). The calculus*
- NCTM(2000). *Principles and Standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

- Nelson, B. S. (1997). Learning about teacher change in the context of mathematics education reform: Where have we come from? In E. Fennema & B. S. Nelson(Eds.), *Mathematics teachers in transition*. pp. 3-15. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, **62(3)**, 307-332.
- Patton, M. Q. (1990). *Qualitative evaluation and research methods*(2nd ed.). Newbury Park, CA: Sage.
- Piaget, J. (1969) *The Child's Conception of Number*. London : Routledge & Kegan Paul.
- Piaget, J. (1978). *Success and understanding*. Cambridge, MA : Harvard University Press.
- Raymond, A. M. (1997). Inconsistency between a beginning elementary school teacher's mathematics beliefs and teaching practice. *Journal for Research in Mathematics Education*. **28(5)**, 550-576.
- Raymond, A. M., & Santos, V. M. (1995). Preservice elementary teachers and self-reflectoin: How innovation in mathematics teacher preparation challenges mathematics beliefs. *Journal for Research in Mathematics Education*. **46(1)**, 58-69.
- Rubin, Herbert & Rubin, Irene. (1995). *Qualitative interviewing: The art of hearing data*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Russell, B. (1919). *Introduction to Mathematical Philosophy*. 임정대(역) (1986). 수리철학의 기초. 서울: 연세대학교 출판부.
- Schwab, J. J. (1978), Education and the structure of the disciplines. In *I. Westbury & Wilkof(Eds.), Science, curriculum, and liberal education* (pp.229-272). Chicago: University of Chicago Press. (Original work published 1961).
- Shane, R. (2002). Context and content : what are student teachers learning about teaching mathematics? In S. Goodchild & English(Eds.), *Researching mathematics classrooms* (pp.119-153). Westport, CT: Greenwood Publishing Group.
- Shulman, L. S. (1986a). Paradigm and Research Programs in the Study of Teaching : A Contemporary Perspective. In M. C. Wittrick(Ed.). *Handbook of Research on Teaching*. New York: Macmillan.
- Shulman, L. S. (1986b). Those Who Understand : *Knowledge Growth in Teaching*. *Educational Researcher*. **15(2)**, 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: *Foundations of the New Reform*. *Harvard Educational Review*: **57(1)**, 1-22.
- Skemp, R. R. (1976) *Relational understanding and instrumental understanding*. *Mathematics Teaching*, **77**, 20-26.
- Skemp, R. R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics*. (황우형 옮김). 2001. 수학학습 심리학. 서울 : (주)사이언스북스.
- Smith III, J. P. (1996). Efficacy and teaching mathematics by telling: A challenge for reform. *Journal for Research in Mathematics Education*. **27(4)**, 387-402.
- Sundermann, B., und Selter, Ch. (2000). Halbschriftliches Rechnen auf eigenen Wegen, In Müller, G. H., & Wittmann, E. Ch. (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen*(pp. 165-178). Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule-Der Grundschulverband-e.V.
- Tamir, P. I. (1987). *Subject matter and related pedagogical knowledge in teacher education*. Paper presented at the annual meeting of the American Association for Educational Research, Washington, DC.

- Thompson, A. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, **15**, 105-127.
- Thorndike, E. L. (1922). *The Psychology of Arithmetic*. The Macmillan Company.
- Treffers, R. (1991). Didactical background of a mathematics program for primary education. In L. Streefland (Ed.), *Realistic mathematics education in primary school*. (pp.21-57). Utrecht: CD β Press.
- Van Driel, J. H., Verloop, N., & De Vos, W. (1998). Developing science teachers' pedagogical content knowledge. *Journal of Research in Science Teaching*, **35(6)**, 673-695.
- Wilson, S. M., Shulman, L. S., & Richert, A. E. (1987). 150 Different Ways of Knowing: Representations of Knowledge in Teaching. In J. Calderhead(Ed.), *Exploring teachers' thinking*. London : Cassell.



## An Analysis on the Pedagogical Content Knowledge of Natural number Concepts for Korean Elementary School Teachers

**Lee, Myeonghui**

Seoul Bongeun Elementary School, Hak-dong-ro 610, Kang-Nam-ku, Seoul, Korea, 135-866  
E-mail : lmh9981@hanmail.net

**Whang, Woo Hyung**

Dept. of Math. Education, Korea University, Anam-dong, Sungbuk-ku, Seoul, Korea, 136-701  
E-mail : wwhang@korea.ac.kr

The purpose of this research is to analyze the pedagogical content knowledge on the natural number concepts of Korean Elementary School Teachers. Shulman(1986b) had developed a tool in order to understand teachers' knowledge, as he defined three types of knowledge in teaching ; Subject Matter Knowledge, Curricular Knowledge, and Pedagogical Content Knowledge. Pang(2002) defined two types of elements including in the ways of teaching ; individual element, and sociocultural element. *Two research questions are addressed; (1) What is the pedagogical content knowledge of Natural number Concepts for Korean Elementary School Teachers? ; (2) What factors are included in the pedagogical content knowledge of Natural number Concepts for Korean Elementary School Teachers?* Findings reveal that (1) the Korean Elementary School Teachers had three types of the pedagogical content knowledge on the natural number concepts; (2) Teacher Factors were more included than Social-Cultural Factors in the pedagogical content knowledge on the natural number concepts of the Korean Elementary School Teachers. Further suggestions were made for *future researches* to include (1) a comparative study on teachers between ordinary teachers and those who majored mathematics education in the graduate school. (2) an analysis on the classroom activities about the natural number concepts.

---

\* ZDM Classification : F32

\* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C90

\* Key Words : Natural number Concept, Pedagogical Content Knowledge, Elementary school teacher

## 부록 : 설 문 지

면담 및 설문에 응해주셔서 감사합니다. 앞으로 행해질 면담 및 설문지는 순수한 연구를 위해 이루어지는 것이며, 연구 이외의 목적으로는 사용되지 않을 것임을 약속드립니다. 면담 및 설문에 응해주셔서 고맙습니다.

연구자 이명희 올림.

1. 선생님의 교육 경력은 몇 년이십니까?

(           년)

2. 각 학년의 지도 경력은 몇 년씩이십니까?

가. 1학년 지도 경력 : (           년)

나. 2학년 지도 경력 : (           년)

다. 3학년 지도 경력 : (           년)

라. 4학년 지도 경력 : (           년)

마. 5학년 지도 경력 : (           년)

바. 6학년 지도 경력 : (           년)

3. 수학과 관련 연수를 받으신 적이 있으신가요?

( 있 다 , 없 다 )

**※있으면 4번, 없으면 7번으로 가주세요.**

4. 있으시다면 어떤 내용의 연수였는지 대략적으로 기술해 주세요.

---

5. 수학과 연수가 선생님의 현장 수업에 도움이 되셨나요? 그렇다면 어떤 면에서 도움이 되셨나요? 상세히 적어주세요.

---

6. 수학과 관련 연구 경험을 상세히 적어주세요. (예. 문항 출제, 교재 집필, 연구 대회 등등..)

---

7. 수학과 관련 전공 대학원 수학 여부에 표시해 주세요.

( 석사 과정 , 석사 수료 , 석사 , 박사 과정 , 박사 수료 , 박사 )

**※있으면 8번, 없으면 설문 종료**

8. 수학 교과 관련 연구 경험이 있으신가요?(예. 연구 대회 참여, 연수 강의, 문항 출제, 연구대회, 교재 집필, 교과서 집필 등..) 상세히 적어주세요.

---



---

설문 및 면담에 응해주셔서 고맙습니다.