

# 함수근사모멘트방법의 신뢰도 기반 최적설계에 적용 타당성에 대한 연구

허재성\*†, 곽병만\*\*

\* 한국항공우주연구원 회전익기사업단, \*\* 한국과학기술원 기계공학과

## Study on Feasibility of Applying Function Approximation Moment Method to Achieve Reliability-Based Design Optimization

Jae-Sung Huh \*† and Byung-Man Kwak \*\*

\* Rotorcraft Program Office, KARI,

\*\* Dept. of Mechanical Engineering, KAIST

(Received August 30, 2010 ; Revised November 14, 2010 ; Accepted November 19, 2010)

**Key Words** : Function Approximation Moment Method(함수근사모멘트 방법), Sensitivity Analysis(민감도 해석), Reliability-Based Design Optimization(신뢰도 기반 최적설계), Statistical Moments(통계적 모멘트), Probability Constraints(확률 제한조건),

**초록**: 설계단계에서 시스템의 불확실성을 반영하려는 노력이 다양하게 이루어지고 있으며, 강건 최적설계 혹은 신뢰도 기반 최적설계는 이에 대한 대표적인 설계 방법론이다. 실제 문제에 이러한 방법론을 적용하기 위해서는 성능함수의 통계적 모멘트와 손상확률에 대한 정확하고 효율적인 추정 방법이 필요하고, 더불어 최적화를 위한 방향탐색과정에서 요구되는 민감도 해석의 정확성 및 효율성이 확보되어야 한다. 본 연구에서는 함수근사모멘트 방법을 기존에 유도된 적분 형태의 민감도 해석 식에 적용하여 그 민감도 해석 결과의 정확성을 확인하고, 이를 대표적인 신뢰도 기반 최적설계 문제에 적용하고자 한다. 민감도 해석 결과 및 신뢰도 기반 최적설계 결과를 타 방법의 결과와 비교하여 함수근사모멘트 방법의 타당성을 입증하고자 한다. 활용된 적분 형태의 민감도 해석은 손상확률 혹은 통계적 모멘트가 계산된 경우 추가적인 함수 계산 없이 민감도를 얻을 수 있는 효율적인 방법이다.

**Abstract**: Robust optimization or reliability-based design optimization are some of the methodologies that are employed to take into account the uncertainties of a system at the design stage. For applying such methodologies to solve industrial problems, accurate and efficient methods for estimating statistical moments and failure probability are required, and further, the results of sensitivity analysis, which is needed for searching direction during the optimization process, should also be accurate. The aim of this study is to employ the function approximation moment method into the sensitivity analysis formulation, which is expressed as an integral form, to verify the accuracy of the sensitivity results, and to solve a typical problem of reliability-based design optimization. These results are compared with those of other moment methods, and the feasibility of the function approximation moment method is verified. The sensitivity analysis formula with integral form is the efficient formulation for evaluating sensitivity because any additional function calculation is not needed provided the failure probability or statistical moments are calculated.

### 1. 서론

최근 시스템의 불확실성을 설계 단계에 반영하려는 노력이 많이 진행되고 있으며, 그 대표적인 방법론이 신뢰도 기반 최적설계(Reliability-Based

Design Optimization)와 강건 최적설계(Robust Optimal Design)이다. 이 두 설계 방법에서는 주로 성능 함수의 평균과 표준편차로 표현되거나 그에 대응되는 다른 지수로 목적함수가 정의되고, 손상 혹은 만족 확률(Failure or Satisfaction Probability)이 확률 제한조건으로 구성된 최적 설계 수식화를 활용한다. 기존의 최적설계에 비해 확률 혹은 통계적 특성치를 계산하는데 많은 노력이 필요할 뿐만

† Corresponding Author, jshuh@kari.re.kr

아니라, 비선형 프로그래밍(Nonlinear Programming)을 최적화 알고리즘으로 채택시 요구되는 방향 탐색과정(Searching Direction)에 필요한 민감도 해석에도 큰 계산량이 필요로 한다. 실제 문제에 효율적으로 신뢰도 기반 최적설계 혹은 강건 최적설계를 적용하기 위해서는 확률 제한조건을 효율적으로 계산하기 위한 방법론이 필요함과 동시에 민감도 해석의 효율성과 정확성이 동시에 확보되어야 한다. 민감도 해석은 통계적 특성치 혹은 손상확률을 계산하는 방법에 따라 상이하므로, 본 연구에서는 4 차 통계적 모멘트와 피어슨 시스템(Pearson System)을 기초로 하는 모멘트 방법(Moment Method)<sup>(1~7)</sup>에 대해 초점을 맞추고자 한다. 이 모멘트 방법에 대한 통계적 모멘트와 확률 제한조건에 대한 민감도 수식은 이미 Huh 와 Kwak<sup>(7)</sup>이 통계적 모멘트와 유사한 형태의 적분식으로 유도하고, 민감도 계산에서 추가적인 함수 계산이 필요하지 않음을 증명하였다.

본 연구에서는 다양한 모멘트 방법<sup>(1~7)</sup> 중 하나인 Huh 와 Kwak<sup>(5,6)</sup>이 제안한 함수근사모멘트 방법(Function Approximation Moment Method, FAMM)을 유도된 적분 형태의 민감도 해석 식 (8)에 적용하고, 그 결과를 정 해(Exact solution)와 5" 및 3" Full Factorial Moment Method (FFMM)와 정확도 측면에서 비교 및 분석하고자 한다. 더 나아가 널리 알려진 신뢰도 기반 최적설계 문제에도 적용하고, 그 결과를 다른 방법과 비교하여 FAMM 의 신뢰도 기반 최적설계 혹은 강건 최적설계에 적용 가능성을 확인하고자 한다.

## 2. 이론

### 2.1 함수근사모멘트 방법<sup>(5,6)</sup>

서로 독립적이라고 가정하는 확률변수  $x_i(i=1, 2, 3, \dots, N)$ 에 대해 성능함수  $g(\mathbf{x})$ 의  $k$  차 통계적 모멘트(Statistical Moment)는 아래와 같이 정의가 된다.

$$E\{g^k(\mathbf{x})\} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [g(x_1, x_2, \dots, x_N) - \mu_g]^k \prod_{i=1}^N \phi_i(x_i) dx_1 dx_2 \dots dx_N \quad (1)$$

1, 2 차 모멘트는 성능함수의 평균(Mean)  $\mu$ 과 분산(Variance)  $\sigma^2$ 을 의미하며, 왜도(Skewness)  $\gamma_1$ (혹은  $\sqrt{\beta_1}$ )는 3 차 모멘트를 표준편차(Standard Deviation)의 3 제곱으로 나눈 값이며, 첨도(Kurtosis)  $\gamma_2$ (혹은  $\beta_2$ )는 4 차 모멘트를 표준편차의 4 제곱으로 나눈

값으로 아래 식과 같이 정리된다.

$$\sqrt{\beta_1} = E\{g^3\} / \sigma^3 \quad (2)$$

$$\beta_2 = E\{g^4\} / \sigma^4 \quad (3)$$

함수근사모멘트 방법(FAMM)은 일반적으로 비명시적 함수(Implicit Function)로 표현되는 시스템의 성능함수를 다항식과 같은 명시적 함수(Explicit Function)로 통계적 모멘트 측면에서 가능한 정확하게 근사하여 식 (1)과 같이 정의되는  $k$  차 통계적 모멘트를 계산하는 방법이다. FAMM에서는 근사함수로 2 차 다항식을 이용한다. 이는 대부분의 시스템 성능함수는 선형이 아닌 비선형성을 가지므로 선형 함수로 표현하기에는 부족함이 있기 때문이다. 이 방법에서 핵심 부분은 비명시적 함수를 명시적 함수로 근사할 때 반드시 필요하고 해에 큰 영향을 미치는 실험영역이며, FAMM에서는 정규 실험영역(Canonical Experimental Region)이라는 공간을 정의한다. 실험영역이 결정된 이후는 기존의 반응표면법(Response Surface Method)<sup>(9)</sup>의 절차와 동일하게 된다. 즉, 주어진 실험영역에서 실험계획법(Design of Experiments)을 활용하여 실험점을 배치하고 다항식의 계수를 최소 자승법(Least Square Method)으로 추정한다. 마지막으로, 얻어진 2 차 다항식의 모멘트는 손쉽게 정확하게 얻어지며 이를 성능함수에 대한 모멘트의 추정치로 활용한다. FAMM의 절차는 아래와 같으며, 좀 더 상세한 설명은 참고문헌 [5]에 기술되어 있다.

**1 단계:**  $N$  개의 확률변수에서  $i$  번째 변수에 대한 1 차원 문제에 대해 세 가지의 에러 최소화 조건에 의해 서로 다른 3 개의 점을 얻는다.

**2 단계:** 각 확률변수에서 결정된 3 개의 점으로부터  $N$  직면체( $N$ -orthotope)를 정의하고 이를 정규 실험영역(Canonical Experimental Region)이라 한다.

**3 단계:** 얻어진 영역에서  $(N+1)(N+2)/2$  의 실험점을 가지는 실험계획법을 실시하고 근사함수  $\bar{g}(\mathbf{x})$ 의 미지수를 결정한다.

**4 단계:** 근사함수인  $\bar{g}(\mathbf{x})$ 로부터 계산된 4 차 모멘트를 성능함수  $g(\mathbf{x})$ 의 추정치로 활용한다.

### 2.2 민감도 해석<sup>(8)</sup>

통계적 모멘트를 기반으로 하는 신뢰도 해석(Reliability Analysis)에서는 보편적으로 식 (1)처럼 정의되는 성능함수의 모멘트 정보와 피어슨 시스템과 같은 확률분포의 근사화 기법을 활용하여 성능함수의

확률밀도함수를 추정하고, 이로부터 손상 혹은 만족 확률을 계산한다. 일반적으로 4 차 모멘트까지를 많이 활용하므로, 손상 혹은 만족확률은 아래 식과 같이 표현할 수 있다.

$$G = \Pr[g(\mathbf{x}) \leq 0] \\ = \Pr(\mu_g, \sigma_g, \sqrt{\beta_{1g}}, \beta_{2g}) \quad (4)$$

신뢰도 기반 최적설계 혹은 강건 최적설계에서 설계변수는 주로 확률 변수  $x_i$ 의 평균이므로, 식 (4)는 연쇄 규칙(Chain Rule)에 의해 아래 식과 같이 정리된다. 그리고, 아래 식의 각 항에서  $g(\mathbf{x})$ 의 통계적 모멘트에 대한 손상확률의 편미분은 피어슨 시스템과 유한 차분법(Finite Difference Method)을 통해 비교적 쉽고 빠르게 계산이 가능하다. 즉,  $x_i$ 의 평균에 대한  $g(\mathbf{x})$ 의 통계적 모멘트에 대한 미분이 민감도 해석의 핵심이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{dG}{d\mu_{x_i}} &= \frac{\partial G}{\partial \mu_g} \frac{\partial \mu_g}{d\mu_{x_i}} + \frac{\partial G}{\partial \sigma_g} \frac{\partial \sigma_g}{d\mu_{x_i}} \\ &\quad + \frac{\partial G}{\partial \sqrt{\beta_{1g}}} \frac{\partial \sqrt{\beta_{1g}}}{d\mu_{x_i}} + \frac{\partial G}{\partial \beta_{2g}} \frac{\partial \beta_{2g}}{d\mu_{x_i}} \quad (5) \\ &\cong \frac{\Delta G}{\Delta \mu_g} \frac{\partial \mu_g}{d\mu_{x_i}} + \frac{\Delta G}{\Delta \sigma_g} \frac{\partial \sigma_g}{d\mu_{x_i}} \\ &\quad + \frac{\Delta G}{\Delta \sqrt{\beta_{1g}}} \frac{\partial \sqrt{\beta_{1g}}}{d\mu_{x_i}} + \frac{\Delta G}{\Delta \beta_{2g}} \frac{\partial \beta_{2g}}{d\mu_{x_i}} \end{aligned}$$

Huh 와 Kwak<sup>(8)</sup>은 이미 식 (5)에서  $x_i$ 의 평균에 대한  $g(\mathbf{x})$ 의 통계적 모멘트의 미분을 아래의 식과 같이 유도하였다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_{x_i}} &= \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}) \cdot \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) dx_1 \dots dx_n \right) \quad (6) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}} \left[ \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) \right] dx_1 \dots dx_n \\ &= 2\sigma_g \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}} \sigma_g \\ &= \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [g(\mathbf{x}) - \mu_g]^2 \cdot \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) dx_1 \dots dx_n \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [g(\mathbf{x}) - \mu_g]^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}} \left[ \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) \right] dx_1 \dots dx_n \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} 2[g(\mathbf{x}) - \mu_g] \cdot \frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_{x_i}} \cdot \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [g(\mathbf{x}) - \mu_g]^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}} \left[ \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) \right] dx_1 \dots dx_n \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &3\sigma_g^2 \frac{\partial \sigma_g}{\partial \mu_{x_i}} \cdot \sqrt{\beta_{1g}} + \sigma_g^3 \frac{\partial \sqrt{\beta_{1g}}}{\partial \mu_{x_i}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [g(\mathbf{x}) - \mu_g]^3 \cdot \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) dx_1 \dots dx_n \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [g(\mathbf{x}) - \mu_g]^3 \cdot \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}} \left[ \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) \right] dx_1 \dots dx_n + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} 3[g(\mathbf{x}) - \mu_g]^2 \cdot \frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_{x_i}} \cdot \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) dx_1 \dots dx_n \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &4\sigma_g^3 \frac{\partial \sigma_g}{\partial \mu_{x_i}} \cdot \beta_{2g} + \sigma_g^4 \frac{\partial \beta_{2g}}{\partial \mu_{x_i}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [g(\mathbf{x}) - \mu_g]^4 \cdot \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) dx_1 \dots dx_n \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [g(\mathbf{x}) - \mu_g]^4 \cdot \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}} \left[ \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) \right] dx_1 \dots dx_n + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} 4[g(\mathbf{x}) - \mu_g]^3 \cdot \frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_{x_i}} \cdot \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) dx_1 \dots dx_n \quad (9) \end{aligned}$$

위 식에서 공통적으로 요구되는 미분인  $x_i$ 의 평균( $\mu_{x_i}$ )에 대한  $i$ 번째 확률밀도함수( $\phi_i$ )의 미분은  $x_i$ 가 정규 분포를 따를 때 아래와 같은 식으로 유도되며, 상세한 내용은 참고 문헌 [8]에 기술되어 있다.

$$\frac{\partial \phi_i(x_i)}{\partial \mu_{x_i}} = \frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}^2} \cdot \phi_i(x_i) = H_i(x_i) \cdot \phi_i(x_i) \quad (10)$$

### 3. 수치 검증

본 절에서는 얻어진 적분 형태의 민감도 수식에 대해 FAMM의 적용 가능성에 대해 분석하고 한다. 이 때 정해(Exact solution), 1~4 차 통계적 모멘트를 비교적 정확하게 추정하는 걸로 알려진  $5^n/3^n$  FFMM<sup>(4,5)</sup>과 FAMM의 결과를 비교하여 그 정확도를 기준으로 가능성을 분석하려 한다. 단, 모든 확률변수는 정규분포를 따르며, 서로 독립적이라고 가정한다.

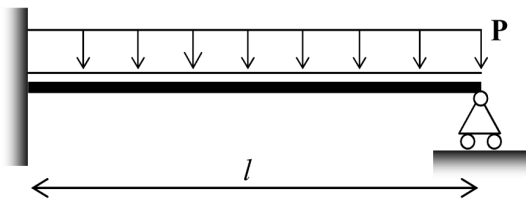
#### 3.1 균일하중을 받는 보

첫 검증 예제는 균일 하중을 지탱하는 보 문제<sup>(11)</sup>(Elastic beam under uniform load)이며, 제한조건은 아래 식처럼 정의된다. 설계 변수는  $[\mu_{x1}, \mu_{x2}, \mu_{x3}]^T = [2.0, 4.0, 5.0]^T$ 이며, 표준편차는  $[\sigma_{x1}, \sigma_{x2}, \sigma_{x3}]^T = [0.4, 0.4, 0.4]^T$ 이다.

**Table 1** Sensitivity results of the elastic beam problem

	<i>i</i>	Exact	3 <sup>n</sup> FFMM	FAMM
$\frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_{x_i}}$	1	1.1363	1.1363	1.1411
	2	1.125	1.125	1.125
	3	-1	-1	-1
$\frac{\partial \sigma_g}{\partial \mu_{x_i}}$	1	0.13382	0.13213 (-1.26%)	0.13764 (2.85%)
	2	0.20372	0.20185	0.19219 (-5.66%)
	3	0.0	0.0	-0.00817
$\frac{\partial \Pr[g \leq 0]}{\partial \mu_{x_i}}$	1	-0.00519	-0.00533 (2.70%)	-0.00512 (-1.35%)
	2	-0.00587	-0.00511 (-12.95%)	-0.00557 (-5.11%)
	3	0.00313	0.00323 (3.19%)	0.00323 (3.19%)

\* 1% 미만의 오차는 ()에 표기 생략.



**Fig. 1** Elastic beam under uniform load

$$g(P, l, m_F) = \frac{9}{128} \cdot Pl^2 - m_F \leq 0 \quad (11)$$

여기서  $P$  는  $x_1$ ,  $l$  은  $x_2$ ,  $m_F$  는  $x_3$  에 대응된다.

Table 1 에서는 5<sup>n</sup> FFMM 의 결과를 생략하였지만, 5<sup>n</sup> FFMM 은 4 차 다항식의 평균 및 표준편차에 대해 이론 해를 정확하게 추정하므로 평균과 표준편차에 대한 민감도는 정 해와 일치한다. 그러나, 3 차와 4 차 통계적 모멘트의 민감도 오차로 인해 확률에 대한 민감도에서는 최종적으로 1.4%의 오차가 발생하게 된다. 3<sup>n</sup> FFMM 은 평균에 대한 민감도는 정 해와 일치하고, 표준편차에 대한 민감도는 최대 1.3%를 가진다. 확률에 대한 결과는 보 길이에 대한 민감도가 최대 12.9%의 오차를 보이고 있으며, 다른 두 변수에 대해서는 3%정도의 오차를 보이고 있다. 보의 길이에 대해 상대적으

로 큰 오차가 발생하는 이유는 식 (11)에서 알 수 있듯이 성능함수가 보 길이의 제곱에 비례하고 있어 고차 통계적 모멘트에 대한 민감도 결과가 부정확하기 때문이다.

본 연구에서 가능성을 검증하고자 하는 FAMM 의 경우는 평균은 정 해와 같으며, 표준편차에서는 보의 길이에 대해 최대 5.7%의 오차와 3 번째 변수에 대해 절대값 기준으로 0.008 의 차이를 보이고 있다. 확률에 대한 민감도에 대해서는 보의 길이에 대해 최대 5.1%의 오차를 보이고, 다른 두 변수에 대해서는 각각 1.4%와 3.2%의 오차를 가진다. 이렇게 보의 길이에 대해 상대적으로 큰 오차가 나타나는 이유는 3<sup>n</sup> FFMM 에서 설명하였듯이, 고차 통계적 모멘트의 민감도에서 오차가 발생하기 때문이다.

전체적으로 FAMM 을 이용한 민감도 해석은 3<sup>n</sup> FFMM 의 결과와 비교할 때, 표준편차에서는 다소 오차를 가지나 확률에 대한 결과는 만족스러운 결과를 보여 주고 있다. 또한, 변동 계수가 최대 20%임을 고려한다면 신뢰도 기반 최적설계 혹은 강건 최적설계에 충분히 적용 가능하리라 판단된다.

### 3.2 속도 감쇄기(Speed Reducer)

두 번째 문제는 Fig. 2 와 같은 형상을 가지며 경량 비행기의 엔진과 프로펠러 사이에 사용되는 속도 감쇄기이다. 참고문헌 [12]에서 이 장치에 대한 신뢰도 기반 최적설계 문제가 정의되어 있으며, 그 수식화에서 아래와 같은 제한조건에 대한 만족 확률의 민감도에 대해 비교하고자 한다.

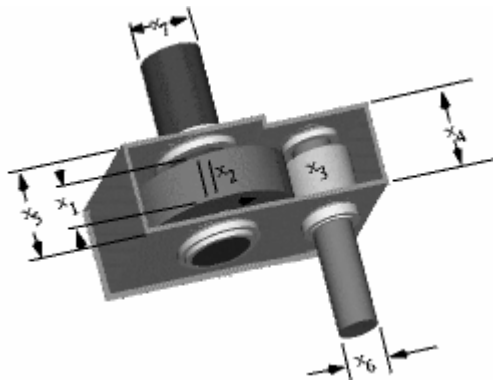
$$g = \frac{\sqrt{\left(\frac{745x_4}{x_2x_3}\right)^2 + 16.9 \times 10^6}}{110.0 \times x_6^3} - 1.0 \leq 0 \quad (12)$$

여기서 확률변수는  $x_2$ (module of teeth),  $x_3$ (number of teeth in the pinion),  $x_4$ (length of the first shaft between bearings),  $x_6$ (diameter of the first shaft)는 모두 정규분포이며 평균은  $\mu^T = [0.7, 17.0, 7.3, 3.4]^T$  이며 변동계수는 1.0%이다.

이 문제에서는 해석 해가 존재하지 않으므로 5<sup>n</sup> FFMM 을 기준으로 정확도를 비교하고자 한다. 3<sup>n</sup> FFMM 은 6 번째 확률변수에 대한 확률제한조건 민감도가 4.141 로 2.6%의 오차를 제외하고는 기준이 되는 5<sup>n</sup> FFMM 과 0.5% 이하의 오차만을 보였다. FAMM 의 경우는 성능함수의 표준편차에 대한 확률변수  $x_2$  와  $x_3$  의 미분에서 상대적으

**Table 2** Sensitivity results of speed reducer

	$i$	5 <sup>n</sup> FFMM	FAMM
$\frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_{x_i}}$	2	-0.01671	-0.01672
	3	$-6.881 \times 10^{-4}$	$-6.882 \times 10^{-4}$
	4	$1.602 \times 10^{-3}$	$1.604 \times 10^{-3}$
	6	-0.8450	-0.8447
$\frac{\partial \sigma_g}{\partial \mu_{x_i}}$	2	$-5.065 \times 10^{-4}$	$-5.127 \times 10^{-4}$
	3	$-2.086 \times 10^{-5}$	$-2.138 \times 10^{-5}$
	4	$4.842 \times 10^{-5}$	$4.853 \times 10^{-5}$
	6	-0.03384	-0.03378
$\frac{\partial \Pr[g \leq 0]}{\partial \mu_{x_i}}$	2	0.07869	0.07846
	3	$3.240 \times 10^{-3}$	$3.232 \times 10^{-3}$
	4	$-7.542 \times 10^{-3}$	$-7.523 \times 10^{-3}$
	6	4.035	4.0165



**Fig. 2** Illustration of speed reducer

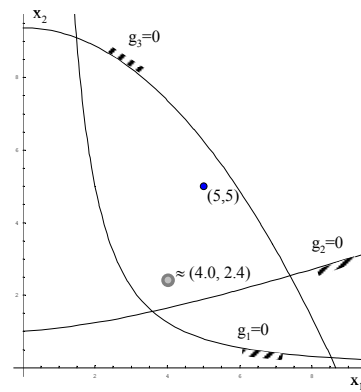
차가 각각 12.2%와 2.5%를 가지나, 다른 민감도 결과는 모두 0.5%이하의 오차만을 보이고 있다.  $x_2$  평균에 대한 성능함수 표준편차에 대한 미분상대 오차 기준으로는 12.2%로 상당한 크기지만, 절대 값을 비교하면  $6.2 \times 10^{-6}$  으로 매우 작은 값을 보이고 있다. 그러므로, FAMM의 민감도 결과는 신뢰도 기반 최적설계에 충분히 적용 가능할 것이다.

#### 4. 신뢰도 기반 최적설계에 적용

본 절에서는 FAMM과 적분 형태의 민감도 수식을 널리 알려진 신뢰도 기반 최적설계의 예제에 적용하고자 하며, 그 문제는 아래와 같이 정의된다. 본 연구에서는 Tu와 Choi<sup>(13)</sup>의 논문의 결과를

**Table 3** Results of reliability-based design optimization

	FAMM	Tu & Choi
$(x_1, x_2)$	(4.023, 2.476)	(4.027, 2.428)
$f$	6.530	6.455
$\Pr[g_1 \leq 0]$ (MCS)	0.97836	0.97552
$\Pr[g_2 \leq 0]$ (MCS)	0.97634	0.96884
$\Pr[g_3 \leq 0]$ (MCS)	1.00	1.00



**Fig. 3** Design space

인용하고자 한다. 이 수식에서 정규분포를 따르는 2개의 확률변수는 동시에 설계변수이며 이들의 표준편차는  $[\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}]^T = [0.5, 0.4]^T$ 이고, 설계변수로서의 상·하한 값은 각각 1.0과 10.0이다. 그리고, 식 (13)에서  $g_1 \sim g_3$ 에 의해 정의되는 설계공간 Fig. 3와 같으며, 초기 설계점은  $[\mu_{x_1}, \mu_{x_2}]^T = [5, 5]$ 이다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & f = \mu_{x_1} + \mu_{x_2} \\ \text{subject to } & \Pr[g_j(\mathbf{x}) \leq 0] \geq \Pr_j^T, \quad j=1 \sim 3 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Pr_j^T = 0.97725 (\beta = 2.0), \quad j=1 \sim 3$$

여기서  $g_j$ 는 아래와 같이 정의된다.

$$g_1 = 1.0 - \frac{x_1^2 x_2}{20.0}$$

$$g_2 = 1.0 - \frac{10x_2^3 - x_1^2 x_2 - 2x_1}{10.0}$$

$$g_3 = 1.0 - \frac{80.0}{x_1^2 + 8x_2 + 5}$$

FAMM을 활용하여 얻은 최적해와 Tu와 Choi<sup>(13)</sup>에 제시된 해는 Table 3처럼 거의 동일하나, 약간의 차이가 있다. 그 이유는 Table 3에서 정리하였듯이 두 방법을 통해 얻어진 해에서 몬테카를로 시뮬레이션 방법(Monte Carlo Simulation, MCS)로 만족확률을 다시 계산해보면 명확해진다. 즉, Tu와

Choi 는 2 번째 제한조건에서 FMM 의 결과보다 다소 더 위배하면서 목적함수를 좀 더 최소화하였기 때문이다. 이는 비선형 계획법을 활용해 최적화하는 경우, 제한조건의 활성화(Active) 판단 기준에 의한 영향이다. 즉, 활성화 판단 기준이 정확히 '0'이 아니라 어느 정도의 구간 내에서 제한조건의 활성화를 판단하기 때문이다. 계산량을 비교하면, 최적화 과정에서 FMM 을 활용한 경우는 7 번의 축차(Iteration)와 9 번의 함수호출(Function call)을 통해 최적 해에 수렴을 하였으며, 민감도 해석은 함수 계산에 얻어진 결과를 활용하므로 추가적인 함수 계산이 불필요하다. 즉, 9 번의 만족확률 및 목적함수의 계산만으로 최적 해를 얻었다. Tu 와 Choi 는 총 6 번의 축차를 통해 수렴하였으나, 확률 및 목적 함수에 대해 계산량이 구체적으로 명시되지 않아 비교 분석에 한계가 있으나, 단순히 축차 횟수만을 비교해도 FMM 의 방법은 충분히 가능성이 있다고 할 수 있다.

## 5. 결론

본 연구에서는 함수근사모멘트 방법을 이미 유도된 민감도 해석에 적용하고 얻어진 민감도의 정확도를 해석 해 및 다른 모멘트 방법과 비교 및 검증 하였다. 또한 기존 연구에서 활용이 되는 신뢰도 기반 최적설계 문제에 FMM 을 적용하여 해의 정확성 및 효율성을 확인하였다. 두 민감도 해석 예제에서 전체적으로 FMM 의 민감도 해석 결과는 3<sup>rd</sup> FFMM 과 유사한 결과를 보여주고 있으나, 균일 하중을 받는 보 문제에서 일부 민감도 결과에서 상대적으로 큰 오차를 보여주고 있다. 그러나, 보 문제의 경우 변동계수가 최대 20%라는 사실과 3<sup>rd</sup> FFMM 가 보이는 오차를 고려한다면, FMM 의 결과도 충분히 만족스럽다고 할 수 있다. 그리고, 속도 감쇄기의 경우 확률변수 1 개에 대한 민감도 결과에서 상대 오차는 10%를 넘어가나, 절대 값으로는  $10^{-6}$  정도의 차이를 보이고 있으므로 충분히 강건최적설계 혹은 신뢰도 기반 최적설계에 적용 가능하리라 판단된다. 또한 기존에 널리 활용되는 신뢰도 기반 최적설계 문제에 적용하여 문헌의 결과와 비교를 하여도 거의 동일한 축차를 통해 좀 더 제한 조건을 잘 충족하는 해를 얻어 실제 문제에 적용이 가능함을 보여 주었다.

## 참고문헌

- (1) D'Errico, J. R. and Zaino Jr., N. A., 1988, "Statistical Tolerancing Using a Modification of Taguchi's Method," *Technometrics*, Vol. 30, No. 4, pp.397~405.
- (2) Zhao, Y.G. and Ono, T., 2001, "Moment Methods for Structural Reliability," *Structural Safety*, Vol.23, pp.47~75.
- (3) Seo, H. K. and Kwak, B. M., 2002, "Efficient Statistical Tolerance Analysis for General Distribution Using Three Point Information," *International Journal for Production Research*, pp.931~944.
- (4) Lee, S. H. and Kwak, B. M., 2006, "Response Surface Augmented Moment Method for Efficient Reliability Analysis," *Structural Safety*, Vol. 28, No. 3, pp.261~272.
- (5) Choi, H. S., 2005, "Moment Based Reliability Analysis for General Distributions Using Multi-Level DOE," Master thesis, KAIST.
- (6) Huh, J. S., Kim, K. H., Kang, D. W., Gweon, D. G. and Kwak, B. M., 2006, "Performance Evaluation of Precision Nanopositioning Devices Caused by Uncertainties due to Tolerances Using Function Approximation Moment Method," *Review of Scientific Instruments*, Vol. 77, No. 1, pp.015103~015111.
- (7) Huh, J. S. and Kwak, B. M., 2007, "Numerical Verification of the First Four Statistical Moments Estimated by a Function Approximation Moment Method," *Trans. of the KSME(A)*, Vol. 31, No. 4, pp. 490~495.
- (8) Kim, D. H., Lee, G. S., Choi, D. H., Choi, J. H., Lee, S. H. and Kwak, B. M., 2008, "Reliability Analysis Using an Enhanced Response Surface Moment Method," *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 22, No. 6, pp.1052~1057.
- (9) Huh, J. S. and Kwak, B. M., 2008, "The Efficient Sensitivity Analysis on Statistical Moments and Probability Constraints in Robust Optimal Design," *Trans. of the KSME(A)*, Vol. 32, No. 1, pp.29~34.
- (10) Montgomery, D. C., 1997, *Design and Analysis of Experiments*, John Wiley & Sons.
- (11) Thoft-Christensen, P., and Baker, M., 1982, *Structural Reliability Theory and Its Applications*, Springer-Verlag.
- (12) Kang, H. Y., Lee, Y. H., Huh, J. S. and Kwak, B. M., 2006, "Comparative Study of RBDO Algorithms Based on Form and FMM," *III European Conference on Computational Mechanics*.
- (13) Tu, J., Choi, K. K. and Park, Y. H., 2001, "Design Potential Method for Robust System Parameter Design," *AIAA Journal*, Vol. 39, No. 4, pp. 667~677.