

슬라이딩 모드 제어가 적용된 샘플치 시스템에 대한 안정도 판별 조건

Stability Criterion for Sampled-Data System with Sliding Mode Controller

박 흠 용, 조 영 훈, 박 강 박*
(Heum-Yong Park¹, Young-Hun Jo², and Kang-Bak Park²)

¹Samsung Electronics Co., Ltd.,

²Korea University

Abstract: Although most of control methods have been studied in the continuous-time domain, the actual control systems have been implemented using MCU (Micro Control Unit) and/or microprocessors so that the overall systems turn to be sampled-data systems. In this case, the stability criterion of the closed-loop system is not easy to derive. In this paper, a simple stability criterion for the sampled-data system with sliding mode controller is derived.

Keywords: SMC (Sliding Mode Control), sampled-data system, stability criterion

I. 서론

슬라이딩 모드 제어 기법은 강인제어 기법 중의 하나로 제어 대상 모델의 불확실성이나 외란 등에 대해 강건하고 (robust) 불변하는(invariance) 성능을 나타내는 기법이다. 이러한 장점을 얻기 위해서 상태 공간에서 미리 안정한 슬라이딩 평면(sliding surface)을 설계하고, 스위칭 하는 입력 신호를 이용하여 시스템의 상태가 상태공간에서 슬라이딩 평면으로 수렴하고 여기서 벗어나지 않도록 하는 접근 방식을 이용한다[1-4].

기존의 대부분의 제어기들은 주로 연속시간 영역에서 설계되어 왔다. 그러나 거의 모든 제어기들이 실제 구현될 때에는 MCU 등을 이용하여 이산시간 영역에서 구현된다. 따라서 실제 시스템은 샘플치 시스템이 된다. 이산시간 시스템의 경우, 이산시간 영역에서 이산시간 제어기를 설계하게 되나 샘플치 시스템의 경우에는 제어기가 연속시간 영역에서 설계된다는 차이점이 있다. 이러한 샘플치 시스템의 경우에는 제어기가 연속시간 영역에서 안정하도록 설계되었더라도 실제 시스템은 불안정해질 수 있으므로, 이에 대해 별도로 안정도를 판별해야 한다. 여기에는 샘플링 주기의 길이가 큰 영향을 끼치는 이미 잘 알려진 사실이다.

최근에 연속시간 영역에서 안정하게 설계된 일반적인 슬라이딩 모드 제어기를 이용한 샘플치 시스템에 대한 해석이 활발히 진행되고 있다[5-7]. 그러나 Yu 등이 제안한 안정도 판별법은 복잡할뿐더러, 실제로는 안정함에도 불구하고 판별할 수 없는 경우도 많으며, 샘플링 주기가 매우 짧

은 경우에는 적용할 수 없다는 단점들이 있다.

따라서 본 논문에서는 보다 단순화된 판별법을 유도한다. 제안된 판별법은 기존의 판별법보다 판별하기가 매우 용이하며, 기존의 방법보다 보다 넓은 영역에 대해서 쉽게 판별할 수 있다.

II. 문제 정의

다음과 같은 제어 가능한 기준형(canonical form)을 갖는 2차 시스템에 대해 생각하자[5].

$$\dot{x} = Ax + bu. \quad (1)$$

여기서 $x \in R^2$, $u \in R$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다. 위 시스템에 대해 슬라이딩 평면을 아래와 같이 정의한다[5].

$$g(x) = c^T x. \quad (2)$$

여기서 $c = [c_1 \ 1]^T$ 이고 $c_1 > 0$ 은 양의 상수이며, $g(x) = 0$ 이 안정하도록 설계한다. 여기에 대해 일반적인 슬라이딩 모드 제어기를 아래와 같이 설계할 수 있다[1-5].

$$u = u_{eq} + u_s \quad (3)$$

여기서 등가입력은 $u_{eq} = -(c^T b)^{-1} c^T A x$ 이고, 스위칭 입력은 $u_s = -K(c^T b)^{-1} \text{sgn}(g)$ 이며, $K > 0$ 은 양의 상수이고, $\text{sgn}(\cdot)$ 은 부호함수(signum function)이다.

이렇게 설계된 연속시간 제어기를 ZOH (Zero-Order Hold)를 이용한 샘플치 시스템에 적용한 경우의 이산시간 시스템의 모델은 다음과 같이 된다[7].

$$x(k+1) = \Phi x(k) + KTs(k) \quad (4)$$

여기서

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2010. 12. 19., 수정: 2010. 12. 27., 채택확정: 2010. 12. 28.

박흠용: 삼성전자(pajoy@korea.ac.kr)

조영훈, 박강박: 고려대학교 제어계측공학과

(heyguy84@korea.ac.kr/kbpark@korea.ac.kr)

$$\begin{aligned}\Phi &= e^{Ah} - \int_0^h e^{A\tau} d\tau b (c^T b)^{-1} c^T A = \begin{bmatrix} 1 & v \\ 0 & d \end{bmatrix}, \\ \Gamma &= \int_0^h e^{A\tau} d\tau b = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (5)$$

이고, $s(k) = \text{sgn}(g(k))$ 이며, h 는 샘플링 시간이다.

III. 안정도 판별법

(4)에 주어진 샘플치 시스템에 대한 안정도를 판별하기 위한 기존의 판별법은 다음과 같다[5].

정리 1 [5]: (4)에 주어진 시스템은 다음의 조건들을 모두 만족하면 리아프노프 안정도를 만족한다.

$$|d| < 1, \quad \left| \frac{v\gamma_2}{1-|d|} \right| < |\gamma_1|. \quad (6)$$

그러나 (6)에 주어진 기존의 안정도 판별법은 샘플링 주기가 매우 짧은 시스템에 대해서는 적용이 불가능할 뿐 아니라, 어떤 경우에는 안정한 구간이 있는 시스템임에도 불구하고 어떤 샘플링 시간에 대해서도 판별 불가의 결과를 나타내기도 한다.

비고 1 [7]: 샘플링 시간이 짧아지면 Φ, Γ 는 다음과 같이 근사화 할 수 있다.

$$\Phi \approx \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1-c_1 h \end{bmatrix}, \quad \Gamma \approx \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix}. \quad (7)$$

비고 1의 결과로부터 샘플링 시간이 짧은 경우에는 (6)의 두 번째 부등식을 만족시키는 샘플링 시간은 없음을 알 수 있다. 그러므로 기존의 판별법으로는 안정도를 판별하기가 불가능하다. 이에 본 논문에서는 (6)의 첫 번째 조건만으로도 충분함을 보인다.

정리 2: 만일 $|d| < 1$ 이면, 다음 부등식이 성립한다.

$$\frac{v\gamma_2}{1-d} + \gamma_1 > 0. \quad (7)$$

증명: v, d, γ_1, γ_2 를 실변수 함수로 나타내면, 행렬 A 의 고유값(eigenvalue)의 형태에 따라 다르게 표현되게 된다. 각 형태에 대해서 유도한 값들을 대입하면 간단히 증명할 수 있으나 매우 길므로 생략한다. ■

위의 정리를 이용하면 다음 정리를 유도할 수 있다.

정리 3: (4)에 주어진 시스템은 다음의 조건만 만족하면 리아프노프 안정도를 만족한다.

$$|d| < 1. \quad (8)$$

아울러 각 상태변수들은 궁극적으로 다음과 같이 제한되게 된다.

$$\left| \lim_{k \rightarrow \infty} x_2(k) \right| \leq \frac{|\gamma_2 K|}{1-|d|}. \quad (9)$$

$$\left| \lim_{k \rightarrow \infty} x_1(k_1) \right| \leq \frac{1}{c_1} \frac{|\gamma_2 K|}{1-|d|} + \frac{2|v\gamma_2 K|}{(1-|d|)^2}. \quad (10)$$

증명: (4) 및 (5)를 풀어쓰면 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= x_1(k) + v x_2(k) - K \gamma_1 s(k) \\ x_2(k+1) &= d x_2(k) - K \gamma_2 s(k)\end{aligned}\quad (11)$$

따라서 부등식 (8)이 만족되면 $x_2(k)$ 가 안정하며 궁극적으로 유한한 값에 제한됨은 자명하며, 그 값은 다음과 같다.

$$\left| \lim_{k \rightarrow \infty} x_2(k) \right| \leq \frac{|\gamma_2 K|}{1-|d|}. \quad (12)$$

이제 $x_1(k)$ 에 대해서 살펴보자. 먼저 초기 조건이 $g(x) > 0$ 인 영역에 있다고 가정한다. 반대 부호를 갖는 경우에도 대칭이기 때문에 결국 같은 결론에 도달하게 된다. 따라서 $g(x) > 0$ 인 영역에 대해서만 보이면 충분하다. $g(x)$ 가 양수이면 $s(k) = 1$ 이므로 (11)의 첫 번째 수식으로 부터 다음 수식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}x_1(k) &= x_1(k-1) + v x_2(k-1) - K \gamma_1 \\ &= x_1(0) + v \sum_{i=0}^{k-1} x_2(i) - k \gamma_1 K \\ &= x_1(0) + v \left[x_2(0) \frac{1-d^k}{1-d} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma_2 K}{1-d} \left(k - \frac{1-d^k}{1-d} \right) \right] - k \gamma_1 K \\ &= x_1(0) + v x_2(0) \frac{1-d^k}{1-d} + \frac{v \gamma_2 K}{1-d} \frac{1-d^k}{1-d} \\ &\quad - k \left(\frac{v \gamma_2}{1-d} + \gamma_1 \right) K\end{aligned}\quad (13)$$

(13)의 마지막 수식에서 마지막 항 중 $\left(\frac{v \gamma_2}{1-d} + \gamma_1 \right) K$ 는 (7) 및 K 의 정의로부터 양수임을 알 수 있다. 그러므로 $x_1(k)$ 는 k 가 증가함에 따라 궁극적으로는 점점 줄어들 수밖에 없다. 그런데 (12)로부터 $x_2(k)$ 는 유한하므로, 결국 $g(x)$ 의 부호가 바뀌게 됨을 알 수 있으며, 부호가 바뀔 때의 각 상태변수의 크기는 다음과 같이 제한됨을 알 수 있다.

$$|x_2(k_1)| \leq \frac{|\gamma_2 K|}{1-|d|}, \quad (14)$$

$$|x_1(k_1)| \leq \frac{1}{c_1} \frac{|\gamma_2 K|}{1-|d|}. \quad (15)$$

여기서 k_1 은 슬라이딩 평면 변수 $g(k)$ 에 부호 변화가 일어날 때로 정의되며, 다음 조건을 만족할 때를 의미한다.

$$g(k_1) g(k_1-1) < 0. \quad (16)$$

결국 x_2 는 (12)에서와 같이 유한한 값으로 제한되게 되고, 이 범위 안에서 x_1 은 $g(x)$ 의 부호가 바뀌는 방향으로 향하면, 그 과정에서 증가할 수 있는 크기에 제한이 있으므로 x_1 도 안정하다. 또한 (12)-(15)로부터 x_1 은 다음과 같이 제한됨을 쉽게 알 수 있다.

$$\left| \lim_{k \rightarrow \infty} x_1(k_1) \right| \leq \frac{1}{c_1} \frac{|\gamma_2 K|}{1-|d|} + \frac{2|v\gamma_2 K|}{(1-|d|)^2}. \quad (17)$$

위 정리로부터 (8)에 주어진 조건만 판별하면 (4)로 주어

진 시스템의 안정도를 판별할 수 있음을 알 수 있다. 이제 제안된 판별법이 샘플링 시간이 짧은 시스템에도 적용 가능함을 알아보자.

비고 2: 비고 1에서 샘플링 시간이 짧아지면 Φ , Γ 는 다음과 같이 근사화 할 수 있음을 알았다.

$$\Phi \approx \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1-c_1h \end{bmatrix}, \quad \Gamma \approx \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix}. \quad (18)$$

이 경우 $d=1-c_1h$ 이므로 $|d|=|1-c_1h| < 1$ 을 만족하면 전체 시스템이 안정함을 알 수 있다. 따라서 샘플링 시간 h 가 충분히 짧으면 항상 안정함을 알 수 있다. 실제 시스템을 구현하는 경우를 살펴보면, 일반적으로 연속시간 영역에서 안정하도록 설계된 제어를 샘플치 시스템으로 적용할 때 샘플링 시간이 매우 짧으면 비슷한 성능을 나타내므로 실제 환경과 부합하는 결과임을 알 수 있다.

IV. 예제

예제 1: $a_1 = a_2 = 0$, $c_1 = 1$, $K=1$ 이고 샘플링 주기가 $h = 0.001$ 초인 경우에 근사화하지 않은 Φ , Γ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 9.9950 \times 10^{-4} \\ 0 & 0.999 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 5.000 \times 10^{-7} \\ 1.000 \times 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

따라서 $|d|=0.999 < 1$ 이 만족되므로 안정한 시스템으로 판별된다. 그러나 기존의 판별법을 적용하게 되면 (6)의 두 번째 부등식이 성립하지 않으므로 판별이 불가능하다. 실제로 이 시스템을 모의실험하면 다음과 같은 상태 궤적을 얻을 수 있다.

같은 시스템에 대해서 샘플링 주기가 보다 긴 경우에 대해서 살펴보자. $h = 0.1$ 초로 한 경우에 근사화하지 않은 Φ , Γ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0.095 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

따라서 $|d|=0.9 < 1$ 이 만족되므로 안정한 시스템이라 판별된다. 그러나 기존의 판별법을 적용하게 되면 (6)의 두 번째 부등식이 여전히 성립하지 않으므로 판별이 불가능하다. 이 경우에 대해서 시스템을 모의실험하면 다음과 같은 상태 궤적을 얻을 수 있다.

예제 2: $a_1 = 10$, $a_2 = -1$, $c_1 = 1$, $K=1$ 이고 샘플링 주기가 $h = 0.1$ 초인 경우에 근사화하지 않은 Φ , Γ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0.0931717 \\ 0 & 0.845296 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0.00512769 \\ 0.103427 \end{bmatrix}.$$

따라서 $|d|=0.845296 < 1$ 이 만족되므로 안정한 시스템으로 판별된다. 그러나 기존의 판별법을 적용하게 되면 (6)의 두 번째 부등식이 성립하지 않으므로 판별이 불가능하다. 실제로 이 시스템을 모의실험하면 다음과 같은 상태 궤적을 얻을 수 있다.

같은 시스템에 대해서 샘플링 주기가 더 길어서 불안정해지는 경우에 대해서 살펴보자. $h = 0.595$ 초로 한 경우의

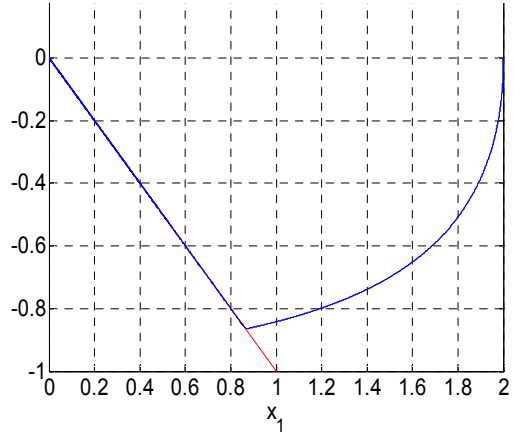


그림 1. 상태 궤적 ($h = 0.001$).
Fig. 1. The phase portrait ($h = 0.001$).

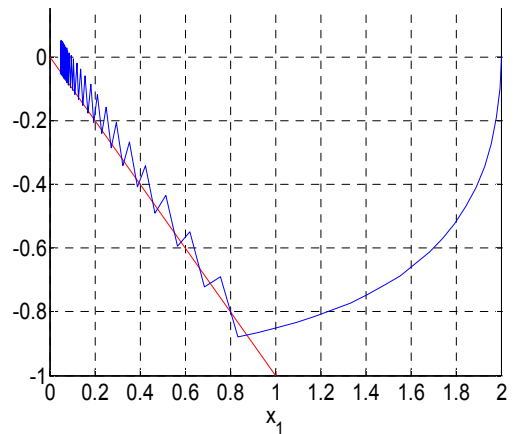


그림 2. 상태 궤적 ($h = 0.1$).
Fig. 2. The phase portrait ($h = 0.1$).

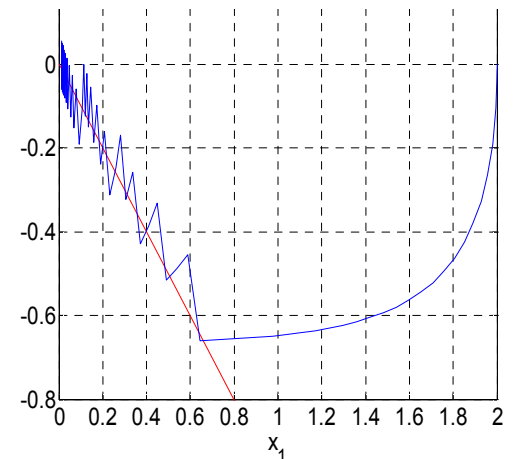


그림 3. 상태 궤적 ($h = 0.1$).
Fig. 3. The phase portrait ($h = 0.1$).

Φ , Γ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0.0959599 \\ 0 & -1.00163 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0.158806 \\ 0.413572 \end{bmatrix}.$$

따라서 $|d|=|-1.00163| > 1$ 이므로 제안된 판별법을 적용

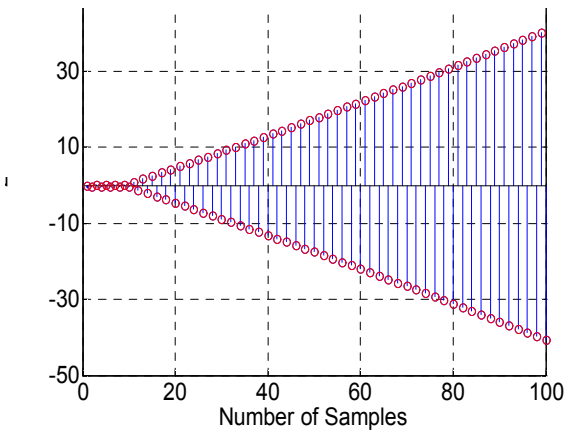


그림 4. 상태변수 $(x_2(k))(h=0.595)$.

Fig. 4. The state variable $(x_2(k))(h=0.595)$.

할 수 없다. 그러나 (11)의 두 번째 수식으로부터 $|d| > 1$ 이면 $x_2(k)$ 에 대한 시스템의 극점이 불안정한 영역에 있게 되므로 불안정할 것이라는 것을 알 수 있다. 실제로 이 시스템을 모의실험하면 그림과 같이 $x_2(k)$ 가 발산하는 모습을 볼 수 있다.

위 예제들에서 살펴본 바와 같이, 제안된 안정도 판별법은 기존의 판별법에 비해서 매우 손쉽게 적용할 수 있음을 알 수 있다. 아울러 기존의 판별법을 적용할 수 없는 경우에 대해서도, 제안된 판별법은 적용될 수 있는 경우가 있음을 알 수 있었다.

V. 결론

본 논문에서는 연속시간 영역에서 설계한 일반적인 슬라이딩 모드 제어를 샘플치 시스템으로 구현할 때, 전체 시스템의 안정도를 쉽게 판별할 수 있는 간단한 판별법을 제안하였으며, 제안된 방법의 타당성을 여러 예제를 통해 확인하였다.

참고문헌

- [1] V. I. Utkin, "Variable structure systems with sliding mode," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 22, no. 2, pp. 212-222, 1977.
- [2] J. J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, 1990.
- [3] J. Y. Hung, W. Gao, and J. C. Hung, "Variable structure control: a survey," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol. 40, no. 1, pp. 2-22, 1993.

- [4] C. Edwards and S. K. Spurgeon, *Sliding Mode Control*, CRC, 1998.
- [5] X. Yu and G. Chen, "Discretization behaviors of equivalent control based sliding-mode control systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 48, no. 9, pp. 1641-1646, 2003.
- [6] X. Yu, B. Wang, Z. Galias, and G. Chen, "Discretization effect on equivalent control-based multi-input sliding-mode control systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 53, no. 6, pp. 1563-1569, 2008.
- [7] H. -Y. Park, Y. -H. Jo, and B. -K. Park, "The ultimate bound of discrete sliding mode control system with short sampling period for DC motor system," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems*, vol. 16, no. 3, pp. 245-248, 2010.



박흥용

2008년 고려대학교 제어계측공학과 졸업(공학사). 2010년 동 대학원 석사. 2010년~현재 삼성전자. 관심분야는 비선형제어, 샘플치 시스템, 생체신호 등.



조영훈

2009년 고려대학교 제어계측공학과 졸업. 2009년~현재 고려대학교 대학원 제어계측공학과 메카트로닉스전공 석사과정 재학중. 관심분야는 비선형제어, 디지털제어 등.



박강박

1990년 고려대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1992년 한국과학기술원(KAIST) 전기 및 전자공학과(공학석사). 1997년 동 대학원 박사. 1997년~1999년 2월 정보전자연구소 연구원. 1997년 12월~1999년 2월 큐슈공업대학(KIT) 객원교수. 1999년 3월~현재 고려대학교 제어계측공학과 교수. 관심분야는 비선형제어, 슬라이딩모드제어, 샘플치 시스템, 로봇제어 등.