

<학술논문>

DOI:10.3795/KSME-B.2011.35.3.287

ISSN 1226-4881

누출된 액체의 증발과 확산에 관한 1차 섭동해

김명배*† · 도규형* · 한용식* · 최병일*

* 한국기계연구원 플랜트안전신뢰성연구실

First-Order Perturbation Solutions for Liquid Pool Spreading with Vaporization

Myungbae Kim*†, Kyuhyung Do*, Yongshik Han* and Byungil Choi*

* Division of Plant Safety and Reliability, Korea Institute of Machinery & Materials

(Received October 19, 2010 ; Revised November 29, 2010 ; Accepted November 30, 2010)

Key Words: Perturbation(섭동), Liquid Pool(액체풀), Release(누출), Vaporization(증발), Spreading(확산)

초록: 증발하면서 원형으로 퍼져가고 있는 액체에 대한 모델을 지배하는 연립 상미분 방정식은 지금까지 수치해석적인 방법으로 풀어 왔는데 본 연구에서 섭동해를 최초로 구하였다. 액체의 순간적인 누출과 연속적인 누출에 대하여 섭동 변수로써 단위면적 당 증발률을 사용하여 1차항까지 섭동해를 구하였다. 1차 섭동해의 계산 결과 풀의 부피에 대하여 초기에는 수치해와 잘 일치 하였으나 후기에는 약간의 차이가 존재하였으며 풀의 반경에 대하여는 두가지 종류의 해가 거의 일치 하였다.

Abstract: We solve the simple physical model for liquid pool spreading with vaporization semi-analytically for the first time, using perturbation techniques. The results are compared with those obtained using numerical methods. We use the evaporation rate per unit area as a perturbation parameter, and first-order solutions are obtained for continuous and instantaneous release. The two solutions are nearly identical with respect to the pool radius. The pool volumes are nearly the same at the early stage of the spread and then start to diverge.

- 기호설명 -

- g : 중력가속도(m/s^2)
- h : 풀의 높이(m)
- r : 풀의 반경(m)
- V : 풀의 부피(m^3)
- t : 시간(s)
- a : $2g \Delta(m/s^2)$
- β : 연속 누출률(m^3/s)
- Δ : 1 또는 $1 - \rho / \rho_w$
- ϵ : 단위면적당 증발률(m/s)
- ρ : 액체의 밀도(kg/m^3)
- ρ_w : 물의 밀도(kg/m^3)

하첨자

- i : 초기조건
- 0 : 영차항

- 1 : 1차항
- 2 : 2차항

1. 서론

액상의 가연성이나 유독성 물질을 취급하고 있는 산업 플랜트에서 액체가 누출되면 그 액체는 증발하면서 특정 표면을 퍼져나가는데, 증발된 기체는 증기운 폭발(vapor cloud explosion)의 원인이 될 수 있으며, 표면위의 액체는 풀화재(pool fire) 또는 폭발의 근거가 될 수 있다. 배관에서 분사 형태로 누출되면 분사화재(spray fire)가 된다. 연소된 가스는 연기가 되어 대기의 흐름에 의하여 주변으로 확산하게 된다. 이와 같이 산업 플랜트에서의 중대 사고는 가연성 또는 유독성 물질의 누출로부터 시작되기 때문에 누출된 액체의 퍼짐에 대한 연구는 액화수소나 LNG 플랜트 등의 위험도를 정량화하기 위하여 필수적이다.

액체의 분산과정에 대한 여러 가지 모델에 대하여 많은 수치해석적 연구가 있다. 그 모델들에

† Corresponding Author, mbkim@kimm.re.kr

는 비교적 간단한 모델로부터 3차원의 완전한 보존식⁽¹⁾을 이용한 모델까지 여러 종류가 있지만, 잘 알려진 얇은층(shallow layer) 모델⁽²⁻⁵⁾은 중간 정도의 복잡함을 가진다고 평가할 수 있다. 이 모델은 축대칭 가정하에 액체질의 속도와 높이를 반경과 시간에 대하여 푸는 편미분 방정식이다. 물리적으로 가장 간단한 모델⁽⁶⁾은 액체의 퍼짐을 시간변화에 따른 풀직경의 변화로 보는 것이며, 이 때 풀의 높이는 풀의 반경에 대하여 일정하다고 가정한다. 그 결과로 시간을 독립변수로 하는 2개의 상미분 방정식과 1개의 대수 방정식으로 정리된다.

본 연구에서는 지금까지 수치해석 방법에 의존하여 왔던 간단한 모델⁽⁶⁾에 대한 상미분 방정식과 대수 방정식을 섭동법을 이용하여 준 해석적(semi-analytic)인 해를 구하였다. 증발하지 않는 경우에만 해석적인 해를 구할 수 있다고 알려져 있지만, 여기에서는 단위면적당 증발률을 섭동 변수로 사용하여 1차 섭동해를 유도하였다.

2. 지배 방정식 및 정식화

물리적으로 그리고 수학적으로 가장 간단한 모델은 중력에 의한 압력차에 의하여 액체가 퍼져나간다고 가정하는 것이다. 이 때 액체의 마찰력과 표면장력 등은 무시한다. 액체의 마찰력은 퍼짐을 억제하기 때문에 안전 측면에서 고려하면 마찰력을 무시하는 것이 설계의 안전 계수를 높이게 된다. 퍼지고 있는 액체를 반경과 균일한 높이를 갖는 원형 실린더라 가정하면 지배 방정식은 다음과 같이 표현된다.⁽⁶⁾ 실린더가 아닐 경우는 해석적인 접근이 어려워 수치적인 방법이 필요하다.

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\alpha h} \quad (1)$$

g 는 중력가속도이며, 콘크리트나 흙의 표면 위를 액체가 퍼져가는 경우는 $\Delta=1$ 이다. 물의 표면 위를 퍼져가는 경우에는 $\Delta=1-\rho/\rho_w$ 이다.

액체의 부피는 다음과 같이 단위면적당 증발률을 사용하여 표현된다.

$$\frac{dV}{dt} = -\epsilon \pi r^2 + \beta \quad (2)$$

여기에서 β 는 연속 누출의 경우를 의미하는 연속 누출률이다. 따라서 순간 누출의 경우에는 $\beta=0$ 이다.

마지막으로 다음과 같은 대수 방정식이 필요하다.

$$h = V/\pi r^2 \quad (3)$$

위의 식 (2)에서 증발률 ϵ 은 보통 매우 작은 값을 가지는데 LNG의 경우 10^{-4} order이다.⁽³⁾ 따라서 자연스럽게 ϵ 을 섭동변수(perturbation parameter)로 선택하고, 다음과 같이 해의 형태를 가정한다.

$$V = V_0 + \epsilon V_1 + \epsilon^2 V_2 + \dots \quad (4)$$

$$r = r_0 + \epsilon r_1 + \epsilon^2 r_2 + \dots \quad (5)$$

$$h = h_0 + \epsilon h_1 + \epsilon^2 h_2 + \dots \quad (6)$$

식 (5)와 (6)을 식 (1)에 대입하고 $O(\epsilon)$ 까지만 정리하면 다음의 식들이 얻어진다.

$$\frac{dr_0}{dt} = \sqrt{\alpha h_0} \quad (7)$$

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha} \frac{h_1}{\sqrt{h_0}} \quad (8)$$

식 (4)와 (5)를 식 (2)에 대입하고 동일한 방법으로 정리하면 부피에 관한 다음의 식들이 유도된다.

$$\frac{dV_0}{dt} = \beta \quad (9)$$

$$\frac{dV_1}{dt} = -\pi r_0^2 \quad (10)$$

마지막으로 동일한 방법을 사용하여 식 (3)으로부터 높이에 관한 식들이 구해진다.

$$h_0 = \frac{V_0}{\pi r_0^2} \quad (11)$$

$$h_1 = \frac{V_1}{\pi r_0^2} \quad (12)$$

식 (7)부터 (12)까지가 원래의 3개 방정식 (1),

(2)와 (3)을 대체한 것으로, 따라서 초기조건도 2배로 늘어나야 한다.

3. 초기조건 및 해법

3.1 순간 누출(instantaneous release)

액체가 보관되어있는 탱크에 충격에 의하여 비교적 큰 구멍이나 틈이 발생하면, 비교적 많은 양의 액체가 순간적으로 쏟아져 나온다. 이러한 상황은 다음과 같은 초기 조건에 의하여 모델링된다.

$$V = V_i, r = r_i, h = h_i \left(= \frac{V_i}{\pi r_i^2} \right) \text{ at } t = 0 \quad (13)$$

$O(\epsilon^2)$ 이상을 무시하고 식 (13)을 식 (4)~(6)에 적용하면서, 인위적으로 1차항의 초기치를 0으로 하면 다음과 같은 초기 조건들이 얻어진다.

$$V_0 = V_i, r_0 = r_i, h_0 = h_i \text{ at } t = 0 \quad (14)$$

$$V_1 = 0, r_1 = 0, h_1 = 0 \text{ at } t = 0 \quad (15)$$

식 (7)~(12)를 주어진 초기조건 (14) 및 (15)를 적용하여 풀면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$r_0 = \sqrt{a+bt} \quad (16)$$

$$r_1 = \frac{\pi^{3/2} r_i^2}{6\sqrt{\alpha} V_i^{3/2}} \left(a - \frac{b}{2}t \right) \sqrt{a+bt} - \frac{\alpha}{15b^3} (8a^2 - 4abt + 3b^2t^2) \sqrt{a+bt} - \frac{\pi^{3/2} r_i^5}{10\sqrt{\alpha} V_i^{3/2}} \quad (17)$$

$$V_0 = V_i \quad (18)$$

$$V_1 = -\pi \left(at + \frac{b}{2}t^2 \right) \quad (19)$$

$$h_0 = \frac{V_i}{\pi(a+bt)} \quad (20)$$

$$h_1 = -\frac{\left(a + \frac{b}{2}t \right) t}{a+bt} \quad (21)$$

여기에서 $a = r_i^2$, $b = 2(\alpha V_i/\pi)^{1/2}$ 이다.

3.2. 연속누출(continuous release)

순간 누출에 비하여 상대적으로 적은 양이 장시간 누출되는 경우를 의미한다. 주로 배관이나 탱크에 발생된 균열에 의하여 배출되는 형태이다. 이러한 경우에는 다음과 같은 초기조건이 적용된다.

$$V = 0, r = 0, h = 0 \text{ at } t = 0 \quad (22)$$

순간누출의 경우와 동일한 방법으로 0차항들에 대한 초기조건들이 다음 식으로 구해진다.

$$V_0 = 0, r_0 = 0, h_0 = 0 \text{ at } t = 0 \quad (23)$$

$$V_1 = 0, r_1 = 0, h_1 = 0 \text{ at } t = 0 \quad (24)$$

식 (7)~(12)를 주어진 초기조건 (23) 및 (24)를 적용하여 풀면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$r = \left(\frac{16\alpha\beta}{9\pi} \right)^{1/4} t^{3/4} - \epsilon \frac{8\sqrt{3}}{135} \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^{1/4} \alpha^{3/4} t^{9/4} \quad (25)$$

$$V = \beta t - \epsilon \frac{8}{15} \sqrt{\pi\alpha\beta} t^{5/2} \quad (26)$$

$$h = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\beta}{\pi\alpha}} \frac{1}{\sqrt{t}} - \epsilon \frac{2}{5} t \quad (27)$$

4. 결과 및 토의

섭동법을 이용한 해의 타당성을 검증하기 위하여 Fig. 1에 시간에 따른 풀의 반경 변화를 제시하였다. 여기에서 수치해석적인 방법에 의한 계산은 Runge-Kutta 방법을 이용하였기 때문에 Runge-Kutta로 표시되어 있으며, 본 연구에서 얻어진 섭동해는 perturbation으로 표시되어 있다. 증발이 없는 경우에는 완전히 해석적인 해가 존재하며, 이 해는 섭동해의 0차항과 동일하여 non-evaporation으로 표현되어 있다. 계산 조건은 LNG가 콘크리트 표면위를 확산해 가는 경우이며, $\epsilon = 4.2 \times 10^{-4}$ m/s이고, 밀도는 420 kg/m^3 이다.

계산결과로부터 누출초기에는 비증발의 경우와 일치하고 있는 것을 알 수 있다. 즉 반경이 작은

누출 초기에는 증발되는 양도 작아서 비증발의 경우와 차이가 거의 없게 된다. Runge-Kutta 방법을 이용한 해도 Fig. 1에 같이 제시하였는데, 섭동해보다 약간 큰 값을 보이고 있다. 섭동해의 경우 2차항 이상을 무시한 해이다.

액체의 부피를 계산한 결과는 Fig. 2에 제시하였다. 반경과 마찬가지로 섭동해의 경우가 Runge-Kutta 방법에 의한 수치해보다 작게 예측되었다.

순간누출의 경우는 시간 증가에 따라 부피가 계속적으로 감소할 수밖에 없으나, 연속 누출의 경우 누출 초기에는 증발량이 작기 때문에 부피가 증가하지만 시간이 경과하여 풀의 반경이 커지게 되면 증발량이 많아져 결국 부피가 감소하게 된다. 초기에는 2가지 해가 일치하지만 섭동해의 경우 2차항 이상이 생략되었기 때문에 시

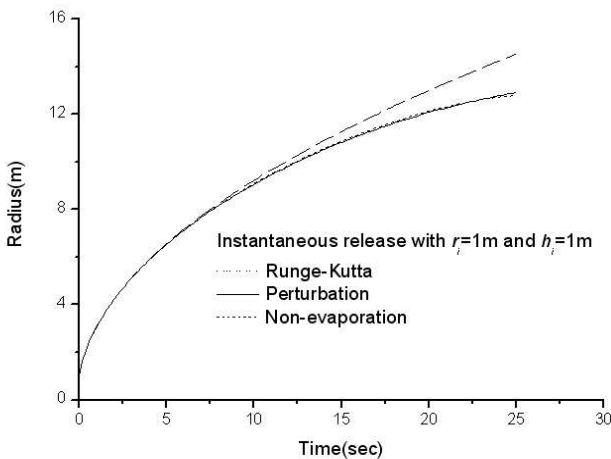
간이 증가하면 그 차이가 커지게 되는데, Fig. 1과 Fig. 2로부터 부피에 비하여 반경에 대한 2가지 해의 차이가 작은 것을 알 수 있다.

섭동해를 이용하면 누출된 액체가 완전히 증발하는데 필요한 시간을 해석적으로 구할 수 있는데, $V=0$ 이 되는 순간으로, 다시 표현하면 $V_0 + \epsilon V_1 = 0$ 이 되는 순간이다. 순간 누출의 경우 다음과 같이 표현된다.

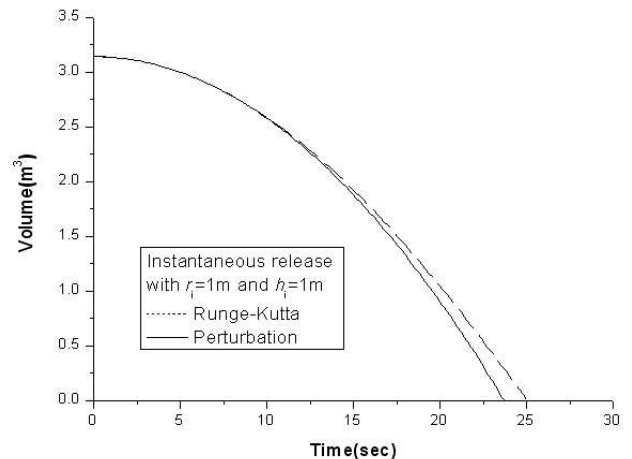
$$t_{eva}^{ins} = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\frac{\pi r_i^4}{\alpha V_i}} + \sqrt{\frac{\pi r_i^4}{\alpha V_i} + \frac{4}{\epsilon} \sqrt{\frac{V_i}{\pi \alpha}}} \right) \quad (28)$$

연속 누출의 경우에는 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

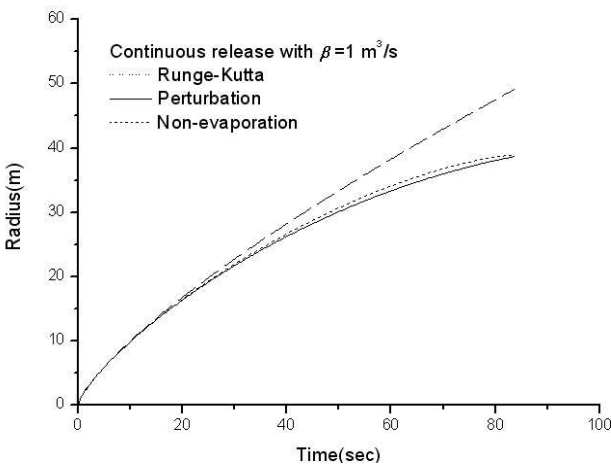
$$t_{eva}^{con} = \left(\frac{15}{8\epsilon} \sqrt{\frac{\beta}{\pi \alpha}} \right)^{2/3} \quad (29)$$



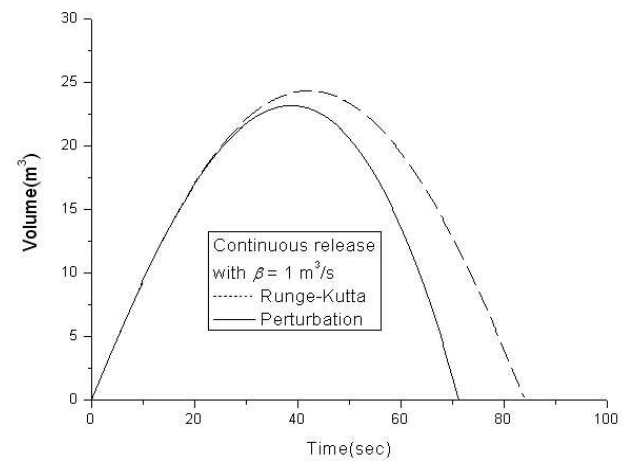
(a) Instantaneous release



(a) Instantaneous release



(b) Continuous release



(b) Continuous release

Fig. 1 The pool radius vs. time

Fig. 2 The pool volume vs. time

연속 누출에서 부피가 최대가 되는 순간은 다음 식으로 표현된다.

$$t_{\max}^{\text{con}} = \left(\frac{3}{4\epsilon} \sqrt{\frac{\beta}{\pi\alpha}} \right)^{2/3} \quad (30)$$

따라서 다음과 같은 식도 도출된다.

$$\frac{t_{\text{eva}}^{\text{con}}}{t_{\max}^{\text{con}}} = \left(\frac{5}{2} \right)^{2/3} \cong 1.84 \quad (31)$$

2가지 경우 완전히 증발하는 시간은 풀의 부피 또는 높이가 0이 되는 시간을 구한 것이다. 즉 섭동해의 경우 부피가 0이 되는 시간이 높이가 0이 되는 시간임을 보여주고 있어, 섭동해가 물리적으로 타당함을 알 수 있다. 연속 누출의 경우에는 식 (26)-(27)을 이용하여 부피와 높이가 0이 되는 시간을 구하여 위의 사실을 알 수 있게 된다.

5. 결 론

본 연구는 산업 화재분야에서의 정량적 위해도 분석(quantitative risk assessment)을 위한 기본적인 연구로써 누출된 액체가 퍼져 나가는 상황을 모델링한 방정식을 최초로 섭동법에 의하여 해를 구해서 다음과 같은 내용을 알게 되었다.

- (1) 2가지 누출의 모든 경우에 초기에는 증발량이 작아서 비증발의 경우와 해가 거의 일치한다.
- (2) 비증발의 경우 해는 증발의 경우의 섭동해의 0차항과 동일하다.
- (3) 섭동해와 수치해의 경우 반경보다 부피에 관한 해의 차이가 크다.
- (4) 순간누출의 경우에는 풀의 부피가 계속적으로 감소하지만, 연속누출의 경우 초기에는 증발량이 작기 때문에 풀의 부피가 증가하다가 증발

량이 많아지면 부피는 감소하게 된다. 즉 부피가 최대가 되는 순간이 존재한다. 연속누출의 경우에는 지배 방정식에 소멸항(sink term) 과 생성항(source term)이 동시에 존재하기 때문이다.

(5) 2가지 경우 완전 증발에 걸리는 시간을 해석적으로 구할 수 있다.

참고문헌

- (1) Venetsanos, A. G. and Bartzis, J. G., 2005, "CFD Modelling of Large-Scale LH2 Spills in Open Environment," *Proceedings of International Conference on Hydrogen Safety*, Pisa, Italy, pp. 125~136.
- (2) Stein, W. and Ermak, D. L., 1980, "One-Dimensional Numerical Fluid Dynamics Model of the Spreading of Liquefied Gaseous Fuel (LGF) on Water," *Lawrence Livermore National Laboratory*, UCRL-53078.
- (3) Verfondern, K. and Dienhart, B., 1997, "Experimental and Theoretical Investigation of Liquid Hydrogen Pool Spreading and Vaporization," *Int. J. Hydrogen Energy*, Vol. 22, No. 7, pp. 649~660.
- (4) Brandeis, J. and Kansa, E., 1983, "Numerical Simulation of Liquefied Fuel Spills: I. Instantaneous Release into a Confined Area," *Int. J. Num. Methods in Fluids*, Vol. 3, pp. 333~345.
- (5) Brandeis, J. and Ermak, D., 1983, "Numerical Simulation of Liquefied Fuel Spills:II. Instantaneous and Continuous LNG Spills on an Unconfined Water Surface," *Int. J. Num. Methods in Fluids*, Vol. 3, pp. 347~361.
- (6) Briscoe, F. and Shaw, P., 1980, "Spread and Evaporation of Liquid," *Prog. Energy Comb. Sci.*, Vol. 6, pp. 127~140.