

이점 대각 이차 근사화 기법을 쌍대기법에 적용한 순차적 근사 최적설계

박선호* · 정상진* · 정승현* · 최동훈*†

* 한양대학교 기계공학과

Sequential Approximate Optimization by Dual Method Based on Two-Point Diagonal Quadratic Approximation

Seonho Park*, Sangjin Jung*, Seung-hyun Jeong* and Dong-Hoon Choi*†

* School of Mechanical Engineering, Hanyang Univ.

(Received September 15, 2010 ; Revised January 6, 2011 ; Accepted January 7, 2011)

Key Words: Convexity(볼록성), Duality Method(쌍대기법), Separability(분리성), Sequential Approximate Optimization(순차적 근사 최적설계), Topology Optimization(위상 최적설계), Two-Point Diagonal Quadratic Approximation(이점 대각 이차 근사화 기법)

초록: 본 논문에서는 SD-TDQAO (Sequential Dual - Two-point Diagonal Quadratic Approximate Optimization)라는 쌍대기법을 이용한 순차적 최적설계 알고리즘을 제안한다. 이 방법은 비선형 목적함수와 제한조건이 포함되어 있는 공학적인 문제를 효과적으로 풀 수 있도록 하는데 목적이 있다. 기존의 볼록성과 분리성이 만족되지 않는 eTDQA2 방법을 이용하여 쌍대기법에 이용할 수 있도록 이차 근사함수의 헤시언 대각 요소에 이를 적용하여 쉽게 볼록성과 분리성을 보장할 수 있도록 하였다. 또한 이를 수학적 예제와 위상 최적설계문제를 통해 기존의 쌍대기법 알고리즘인 MMA와의 비교로 그 성능을 입증하였다.

Abstract: We present a new dual sequential approximate optimization (SAO) algorithm called SD-TDQAO (sequential dual two-point diagonal quadratic approximate optimization). This algorithm solves engineering optimization problems with a nonlinear objective and nonlinear inequality constraints. The two-point diagonal quadratic approximation (TDQA) was originally non-convex and inseparable quadratic approximation in the primal design variable space. To use the dual method, SD-TDQAO uses diagonal quadratic explicit separable approximation; this can easily ensure convexity and separability. An important feature is that the second-derivative terms of the quadratic approximation are approximated by TDQA, which uses only information on the function and the derivative values at two consecutive iteration points. The algorithm will be illustrated using mathematical and topological test problems, and its performance will be compared with that of the MMA algorithm.

1. 서 론

최적설계란 주어진 조건하에서 요구되는 성능을 만족하도록 하는 일련의 과정을 일컫는다. 이 중 공학문제의 최적설계는 성능에 관한 요구조건들을 만족하도록 제품의 치수 및 형상 등을 결정하는 과정을 말하는데 대개의 경우 비선형적인 특성을 갖는다. 이러한 최적설계문제를 정식화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \min & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} & f_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m, \\ & x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1)$$

이때 $f_0(\mathbf{x})$ 는 목적함수를 의미하고, $f_j(\mathbf{x})$ 는 m 개의 독립적인 제한조건을 의미하며, 이들은 n 개의 서로 독립적인 설계변수에 의해 결정된다. 또한 설계변수는 x_i^L 과 x_i^U 의 경계 제한조건 (bound constraint)으로 구속되어 있다. 목적함수와 제한조건은 연속적이며 미분가능한 특성을 가졌다고 가정하였을 때 그것의 함수값과 도함수값의 평

† Corresponding Author, dhchoi@hanyang.ac.kr
© 2011 The Korean Society of Mechanical Engineers

가는 유한요소해석(Finite Element Analysis, FEA)과 민감도해석(Design Sensitivity Analysis, DSA) 등을 통하여 결정되므로 수치적인 비용을 가진다.

순차적 근사 최적설계(Sequential Approximate Optimization, SAO)는 이러한 비용문제를 근사화라는 개념을 도입하여 반복적 최적화 과정과 실제 해석과정을 분리시키고, 실제 유한요소해석을 근사 모델의 해석으로 대체하여 해결하는 방법이다.

이 중 쌍대기법(dual method)을 이용한 방법은 설계변수의 개수가 제한조건의 개수보다 많은 최적설계 문제를 푸는데 적합한 것으로 알려져 있다.

본 논문에서는 2008년 김종립 등⁽¹⁾에 의해 개발된 향상된 이점 대각 이차 근사화 기법 2 (enhanced Two-point Diagonal Quadratic Approximation-2, eTDQA-2)를 이용하여 쌍대기법을 이용한 순차적 근사 최적화 알고리즘을 도출하였다.

2. 쌍대기법을 활용한 순차적 근사 최적설계

2.1 순차적 근사 최적설계

순차적 근사 최적설계란 설계점에서 다음과 같은 원-하위문제(primal-subproblem)를 계속적으로 풀며, 최적점(optimum point)을 찾아가는 일련의 과정을 의미한다.

$$\begin{aligned} \min \quad & \tilde{f}_0(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} \quad & \tilde{f}_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j=1, \dots, m, \\ & x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad i=1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2)$$

이 때 원-하위문제를 구성하는 근사함수는 각 k 번째 반복과정에서의 설계점(iteration point) $\mathbf{x}^{(k)}$ 에서 구성된 근사함수를 의미한다. 이러한 근사함수는 순차적 근사 최적설계의 방법에 따라 근사함수의 정확도를 고려한 근사함수^(1~4)와 쌍대 기법의 적용을 위한 근사함수^(5~7)로 나눌 수 있다. 이 중 쌍대 기법의 적용을 위한 근사함수는 볼록성(convexity)과 분리성(separability)을 만족시켜야만 효과적인 쌍대기법에 적용할 수 있으며, 이와 동시에 실제함수를 정확히 모사하여야 한다

2.2 쌍대기법

쌍대기법이란 설계변수의 개수가 제한조건보다 과도하게 많은 문제에 대해 설계공간(design space)을 줄임으로써 설계의 편의성의 향상을 도모하는

방법이다.

앞서 설명된 식 (2)에 라그랑지안을 적용하면 다음과 같다.

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \tilde{f}_0(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \tilde{f}_j(\mathbf{x}) \quad (3)$$

이때 λ_j 은 $\lambda_j \geq 0$ 으로써, 각 제한조건에 대한 라그랑지 승수(lagrangian multiplier)를 의미하며 동시에 뒤에서 설명될 쌍대-하위문제 (dual-subproblem)의 쌍대변수(dual variable)를 의미한다. 이와 비견되어 기존의 설계변수를 원변수(primal variable)로 부르기도 한다.

원-하위문제에 이용되는 근사함수가 볼록성과 분리성을 만족시킬 경우, 원변수는 쌍대변수로 표현이 가능하다. 이때 원-하위문제는 다음과 같은 쌍대-하위문제로 대체될 수 있다.

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\lambda}} \quad & l(\boldsymbol{\lambda}) = L(\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{\lambda}) = \tilde{f}_0(\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda})) \\ & + \sum_{j=1}^m \lambda_j \tilde{f}_j(\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda})) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{subject to} \quad \lambda_j \geq 0 \quad j=1, \dots, m$$

이때의 $\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda})$ 의 관계는 KKT 조건 (Karush-Kuhn-Tucker condition)의 정지조건(stationary condition)으로부터 유도가 가능하다.

위와 같은 쌍대-하위문제는 설계변수의 개수가 m 개이기 때문에 원변수의 개수가 설계변수의 개수보다 큰 문제의 경우에 효과적인 최적설계를 가능하게 해준다. 이때 근사함수의 볼록성은 쌍대-하위문제가 유일해를 갖게 해주어 쌍대문제의 해를 원문제의 해와 동일하도록 보장해준다. 또한 분리성은 n 차원의 설계문제를 n 개의 1 차원 설계문제로 나누어 문제해결의 효율을 증가시킨다. 이러한 근사함수의 볼록성과 분리성의 확보는 효과적인 쌍대기법을 도입하기 위한 필요조건이 된다.

이외의 쌍대 문제에 대한 자세한 정보는 다음의 참고문헌에 구체적으로 소개되어 있다.^(8,9)

2.3 이차 근사 함수

하위문제를 구성하는 근사함수로 식 (5)와 같은 이차 근사함수(Quadratic Approximation, QA)를 이용하였다. 이때 이차 근사함수는 분리성을 만족시키기 위하여 헤시언행렬(Hessian matrix)의 비대각 요소(off-diagonal term)는 0이 되어야 하고, 볼록성을 만족시키기 위해서는 헤시언 대각요소가 모두 0보다 커야 한다.

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{QA}(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}^{(k)}) \\ &+ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^{(k)} (x_i - x_i^{(k)}) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h_i (x_i - x_i^{(k)})^2, \\ &\forall h_i \geq 0 \text{ for all } i \end{aligned} \quad (5)$$

이 때 각 설계점에서의 함수값과 도함수값은 다음과 같은 조건을 만족시킨다.

$$\tilde{f}(\mathbf{x}^{(k)}) = f(\mathbf{x}^{(k)}), \quad \frac{\partial \tilde{f}(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} \quad (6)$$

이 때, 이차 근사함수로 구성된 쌍대-하위문제의 $x_i(\boldsymbol{\lambda})$ 은 식 (5)와 식 (1)의 경계 제한조건으로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x_i(\boldsymbol{\lambda}) = \max \left(x_i^L, \min \left(x_i^U, x_i^{(k)} - \frac{\left(\frac{\partial f_0(x^{(k)})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial f_j(x^{(k)})}{\partial x_i} \right)}{\left(h_{i0}^{(k)} + \sum_{j=1}^m \lambda_j h_{ij}^{(k)} \right)} \right) \right) \quad (7)$$

이차 근사함수를 구성하는데 있어서 헤시언 대각 요소의 계산은 설계변수의 개수가 많을 경우 매우 시간이 많이 소요되는 작업이다. 따라서 적절한 근사가 필요하며, 본 논문에서는 이차 근사함수의 헤시언 대각요소를 eTDQA2의 헤시언 대각요소로 근사하였다.

3. 이점 대각 이차 근사화 기법의 적용

3.1 이점 대각 이차 근사화 기법

이점 대각 이차 근사화 기법(Two-point Diagonal Quadratic Approximation, TDQA)은 2001년 김민수 등⁽²⁾에 의하여 개발되었다. 또한 2008년 김종립 등⁽¹⁾에 의하여 기존의 근사화 기법이 이전 설계점과 현재 설계점에서의 도함수 부호가 다를 때 가지는 문제점들을 개선하여 eTDQA1과 eTDQA2를 개발하였고, 이 중 eTDQA2의 사용을 추천하였다.

따라서 본 논문에서는 eTDQA2를 사용하였으며 그 수식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{eTDQA2}(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}^{(k)}) \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_i^{(k)})}{\partial y_i} (y_i - y_i^{(k)}) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n G_i (y_i - y_i^{(k)})^2 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\left[\eta_e \sum_{i=1}^n H_i (y_i - y_i^{(k)})^2 \right]}{\left(\sum_{i=1}^n H_i (y_i - y_i^{(k-1)})^2 + \sum_{i=1}^n H_i (y_i - y_i^{(k)})^2 \right)} \end{aligned} \quad (8)$$

eTDQA2를 자세히 살펴보면, $y_i = x_i^{a_i}$ 으로 비선형성을 표현하기 위해 Fadel 등⁽⁴⁾에 의해 도입된 매개변수(intervening variable)로 이때의 a_i 는 현재 설계점에서 구성된 eTDQA2의 식 (9)와 같은 이전 설계점의 도함수 일치조건을 이용하여 식 (10)과 같이 결정된다. 이때의 $(\partial f / \partial x_i)^{(k)}$ 는 $(\partial f(\mathbf{x}^{(k)}) / \partial x_i)$ 의 축약형이다.

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} \right)^{(k-1)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^{(k-1)} \quad (9)$$

$$a_i = 1 + \ln \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^{(k-1)} / \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^{(k)} \right\} / \quad (10)$$

$$\ln \left\{ \left(x_i^{(k-1)} \right) / \left(x_i^{(k)} \right) \right\}, i = 1, 2, \dots, n,$$

또한 식 (8)의 G_i 는 a_i 가 식 (10)와 같이 계산이 되지 않을 때, 강제적으로 도함수를 일치시키기 위하여 다음과 같이 결정된다.

$$G_i = \frac{1}{y_i^{(k-1)} - y_i^{(k)}} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \right)^{(k-1)} - \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \right)^{(k)} \right) \quad (11)$$

식 (8)의 η_e 는 이전 설계점에서의 함수값을 일치시키는 조건으로 다음과 같이 결정된다.

$$\begin{aligned} \eta_e &= 2 \left[f(\mathbf{x}^{(k-1)}) - f(\mathbf{x}^{(k)}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \right)^{(k)} (y_i^{(k-1)} - y_i^{(k)}) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

H_i 는 매우 강한 비선형성을 표현하기 위하여 다음과 같이 결정된다.

Table 1 Determination of exponential terms in intervening variable in order to produce convex approximate function

a_i	$(\partial f(\mathbf{x}^{(k)}) / \partial x_i) \geq 0$		$(\partial f(\mathbf{x}^{(k)}) / \partial x_i) < 0$	
	$x_i^{(k)} \geq x_i^{(k-1)}$	$x_i^{(k)} < x_i^{(k-1)}$	$x_i^{(k)} \geq x_i^{(k-1)}$	$x_i^{(k)} < x_i^{(k-1)}$
(a) $\frac{(\partial f / \partial x_i)^{(k)}}{(\partial f / \partial x_i)^{(k-1)}} > 1$	식 (9)	3	-1	식 (9)
(b) $0 \leq \frac{(\partial f / \partial x_i)^{(k)}}{(\partial f / \partial x_i)^{(k-1)}} < 1$	3	식 (9)	식 (9)	-1
(c) $\frac{(\partial f / \partial x_i)^{(k)}}{(\partial f / \partial x_i)^{(k-1)}} < 0$	1	3	-1	1

● Current iteration point
● Previous iteration point

$$H_i = \begin{cases} G_i & \text{if } (\partial f / \partial x_i)^{(k-1)} \cdot (\partial f / \partial x_i)^{(k)} \leq 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}_{Q1}(\mathbf{x})}{\partial x_i^2} = h_i \cong \frac{\partial^2 \tilde{f}_{eTDQA2}(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i^2} \quad (15)$$

이외의 eTDQA2 에 대한 구체적인 내용은 본 논문에서는 생략하기로 한다.

3.2 쌍대 기법으로의 적용

eTDQA2 의 현재 설계점에서 이차도함수를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}_{eTDQA2}(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} \left[\frac{(a_i - 1) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^{(k)}}{x_i^{(k)}} \right] + \left[\frac{\eta_e H_i}{\left(\sum_{j=1}^n H_j \left((x_j^{(k)})^{a_j} - (x_j^{(k-1)})^{a_j} \right)^2 \right)} + G_i \right] & \text{if } i = j \\ \left[\frac{(a_i \cdot (x_i^{(k)})^{(a_i-1)})^2}{0} \right] & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (14)$$

식 (14)를 통하여 eTDQA2 는 그 자체 만으로 분리성을 만족하는 것을 확인할 수 있다.

이것을 이용하여 이차 근사함수의 헤시언 대각 요소를 다음과 같이 근사화한다.

식 (15)를 통하여 eTDQA2 는 그 자체 만으로 분리성을 만족하는 것을 확인할 수 있다.

이차 근사함수의 볼록성을 만족시키기 위해서는 근사된 헤시언 대각요소가 0 보다 커야 한다. 따라서 이에 대한 추가적인 작업을 수행하였다.

식 (14)의 $i=j$ 인 경우의 첫번째 항은 매개변수의 조작을 통해 헤시언 대각 요소를 0 보다 크게 하였다.

식 (10)에서 로그함수의 진수가 0 보다 작아 해석적으로 구할 수 없을 때인 Table 1 의 (c)의 경우와 (a)와 (b)의 실제함수가 이전 설계점과 현재 설계점 근방에서 오목할 것이라 예상되는 경우에는 식 (10)으로 매개변수를 결정하면 볼록성을 확보할 수 없으므로 이때의 볼록성을 확보하기 위하여 Table 1 을 따라 결정하도록 하였다.

이때의 임의의 값인 3, -1 혹은 1 등은 여러 시험문제를 통해 얻어진 학습적인 값들이다.

식 (14)의 $i \neq j$ 인 경우의 두번째 항에는 0 보다 크게 하는 조건을 부여하여 간단하게 볼록성을 확보하였다.

또한 이전 설계점과 현재 설계점에서 도함수값이 정확히 일치할 경우 선형문제라 가정하여 a_i 를 1로 결정하였다.

첫번째 반복과정에는 이전 설계점이 존재하지 않으므로 식 (14)의 $i=j$ 인 경우의 두번째 항을 0 으로 두고, a_i 는 다음과 같이 결정하였다.

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{if } (\partial f / \partial x_i)^{(k)} \geq 0 \\ -1 & \text{if } (\partial f / \partial x_i)^{(k)} < 0 \end{cases} \quad (16)$$

4. 수치적 절차

4.1 수치적 절차

본 논문에서 제안하는 SD-TDQAO 알고리즘은 다음과 같다. 이 알고리즘은 근사화된 이차 근사 함수를 쌍대기법에 적용한 순차적 근사 최적화 알고리즘이다.

※SD-TDQAO Algorithm

- Step 0**: 시작점($\mathbf{x}^{(0)}$)을 결정, $k=0$
- Step 1**: 시작점에서의 함수값, 도함수 값을 계산, $f_j(\mathbf{x}^{(0)}), \nabla f_j(\mathbf{x}^{(0)}), j=0,1,\dots,m$
- Step 2**: 식 (10)과 Table 1 을 이용하여 a_i 를 결정, 이차 근사함수(5)를 생성
- Step 3**: 쌍대-하위문제 (4)을 해결하여 최적점 탐색, $\mathbf{x}^{(k)*}$
- Step 4**: 이동제한(Move limit) 조건에 맞는 새로운 설계점 도출, $\mathbf{x}^{(k+1)}$
- Step 5**: 수렴조건 확인, 수렴되면 종료.
- Step 6**: 새로운 설계점에서의 함수값, 도함수 값을 계산, $f_j(\mathbf{x}^{(k+1)}), \nabla f_j(\mathbf{x}^{(k+1)}), j=0,1,\dots,m$
- Step 7**: $k=k+1$ 로 하고 Step 3 으로 돌아감.

Step 3 에서 쌍대-하위문제를 해결하는 알고리즘으로는 매틀랩의 옵티마이제이션 툴박스의 `fmincon` 혹은 `fminbnd` 코드를 사용하였다.

이때 사용되는 수렴조건은 다음과 같이 설계변수의 절대값 변화량을 이용한다.

$$\max_{i=1,\dots,n} \|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\| \leq \tau \quad (17)$$

또한 쌍대-하위문제를 풀었을 때 얻어지는 최적점에는 설계영역의 20%로 이동제한조건을 설정하였다.

$$\begin{aligned} x_i^{U(k)} &= x_i^{(k)*} + 0.2 \cdot (x_i^U - x_i^L) \\ x_i^{L(k)} &= x_i^{(k)*} - 0.2 \cdot (x_i^U - x_i^L) \end{aligned} \quad (18)$$

따라서 다음 설계점은 식 (19)와 같이 얻어진다.

$$x_i^{(k+1)} = \begin{cases} x_i^{(k)*} & \text{if } x_i^{L(k)} \leq x_i^{(k)*} \leq x_i^{U(k)} \\ x_i^{U(k)} & \text{if } x_i^{(k)*} > x_i^{U(k)} \\ x_i^{L(k)} & \text{if } x_i^{(k)*} < x_i^{L(k)} \end{cases} \quad (19)$$

이 논문에서 소개된 SD-TDQAO 의 성능비교를 위하여 가장 보편적으로 쓰이고 있는 이동 점근선 기법과 비교하였으며, 매틀랩을 이용하여 구현하였다. 이동 점근선 기법에 대한 정보는 참고문헌에 자세히 설명되어 있다. (6,7)

5. 예 제

5.1 캔티레버 빔 문제

본 논문에서 소개될 캔티레버 빔 문제는 1987년 Svanberg(6)가 이동 점근선 기법의 성능을 평가하기 위하여 소개한 문제로 다음과 같이 정식화할 수 있다.

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(\mathbf{x}) = c_1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \\ \text{subject to} \quad & f_1(\mathbf{x}) = 61/x_1^3 + 37/x_2^3 + 19/x_3^3 \\ & + 7/x_4^3 + 1/x_5^3 - c_2 \leq 0, \\ & 0.001 \leq x_i \leq 10 \quad i=1,2,3,4,5, \end{aligned} \quad (20)$$

또한 초기 설계점은 $\mathbf{x}^{(0)} = [5, 5, 5, 5, 5]^T$ 로 설정하였다. 주어진 문제에서 $c_1 = 0.0624$ 이며, $c_2 = 1.0$ 로 하였을 때, 주어진 문제의 최적점은 $\mathbf{x}^* = [6.016, 5.309, 4.494, 3.502, 2.153]^T$ 이다.

캔티레버 빔 문제에 대한 수렴조건의 τ 는 10^{-3} 으로 하였다.

Table 2 Cantilever beam problem results

MMA			SD-TDQAO		
Iter.	f_0	f_1	Iter.	f_0	f_1
0	1.5600	0.00E+00	0	1.5600	0.00E+00
1	1.2444	3.30E-01	1	1.4264	-8.47E-02
2	1.2410	3.28E-01	2	1.3247	2.07E-01
3	1.3077	9.82E-02	3	1.3787	-2.87E-02
4	1.3335	1.72E-02	4	1.3458	-6.53E-03
5	1.3401	1.73E-04	5	1.3403	-5.62E-04
6	1.3400	3.47E-05	6	1.3400	-4.28E-06
7	1.3400	8.60E-06	7	1.3400	-2.05E-07
8	1.3400	1.10E-06	8	1.3400	-2.05E-07
9	1.3400	-9.90E-08			
10	1.3400	-2.10E-07			
11	1.3400	-2.22E-07			
12	1.3400	-2.24E-07			
13	1.3400	-2.24E-07			

최적설계의 결과는 Table 2 와 같다. 이동 점근선 기법의 경우 총 13 번의 반복수행을 통하여 수렴하였고, 제안된 방법의 경우에는 총 8 번의 반복수행 후 수렴하는 것을 확인할 수 있다. 이를 통해 본 논문에서 제안된 방법이 좀 더 효율적인 설계를 했음을 확인할 수 있었다.

5.2 2 부재 트러스 문제

이 문제는 5.1 의 캔틸레버 빔 문제와 마찬가지로 Svanberg⁽⁶⁾가 소개한 문제로써 두 개의 부재의 단면면적을 설계변수로 하는 매우 간단한 수학적 예제이며 다음과 같이 정식화 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(\mathbf{x}) = c_1 x_1 \sqrt{1+x_2^2} \\ \text{subject to} \quad & f_1(\mathbf{x}) = c_2 \sqrt{1+x_2^2} \left(\frac{8}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} \right) - 1 \leq 0, \\ & f_2(\mathbf{x}) = c_2 \sqrt{1+x_2^2} \left(\frac{0}{x_1} - \frac{1}{x_1 x_2} \right) - 1 \leq 0, \quad (21) \\ & 0.2 \leq x_1 \leq 4.0 \\ & 0.1 \leq x_2 \leq 1.6 \end{aligned}$$

또한 초기 설계점은 $\mathbf{x}^{(0)} = [1.0, 1.0]$ 이며, $c_1 = 1.0$, $c_2 = 0.124$ 로 한다. 수렴조건을 $\tau = 10^{-3}$ 으로 하였을 때의 결과는 Table 3 과 같다.

5.3 위상최적설계문제

위상최적화의 방법론 중 가장 널리 알려진 밀도법(Simple Isotropic Material with Penalization, SIMP)을 이용하여 진행하였다.

밀도법은 한 개의 요소(element)의 밀도를 한 개의 설계변수로 대응하기 때문에 설계변수의 개수

가 매우 많아 쌍대기법을 적용하기에 좋은 예제라 할 수 있다. 본 연구에서 사용하는 프로그램은 Sigmund⁽¹⁰⁾가 제안한 매트랩 코드를 활용하였다.

밀도법을 이용한 컴플라이언스(compliance) 최소화 문제는 다음과 같이 정식화할 수 있다.

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n (x_i)^p u_i^T k_0 u_i \\ \text{subject to} \quad & f_i(\mathbf{x}) = \frac{V(\mathbf{x})}{V_0} = f, \\ & \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}, \\ & 0 < x_{\min} \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (22)$$

식 (22)의 컴플라이언스를 최소화하는 목적함수는 강성이 높은 구조물을 만드는 것을 의미한다. 이때 \mathbf{K} 와 k_0 는 각각 전체강성행렬과 요소강성행렬을 의미하며, \mathbf{u} 와 u_i 는 각각 전체변위벡터와 요소변위벡터를 의미한다. 또한 V_0 는 설계영역의 부피이며 $V(\mathbf{x})$ 는 설계영역에 사용되는 재료의 부피로써 이들의 부피비가 제한조건(f)이 된다.

본 논문에서는 위상 최적설계에서 널리 쓰이는 예로 MBB (Messerschmitt-Bolkow-Blohm) 빔 문제를 이용하였다.

이때 사용되는 필터링 방법은 민감도 필터링(sensitivity filtering)을 이용하였으며, 이는 바둑판 모양(checkerboard pattern)이 생성되는 것을 억제하는 역할을 한다. 이 때 사용되는 필터 반지름(filter radius)은 MBB 빔의 높이의 8%를 적용하였다. 프아송 비는 0.3, 탄성계수 $E = 1$ 을 사용하였다. 사용된 재료의 양은 전체 영역의 50% 이며 수렴조건인 τ 는 10^{-1} 로 한다.

Table 3 2-bar truss problem results

MMA				SD-TDQAO			
Iter.	f_0	f_1	f_2	Iter.	f_0	f_1	f_2
0	1.4142	0.5783	0.2275	0	1.4142	0.5783	0.2275
1	1.3278	0.1437	-0.4917	1	1.8304	-0.0483	-0.3367
2	1.4787	0.0379	-0.3960	2	1.4966	0.0092	-0.4714
3	1.4607	0.0808	-0.6365	3	1.5093	-0.0002	-0.4884
4	1.4735	0.0239	-0.4830	4	1.5086	0.0000	-0.4982
5	1.5085	0.0002	-0.4932	5	1.5087	0.0000	-0.4980
6	1.5086	0.0000	-0.4976				
7	1.5087	0.0000	-0.4978				

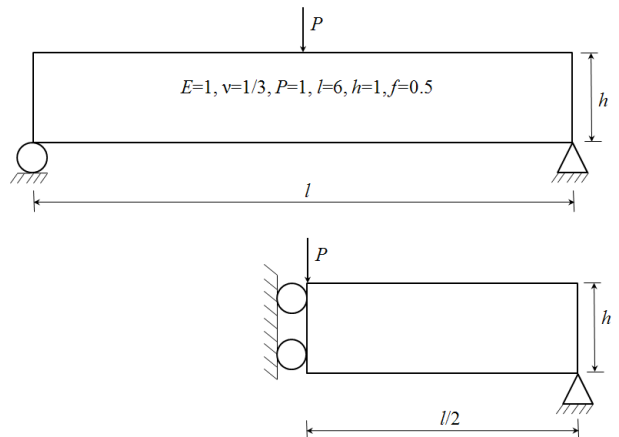


Fig. 1 MBB Beam (unit thickness, plane stress)

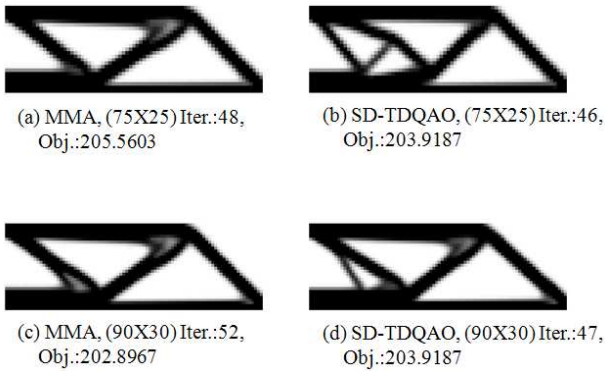


Fig. 2 Topology optimization results with $p=3$

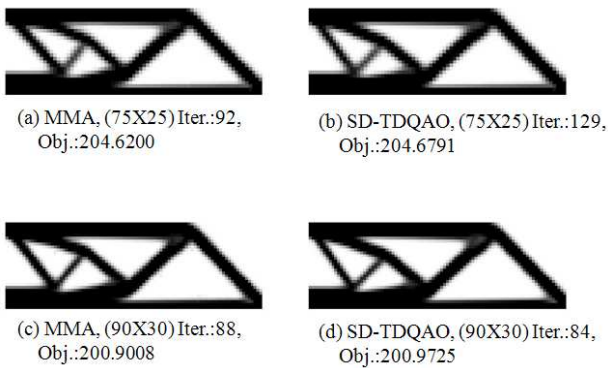


Fig. 3 Topology optimization results with continuation method on p

민감도 필터링과 MBB 빔 문제를 포함한 위상 최적설계에 대한 자세한 내용은 다음의 참고문헌에 소개되어 있다.⁽¹¹⁾

벌칙인자는 설계변수를 0 또는 1로 수렴하도록 유도하는 역할을 하며, 먼저 Fig. 2은 벌칙인자를 $p=3$ 으로 고정하였을 때의 결과이다. 제안된 방법을 통한 결과는 비교적 적은 반복과정을 거쳐서 수렴하는 것을 확인해 볼 수 있다.

다음으로는 벌칙인자를 $p^{(0)}=1$ 에서 3으로 식 (23)과 같은 방법을 이용하여 서서히 증가시키면서 진행해보았다.

$$p^{(k)} = \min(1.02p^{(k-1)}, 3) \quad (23)$$

이와 같은 방법을 연속법(continuation method)이라 하며, 연속법을 이용하면 국부해(local optimum)로 수렴되는 것을 방지한다고 알려져 있다.

이때의 결과는 Fig. 3와 같다. 이를 살펴보면 전체적으로 벌칙인자를 고정했을 때 보다 더 많은 반복과정을 거치는 것을 확인할 수 있으며, 제안된 방법은 이동 점근선 기법과 비슷한 수 혹은 조

금 더 많은 수의 반복을 통해 수렴하는 것을 확인하였다.

6. 결 론

eTDQA2를 이차 근사함수의 이차 도함수를 근사하는데 사용함으로써 쌍대기법을 이용한 순차적 최적설계를 정의할 수 있었다. 본 논문에서는 이차 근사함수의 볼록성과 분리성을 동시에 만족시키면서 비교적 정확한 볼록 근사함수를 도출하였다. 또한 기존의 알고리즘과 비교를 통해 그 성능을 입증하였다.

이와 같은 설계방법은 설계변수가 많은 문제에 적용하기에 알맞으며, 그러한 특성에 의하여 위상 최적설계문제를 해결하는데 좋은 방법론이 될 것이라 예상된다.

또한 본 논문에서 제안한 쌍대기법을 이용한 순차적 근사 최적화 알고리즘은 보수성(conservatism)의 확보와, 이동제한조건의 유연성(flexibility)을 개선함으로써 더 좋은 알고리즘으로 발전할 수 있을 것이라 기대되며, 추후에는 이와 관련된 연구가 지속되어야 할 것이다.

후 기

이 논문은 지식경제부 자동차기반기술개발사업과 'c-MES 설계지원 플랫폼 기술 개발' 과제(10033162-2009-11), 산업원천기술개발사업인 "Multi-Material Mix 초경량 승용차체 개발" 사업의 지원으로 연구되었으며 지원해주신 각 당국에 감사의 뜻을 표합니다.

참고문헌

- (1) Kim, J.-R. and Choi, D.-H., 2008, "Enhanced Two-Point Diagonal Quadratic Approximation Methods for Design Optimization," *Comput. Methods Appl. Mech. Engng*, Vol. 197, pp. 846~856.
- (2) Kim, M.-S., Kim, J.-R., Jeon, J.-Y. and Choi, D.-H., 2001, "Design Optimization Using Two-Point Diagonal Quadratic Approximation," *Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers*, Vol. 25, No. 9, pp. 1423~1431 (in Korean).
- (3) Starnes, J.H. Jr. and Haftka, R.T., 1979, "Preliminary Design of Composite Wings for Buckling, Stress and Displacement Constraints," *Journal of Aircraft*, Vol. 16, pp. 564~570.
- (4) Fadel, G.M., Riley, M.F. and Barthelemy, J.F.M.,

- 1990, "Two-Point Exponential Approximation Method for Structural Optimization," *Structural Optimization*, Vol. 2, No. 2, pp. 117~124.
- (5) Fleury, C., 1989, "CONLIN: An efficient Dual Optimizer Based on Convex Approximation Concepts," *Structural Optimization*, Vol. 1, No. 2, pp. 81~89.
- (6) Svanberg, K., 1987, "The Method of Moving Asymptotes-A New Method for Structural Optimization," *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol. 24, pp. 359~373.
- (7) Svanberg, K., 1995, "A Globally Convergent Version of MMA Without Linesearch," *Proceedings of the First World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, Gorslar, Germany, pp. 9~16.
- (8) Duysinx, P., Bruyneel, M. and Fleury, C., 2009, "Solution of Large Scale Optimization Problems with Sequential Convex Programming," *Technical Report, LTAS-Department of Aerospace and Mechanical Engineering*, Institute of Mechanics and Civil Engineering, University of Liege.
- (9) Falk, J. E., 1967, "Lagrange Multipliers and Nonlinear Programming," *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 19, pp. 141~159.
- (10) Sigmund, O., 2001, "A 99 Line Topology Optimization Code Written in Matlab," *Struc. Multidisc Optim.*, Vol. 21, pp. 120~127.
- (11) Bendsøe, M.P. and Sigmund, O., 2003, "Topology Optimization: Theory, Methods and Applications," *Springer: Berlin*.