

크랙을 가진 L형 단면 보의 횡-비틀림 연성진동 해석

손인수[#], 김창호*, 조정래**

Coupled Bending and Torsional Vibrations Analysis of Cracked L-shaped Beam

In-Soo Son[#], Chang-Ho Kim*, Jeong-Rae Cho**

(Received 7 February 2011; received in revised form 6 August 2011; accepted 8 August 2011)

ABSTRACT

In this paper, the influence of a crack on the natural frequency of cracked cantilever L-shaped beam with coupled bending and torsional vibrations by analytically and experimentally is analyzed. The L-shaped beam with a crack is modeled by Hamilton's principle with consideration of bending and torsional energy. The two coupled governing differential equations are reduced to one sixth-order ordinary differential equation in terms of the flexural displacement. The crack is assumed to be in the first, second and third mode of fracture and to be always opened during the vibrations. The theoretical results are validated by a comparison with experimental measurements. The maximal difference between the theoretical results and experimental measurements of the natural frequency is less than 7.5% in the second vibration mode.

Key Words : L-shaped Beam(L형 단면 보), Natural Frequency(고유진동수), Open Crack(개구형 크랙), Coupled Bending and Torsional Vibrations(횡-비틀림 연성진동)

1. 서 론

결합을 가진 기계나 건축 등의 구조물은 동일한 하중이 작용하더라도 구조물의 자체 탄성에 의한 변형에너지 이외에 크랙에 의해서 추가로 변형에너지가 존재하게 되며, 이 부가되어진 에너지만큼 변형이 더 발생한다. 또 일반적으로 크랙을 갖는 구조물에 어떤 하중이나 외

력이 작용하게 되면 일정 한계 이상으로 힘을 받지 못하고 크랙을 기점으로 해서 급격히 균열이 전파되어 파괴된다. 따라서 구조물에 존재하는 결함의 영향에 의한 동특성 변화를 파악하는 것은 매우 중요하다 할 수 있다.

구조물에 크랙이 있는 경우 구조물의 동특성에 미치는 영향을 연구하기 위하여 크랙이 존재하는 부분의 강성을 줄이는 방법^[1]이 시도되었고, 최근에는 유연행렬을 이용하여 크랙에 의해서 부가되는 에너지를 고려하는 해석방법을 사용하고 있다^[2-4]. 크랙을 가지는 보 형태의 구조물의 해석은 오일러-베르누이 보 이론을 적용한 연구^[5,6]와 티모센코 보 이론을 적용하여 크랙이 전체 구조물의 동특성에 미치는 영향

* 동의대학교 기계공학과

교신저자 : 동의대학교 기계공학과

E-mail : isson92@deu.ac.kr

** 한국폴리텍VI대학 달성캠퍼스 자동차과

에 대하여 많은 연구 결과가 발표되고 있다^[7-9]. Lele와 Maiti^[10]는 전달행렬법을 이용하여 크랙을 가진 티모센코 보의 모델링 및 보의 고유진동수를 구하였으며, 실험을 통하여 그 결과를 검증하였다. 최근 박판 형태의 보에 대한 연성 진동해석 및 T형 단면을 가진 보에 크랙과 같은 결함이 존재하는 경우 보의 진동특성에 미치는 영향에 대한 연구가 많이 진행되어지고 있다^[11-15]. 하지만 선형연구에서는 크랙을 가진 연성진동하는 L형 단면을 가진 보의 진동특성에 대한 연구는 거의 없는 실정이며, 특히 실험을 통하여 이론 값과 비교한 연구는 찾아보기 힘들다.

이 연구에서는 크랙을 가진 L형 단면 보의 횡-비틀림 연성에 의한 동적특성을 수치해석하고 실험을 수행하여 그 결과를 비교 검토하였다. 계의 해석은 오일러-베르누이 보 이론을 적용하였으며, 크랙에 의해 추가되는 변형에너지를 각 모멘트와 힘에 해당하는 유연행렬을 구하여 전체 계에 적용하였다.

2. 시스템의 운동방정식

Fig. 1은 L형 단면 보를 나타낸 것이다. L 은 보 전체의 길이이며, x_c 는 보의 고정단에서 크랙까지의 거리를 의미한다. y_c, z_c 는 각 좌표축에서 무게중심 C 까지의 거리를 나타낸다. Fig. 2는 크랙 부분의 단면을 나타낸 것으로 d, a_c 는 각각 보의 두께와 크랙의 깊이를 나타낸다. a 와 b 는 보의 가로 및 세로의 길이를 나타낸다.

2.1 크랙 모델링

시스템에서 크랙에 의하여 추가되는 추가적인 에너지를 Castigliano의 정리를 이용하여 다음과 같이 굽힘 모멘트, 비틀림, 그리고 전단력에 대한 유연행렬로 표현할 수 있다.

$$\lambda_M = \frac{2d(1-\nu^2)}{E} \int_0^{a_c} \frac{\partial^2}{\partial M^2} (K_{IM})^2 dz, \quad (1a)$$

$$\lambda_T = \frac{2d(1-\nu^2)}{E} \int_0^{a_c} \frac{\partial^2}{\partial T^2} (K_{ITT})^2 dz, \quad (1b)$$

$$\lambda_S = \frac{2d(1-\nu^2)}{E} \int_0^{a_c} \frac{\partial^2}{\partial S^2} (K_{ISS})^2 dz \quad (1c)$$

여기서

$$K_{IM} = M \sqrt{\frac{\beta_M}{dI_z} \left(\frac{I_z}{I_z^c} - 1 \right)},$$

$$K_{ITT} = T \sqrt{\frac{\beta_T}{dJ} \left(\frac{J}{J^c} - 1 \right)}, \quad (2)$$

$$K_{ISS} = S \sqrt{\frac{2\kappa\beta_S(1+\nu)}{dA} \left(\frac{A}{A^c} - 1 \right)}$$

이고, $\beta_M = \beta_T = \beta_S = 1$ 로 적용하였다^[7]. 아래첨자 M, T , 그리고 S 는 각각 모멘트, 비틀림, 그리고 전단력을 의미한다. E 는 영계수이며, I_z, J 그리고 A 는 단면 2차모멘트와 극관성 모멘트, 그리고 보의 단면적을 의미한다. κ, ν 는 각각 전단계수와 푸아송 비이고, 위첨자 c 는 크랙이 존재하는 경우 각각의 해당 물성치를 나타낸다. 힘과 모멘트에 의한 강성 변화는 식 (1)의 역수를 취하여 구할 수 있다.

2.2 운동 방정식

Fig. 1의 L형 단면 보를 오일러-베르누이 보 이론을 적용하면 횡-비틀림에 대한 운동방정식을 각각 다음과 같이 구할 수 있다^[13].

$$EI_z v'''' + m\ddot{v} - mz_c \ddot{\psi} = 0 \quad (3a)$$

$$EI_y w'''' + m\ddot{w} + my_c \ddot{\psi} = 0 \quad (3b)$$

$$GJ \psi'' + mz_c \ddot{v} - my_c \ddot{w} - I_s \ddot{\psi} - EI \psi'''' = 0 \quad (3c)$$

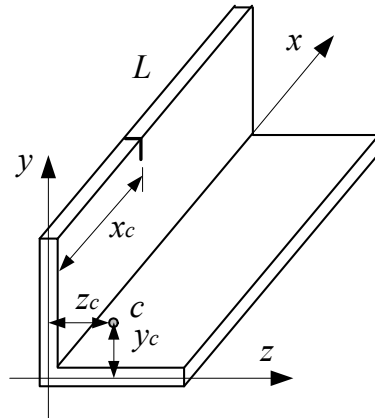


Fig. 1 Cracked L-beam

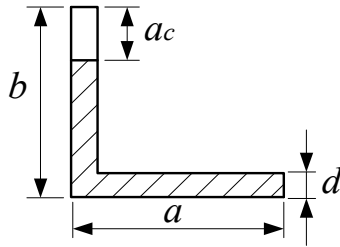


Fig. 2 Cross section of cracked beam

여기서 $v(x,t)$ 는 y 축으로의 횡방향 변위, $w(x,t)$ 는 z 축으로의 횡변위, 그리고 $\psi(x,t)$ 는 비틀림 회전각을 의미한다. m 과 $I_{y,z}$ 는 각각 보의 단위 길이당 질량과 y, z 축에 대한 보의 단면 2차 모멘트를 나타낸다. I_x 는 x 축에 대한 보의 단위길이당 극질량관성 모멘트이며, GJ 와 ET 는 각각 비틀림 강성과 워핑 강성(warping stiffness)이다. 이 연구에서는 워핑 강성은 저차 모드에서 영향이 매우 작기 때문에 그 영향을 고려하지 않았으며, $y_c = 0$ 라고 가정하였다¹⁵⁾. 따라서 식 (3b)는 이 연구에서 고려하지 않았다.

보의 고유진동수를 ω 라고 하면, 식 (3a), (3c)의 운동방정식에 대한 일반해는 각각 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$v(x,t) = Y(x)e^{i\omega t} \quad (4)$$

$$\psi(x,t) = \Psi(x)e^{i\omega t} \quad (5)$$

식 (4), (5)를 식 (3a), (3c)에 대입하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$(EI_x D^4 - m\omega^2 L^4) Y(\xi) + z_c(m\omega^2 L^4) \Psi(\xi) = 0 \quad (6)$$

$$z_c(m\omega^2 L^4) Y(\xi) - \{(GJL^2)D^2 + I_x \omega^2 L^4\} \Psi(\xi) = 0 \quad (7)$$

여기서 $D \equiv \frac{d}{d\xi}$, $\xi = x/L$ 이다. 식 (6)과 (7)을 조합하면 다음과 같은 6차의 미분방정식을 얻는다.

$$\frac{d^6 W}{d\xi^6} + \bar{a} \frac{d^4 W}{d\xi^4} - \bar{b} \frac{d^2 W}{d\xi^2} - \bar{c} W = 0 \quad (8)$$

여기서 $W = Y$ or Ψ ,

$$\bar{a} = \frac{I_x \omega^2 L^2}{GJ}, \quad \bar{b} = \frac{m\omega^2 L^4}{EI_x}, \quad \bar{c} = \bar{a}\bar{b} \left(1 - \frac{mz_c^2}{I_x}\right) \quad (9)$$

이다. 미분방정식 식 (9)의 일반해는 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$W(\xi) = C_1 \cosh \alpha \xi + C_2 \sinh \alpha \xi + C_3 \cos \beta \xi + C_4 \sin \beta \xi + C_5 \cos \gamma \xi + C_6 \sin \gamma \xi \quad (10)$$

여기서 $C_1 \sim C_6$ 는 상수이고,

$$\alpha = \left[2\sqrt{\frac{q}{3}} \cos\left(\frac{\phi}{3}\right) - \frac{\bar{a}}{3}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\beta = \left[2\sqrt{\frac{q}{3}} \cos\left(\frac{\pi - \phi}{3}\right) + \frac{\bar{a}}{3}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\gamma = \left[2\sqrt{\frac{q}{3}} \cos\left(\frac{\pi - \phi}{3}\right) + \frac{\bar{a}}{3}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

$$q = \bar{b} + \bar{a}^2/3, \quad \phi = \cos^{-1} \left[\frac{27\bar{c} - 9\bar{a}\bar{b} - 2\bar{a}^3}{2(\bar{a}^2 + 3\bar{b})^{3/2}} \right]$$

이다. 식 (10)에 표현된 해를 크랙위치에 따라 횡방향 변위 Y 와 비틀림 회전 Ψ 로 표시하면 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$I) 0 \leq \xi \leq \xi_c ;$$

$$Y_1(\xi) = A_1 \cosh \alpha \xi + A_2 \sinh \alpha \xi + A_3 \cos \beta \xi + A_4 \sin \beta \xi + A_5 \cos \gamma \xi + A_6 \sin \gamma \xi \quad (12a)$$

$$\Psi_1(\xi) = B_1 \cosh \alpha \xi + B_2 \sinh \alpha \xi + B_3 \cos \beta \xi + B_4 \sin \beta \xi + B_5 \cos \gamma \xi + B_6 \sin \gamma \xi \quad (12b)$$

II) $\xi_c \leq \xi \leq 1$;

$$Y_2(\xi) = A_7 \cosh \alpha \xi + A_8 \sinh \alpha \xi + A_9 \cos \beta \xi + A_{10} \sin \beta \xi + A_{11} \cos \gamma \xi + A_{12} \sin \gamma \xi \quad (13a)$$

$$\Psi_2(\xi) = B_7 \cosh \alpha \xi + B_8 \sinh \alpha \xi + B_9 \cos \beta \xi + B_{10} \sin \beta \xi + B_{11} \cos \gamma \xi + B_{12} \sin \gamma \xi \quad (13b)$$

여기서 $\xi_c = x_c/L$ 이다. 식 (12), (13)을 식 (6), (7)에 대입하여 정리하면 상수 $A_1 \sim A_{12}$ 과 $B_1 \sim B_{12}$ 는 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$B_{1,7} = \frac{k_\alpha A_{1,7}}{z_c}, \quad B_{3,9} = \frac{k_\beta A_{3,9}}{z_c}, \quad B_{5,11} = \frac{k_\gamma A_{5,11}}{z_c},$$

$$B_{2,8} = \frac{k_\alpha A_{2,8}}{z_c}, \quad B_{4,10} = \frac{k_\beta A_{4,10}}{z_c}, \quad B_{6,12} = \frac{k_\gamma A_{6,12}}{z_c} \quad (14)$$

여기서

$$k_\alpha = 1 - \alpha^4 / \bar{b}, \quad k_\beta = 1 - \beta^4 / \bar{b}, \quad k_\gamma = 1 - \gamma^4 / \bar{b}$$

이다. 보의 고정-자유에 대한 경계조건과 크랙위치에서의 연속조건은 각각 다음과 같다.

$$Y_1(0) = Y_1'(0) = 0, \quad Y_2''(1) = Y_2'''(1) = 0, \quad (15)$$

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_2'(1) = 0$$

$$Y_1''(\xi_c) = Y_2'''(\xi_c), \quad Y_2'''(\xi_c) = Y_1'''(\xi_c) \quad (16)$$

$$\psi_2'(\xi_c) = \psi_1'(\xi_c) \quad (17)$$

$$k_s \{ Y_2(\xi_c) - Y_1(\xi_c) \} = Y_2''(\xi_c) \quad (18)$$

$$k_m \{ Y_2'(\xi_c) - Y_1'(\xi_c) \} = Y_2''(\xi_c) \quad (19)$$

$$k_t \{ \Psi_2(\xi_c) - \Psi_1(\xi_c) \} = \Psi_2'(\xi_c) \quad (20)$$

여기서 식 (18)~식 (20)의 k_s, k_m 그리고 k_t 는 식 (1)의 역수를 취하여 구할 수 있다. 먼저 식 (12),

(13)을 식 (16)~(20)의 크랙에 의한 연속조건에 대입하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} t_{1(11)} & t_{1(12)} & \cdots & t_{1(16)} \\ \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & & t_{1(66)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_7 \\ A_8 \\ \vdots \\ A_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{2(11)} & t_{2(12)} & \cdots & t_{2(16)} \\ \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & & t_{2(66)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_6 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

이를 간단히

$$T_{1(6 \times 6)} \begin{Bmatrix} A_7 \\ A_8 \\ \vdots \\ A_{12} \end{Bmatrix} = T_{2(6 \times 6)} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_6 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

으로 표현할 수 있다. 식 (22)를 식 (15)의 경계조건에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} t_{3(11)} & t_{3(12)} & \cdots & t_{3(16)} \\ \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & & t_{3(36)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_7 \\ A_8 \\ \vdots \\ A_{12} \end{Bmatrix} = T_{3(3 \times 6)} \begin{Bmatrix} A_7 \\ A_8 \\ \vdots \\ A_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

또 식 (12), (13)에 외팔보의 고정단 경계조건을 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$A_1 + A_3 + A_5 = 0,$$

$$\alpha A_2 + \beta A_4 + \gamma A_6 = 0, \quad (24)$$

$$k_\alpha A_1 + k_\beta A_3 + k_\gamma A_5 = 0$$

식 (24)를 식 (22)에 대입하고 간단히 정리하면 다음과 같다.

$$T_{1(6 \times 6)} \begin{Bmatrix} A_7 \\ A_8 \\ \vdots \\ A_{12} \end{Bmatrix} = B_{1(6 \times 3)} \begin{Bmatrix} A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

즉,

$$\begin{Bmatrix} A_7 \\ A_8 \\ \vdots \\ A_{12} \end{Bmatrix} = B_{(6 \times 3)} \begin{Bmatrix} A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

여기서 $B_{(6 \times 3)} = T_1^{-1} B_1$ 이다. 식 (26)을 식 (23)에 대입하여 정리하면

$$T_{3(3 \times 6)} B_{(6 \times 3)} \begin{Bmatrix} A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{Bmatrix} = R_{(3 \times 3)} \begin{Bmatrix} A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

이 된다. 횡-비틀림 연성 진동하는 보의 고유진동수는 3×3 행렬 R 의 행렬식을 이용하여 구할 수 있다.

$$\det|R| = 0 \quad (28)$$

3. 실험

진동실험으로 보의 고유진동수를 측정하기 위하여 사용한 실험장비들은 다음과 같다. 먼저 FFT 분석기는 LMS KOREA 사의 Test lab.을 사용하였으며 임팩트 해머는 DYTRAN사의 506D80 모델을 사용하였다. Table 1은 실험과 수치해석에 사용한 L형 단면 보의 물성치를 나타낸 것이다. 실험에서 최대 주파수영역은 2048Hz로 하였으며, 분해능은 0.13Hz로 설정하였다. 또, 측정값의 신뢰성을 위하여 각각 5번의 실험을 실시하여 평균한 값을 구하였다. 센서는 측정 범위가 최저 2Hz에서 최대 5kHz인 B&K사의 Type 4507로 측정하였다. 보의 고정은 볼트를 이용하였으며 고정할 때의 힘이 일정하도록 토크렌치를 사용하였다. 보의 크랙은 0.5mm의 선형 정밀 톱으로 가공하였으며, 실제 가공된 크랙의 폭은 0.6mm이다. Fig. 3은 실험모습을 보여주고 있다.

4. 결과 및 고찰

수치해석에서 유도한 운동방정식을 이용하여 L형 단면 보의 횡방향 고유진동수에 미치는 크랙의 영향

Table 1 Specifications of beam

Property	Value
Total length of beam(L)	0.40m
Height of beam(b)	0.03m
Width of beam(a)	0.03m
Thickness of beam(d)	0.003m
Young's modulus(E)	200GPa
Density(ρ)	7860kg/m ³
Poisson's ratio(ν)	0.33

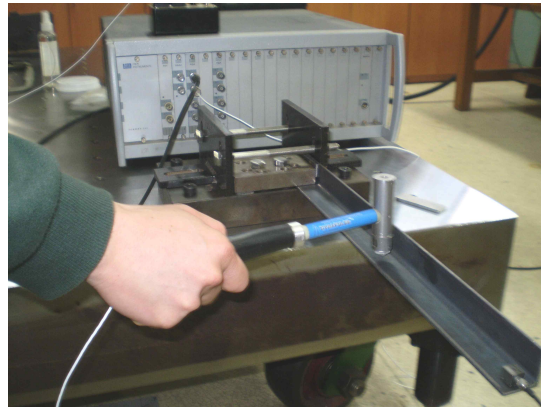
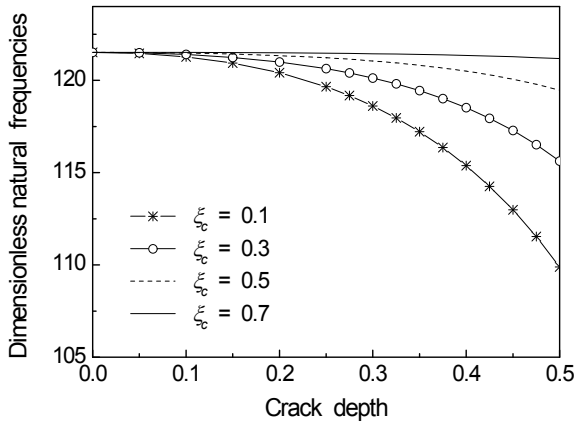


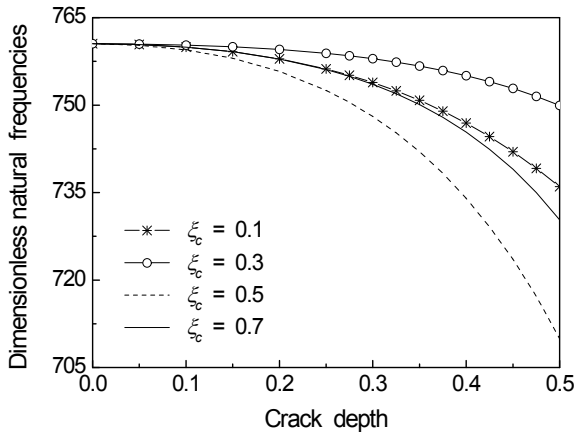
Fig. 3 Experimental setup

을 도시하고 고찰하였다.

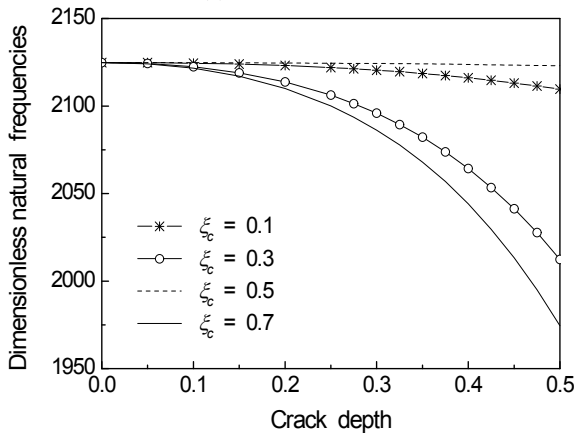
Fig. 4에서는 L형 단면 보의 무차원 고유진동수에 미치는 크랙 위치의 영향을 살펴보았다. 크랙의 위치가 L형 단면 보의 경우 왼쪽 고정단으로부터 0.1, 0.3, 0.5 그리고 0.7인 위치에 존재할 때 그 크랙의 위치변화가 보의 고유진동수 변화에 미치는 영향을 도시하였다. 여기서 가로축은 크랙의 깊이를, 그리고 세로축은 L형 단면 보의 고유진동수를 나타낸다. 전반적으로 크랙의 위치와 관계없이 크랙의 크기와 보의 고유진동수는 서로 반비례적인 경향을 보인다. Fig. 4(a)의 1차 모드에서는 크랙의 위치가 0.1일 때 보의 고유진동수는 가장 낮은 값을 가지며, Fig. 4(b)의 고차모드에서는 크랙의 위치가 0.5인 경우 고유진동수가 가장 낮았다. Fig. 4(c)의 3차 모드에서는 보의 0.3인 위치에 크랙이 존재하는 경우 가장 낮은 고유진동수를 가진다.



(a) First mode



(b) Second mode



(c) Third mode

Fig. 4 Effects of crack on dimensionless natural frequency of cracked L-shaped beams

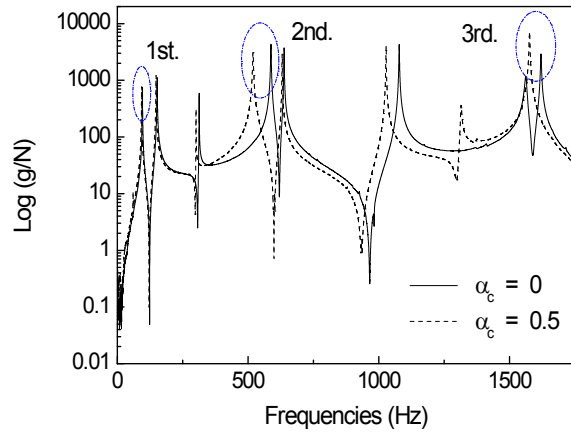


Fig. 5 FRF of cantilever L-shaped beams

Table 2 Natural frequencies of cracked cantilever L-shaped beams($\alpha_c = 0.3$)

ξ_c	Natural frequencies(Hz)						Error(%)		
	Theory			Experiment					
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
-	95.5	597.7	1670.0	95.4	584	1610.1	0.1	2.4	3.7
0.1	93.2	592.5	1666.6	91.4	582.1	1598.8	2.0	1.8	4.2
0.3	94.4	595.7	1647.3	92.9	576.3	1594.9	1.7	3.4	3.3
0.5	95.1	587.9	1669.6	94.4	560.1	1592	0.8	5.0	4.9
0.7	95.5	592.3	1639.7	95.6	574.6	1601.4	0.2	3.1	2.4

Fig. 5는 크랙의 위치가 보의 가운데 위치하는 경우에 실험을 통하여 측정된 크랙 보의 주파수 응답 함수(FRF)를 나타낸 것이다. 실선은 크랙이 없는 경우, 그리고 점선은 크랙이 존재하는 경우($\alpha_c=0.5$)의 결과이다. Fig. 5의 FRF 그래프에서 표시된 피크치는 보의 횡방향 고유진동수를 나타내며 다른 피크 위치들은 비틀림에 의한 고유진동수를 나타낸다. 여기서 크랙이 존재하는 경우 보의 고유진동수가 낮아진다는 것을 확인할 수 있다.

Tables 2, 3은 크랙의 크기가 각각 0.3, 0.5인 경우 크랙의 위치별로 실험과 이론해석을 통하여 얻은 보의 고유진동수 결과를 3차 모드까지 비교한 것이다. 크랙의 위치는 0.1~0.7로 하였다. 여기서 오차는

Table 3 Natural frequencies of cracked cantilever L-shaped beams($\alpha_c=0.5$)

ξ_c	Natural frequencies(Hz)						Error(%)		
	Theory			Experiment					
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
0.1	86.4	578.5	1658.1	83.5	581.1	1597.6	3.4	0.5	3.7
0.3	90.9	589.5	1581.6	88.38	565.5	1584.4	2.8	4.2	0.2
0.5	93.9	558.0	1668.6	92.88	518.9	1576.5	1.1	7.5	5.8
0.7	95.2	574.0	1551.9	95.38	549.1	1602.0	0.2	4.5	3.1

$\left| \frac{\text{Experiment} - \text{Theory}}{\text{Experiment}} \right| \times 100$ 이다. 크랙의 크기가 0.3, 0.5인 경우 실험과 이론해석에 대한 결과 값의 최대 오차는 모두 2차 모드에서 나타나며 그 크기는 각각 5%, 7.5% 미만으로 비교적 잘 일치함을 알 수 있다.

5. 결론

L형상의 단면을 가진 보의 횡-비틀림 연성 진동하는 경우 보의 고유진동수에 미치는 크랙의 영향에 대하여 연구하였다. 먼저 이론해석을 통하여 연성 진동하는 L형 단면 보의 고유진동수를 구하였으며 실험을 통하여 그 신뢰성을 확보하였다. 이론해석 결과와 실험의 결과를 비교하면 크랙의 크기와 위치에 따라 약간의 차이가 있으나 대체적으로 2차 모드의 고유진동수에서 최대 오차가 나타났으며 전반적으로 최대 오차는 7.5%로 비교적 잘 일치하였다.

참고문헌

1. Datta, P. K. and Lal, M. K., "Parametric Instability of a Non-prismatic Bar with Localized Damage Subjected to an Intermediate Periodic Axial Load", *Computer and Structures*, Vol. 4, No. 6, pp. 1199-1202, 1992.
2. Ruotolo, R. Surace, C. Crespo, P. and Storer, D., "Harmonic Analysis of the Vibrations of a Cantilevered Beam with a Closing Crack", *Computers*

- and Structures, Vol. 61, No. 6, pp. 1057-1074, 1996.
3. Chondros, T. G., Dimarogonas, A. D. and Yao, J., "A Continuous Cracked Beam Vibration Theory", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 215, No. 1, pp. 17-34, 1998.
4. Tsai, T. C. and Wang, Y. Z., "The Vibration of a Multi-crack Rotor", *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 39, No. 9, pp. 1037-1053, 1997.
5. Chondros, T. G., Dimarogonas A. D. and Yao, J., "Vibration of a Beam with a Breathing Crack", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 229, No. 1, pp. 57-67, 2001.
6. Owolabi, G. M., Swamidias, A. S. J. and Seshadri, R., "Crack Detection in Beams Using Changes in Frequencies and Amplitudes of Frequency Response Functions", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 265, No. 1, pp. 1-22, 2003.
7. Zhu, X., Li, T. Y., Zhao, Y. and Liu, J. X., "Structural Power Flow Analysis of Timoshenko Beam with an Open Crack", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 297, No. 1~2, pp. 215-226, 2006.
8. Lee, Y. S. and Sheu, J. J., "Free Vibration of an Extensible Rotating Inclined Timoshenko Beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 304, pp. 606-624, 2007.
9. Loya, J. A., Rubio., L. and Fernández-Sáez, L., "Natural Frequency for Bending Vibration of Timoshenko Cracked Beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 290, No 3-5, pp. 640-653, 2006.
10. Lele, S. P. and Maiti, S. K., "Modelling of Transverse Vibration of Short Beams for Crack Detection and Measurement of Crack Extension", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 257, No. 3, pp. 559-583, 2002.
11. Li, J., Shen, R., Hua, H. and Jin, X., "Response of Monosymmetric Thin-walled Timoshenko Beams to Random Excitations", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 6023-6040, 2004.
12. Viola, E., Ricci, P. and Aliabadi, M. N., "Free

- Vibration Analysis of Axially Loaded Cracked Timoshenko Beam Structures Using the Dynamic Stiffness Method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 304, pp. 124-153, 2007.
13. Ricci, P. and Viola, E., "Stress Intensity Factors for Cracked T-sections and Dynamic Behaviour of T-beams", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 73, pp. 91-111, 2006.
 14. Son, I. S. and Jo. J. R., "Stability Analysis of Cracked Cantilever T-beams Subjected to Subtangential Follower Force", *Journal of KSMPE*, Vol. 9, No. 3, pp. 49-55, 2010.
 15. Li, J., Li, W., Shen, R. and Hua, H., "Coupled Bending and Torsional Vibration of Nonsymmetrical Axially Loaded Thin-walled Bernoulli-Euler Beams", *Mechanics Research Communications*, Vol. 31, pp. 697-711, 2004.