韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 25집 제 3호, 2011. 9. 537-556

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 25, No. 3, Sep. 2011. 537-556

학업성취도에 따른 초등학교 6학년 학생들의 비례 추론 능력 및 전략 분석

엄 선 영 (고려대학교 대학원)
권 혁 진 (고려대학교)

본 연구에서는 최근 초등 수학에서 중요시 되고 있는 비례 추론에 초점을 두고 비례 문제를 해결하는 과정에서 학생들의 학업성취도에 따른 비례 추론 능력과 비례 추론 전략 사용의 특징을 분석하였다. 이를 위하여 초등학교 6학년 173명을 대상으로 다양한 유형의 비례 문제를 제시하고 최대 세 가지 추론 전략을 사용하여 해결하도록 하였다. 그 결과 상위권 학생들이 하위권 학생들보다 다양한 비례 추론 전략을 활용하고, 표현하고, 인식하는 능력이 뛰어남을 알 수 있었다. 또한 학생들이 선호하는 비례 추론 전략은 학업성취도에 따라서는 별 차이를 보이지 않았으나 문제 유형과 문제에 제시된 숫자들의 비에 따라 차이가 있는 것으로 나타났다. 이를 통해 학생들의 학습 수준에 따른 능력 차이를 반영하여 적절한 비례적 추론 지도가 필요함을 알 수 있었다.

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

1990년대 이후로 학교 수학 교육에서 강조하는 세계적인 흐름 중에 하나가 수학적 추론 능력, 의사소통 능력, 문제해결력과 같은 수학적 능력의 신장을 강조하는 것이다. 특히, 수학적 추론 교육은 그동안 논리적 추론 또는 증명 교육 중심으로 이루어져 왔다. 그러나 수학을 깊이 이해하고 활용할 수 있는 능력을 갖추기 위해서는 먼저, 학생 스스로가 규칙성이나 공통성을 발견하여 추측해 보는 경험을 통해 지식을 생산해내고, 스스로 얻은 지식을 논리적 추론이나 연역적 증명을 통해 정당화하는 경험을 할 때, 비로소 학생은 지식을 자신의 것으로 만들고, 다양한 실생활 상황에서 자유롭게 이 지식을 활용할 수 있는 능력을 가지게 된다(교육인적자원부, 2007).

초등 수학에서 이러한 추론 교육의 가장 정점에 위치해 있는 것이 바로 비례 추론(proportional reasoning)이다. 특히, 비례는 기하, 대수와 같은 다른 영역의 학습 요소들과 밀접하게 연결되어 있으며 중・고등학교에서 배울 수학을 위한 중요한 발판이 된다. 뿐만 아니라 2007년 개정 수학과 교육과정에 따르면, 4학년 사회교과에서 지도의 축척을 학습하고 5학년 과학교과에서 속력 개념을 학습하도록 하고 있으므로 타 교과 학습과 수학의 연계성을 고려하여 이와 관련된 개념인 '비와 비율'의 지도시기를 6학년에서 5학년으로 조정하고, 실생활과 과학교과에서 필요로 하는 정비례와 반비례 개념을 중학교 1학년에서 초등학교 6학년으로 이동시켜 지도하도록 하고 있다(교육인적자원부, 2007). 이는 초등학교 수학에서 비와 비례에 대한 비중과 중요성이 강화되었다고 할 수 있다. 이와 같은 비례 추론 혹은 비례적 사고는 함수적 사고를 형성하고 여러 수학적 개념들을 연결하는 매우 중요한 역할을 하며, 실생활의 여러 면에서 실용적인 측면을 가지고 있어 관심을 가지고 성공적으로 지도해야 할 중요한 개념이다. 그러나 비례 추론의 기본 개념이 되는 비는 다른 수학 개념들과는 달리 매우 추상적이며,

* 접수일(2011년 8월 1일), 심사(수정)일(1차: 2011년 9월 16일, 2차: 9월 21일), 게재확정일자(2011년 9월 23일)
* ZDM분류 : C32
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 비례추론, 비례추론전략, 비례문제

비를 배울 때 두 양과 두 수를 다루면서 또 다른 하나의 대상을 파악해야 하기 때문에 초등학생 대부분이 어려워하는 부분이다(권미숙 · 김남균, 2009). 이러한 이유로 외국에서는 1960년대부터 비례와 관련된 다양한 연구가 진행되어 왔으나 우리나라에서는 최근에 와서 비례 추론에 대한 논의가 이루어지고 있다.

따라서 본 연구는 학생들의 형식적 사고에 매우 중요한 요소인 비례적 추론 능력을 발달시키고자 비례 문제를 해결하는 과정에서 학업성취도에 따라 학생들의 비례 추론 능력에 차이가 있는지 살펴보았다. 또한, 학업성취도에 따라 학생들이 비례 추론 전략을 사용하는 데 있어서 어떠한 특징이 있는지 살펴보고, 이를 바탕으로 올바른 비례적 추론 지도에 대한 방안을 모색해 보고자 한다. 이를 위하여 다음과 같이 연구 문제를 설정하였다.

첫째, 비례 문제를 해결할 때 학업성취도에 따라 학생들의 비례 추론 능력에 차이가 있는가?

둘째, 비례 문제를 해결할 때 학업성취도에 따라 학생들이 사용하는 비례 추론 전략에 차이가 있는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 비례 추론 능력

비례 추론은 수학적 추론의 하나로 초등 수학과 고등 수학을 연결하는 다리 역할을 하며 여러 수학적 개념들 사이의 연결을 가능하게 한다는 점에서 그 중요성을 찾을 수 있다(박정숙, 2009). 비례 추론에 대한 정의는 연구자들 간에 다소 차이는 있으나 일반적으로 비례 추론은 비율, 비, 몫 그리고 분수와 같은 유리수 표현 사이의 총체적 관계에 대한 추론을 의미한다.

Lamon(1989, 2007)은 비례 추론을 어떤 관계가 있는 두 양 사이에 동시에 일어나는 변화(공변)와 그 두 양 사이의 관계는 변하지 않는다는 상황(불변)에서의 구조적 관계에 대한 추론이라고 하였다. 예를 들면 “사탕 3개에 600원이다”라는 말을 통해 일정한 금액으로 살 수 있는 사탕 개수 사이의 비는 알 수 있지만, 600원이 아닌 1800원으로 금액이 증가했을 때 살 수 있는 사탕의 개수가 얼마나 증가하는지 알기 위해서는 비례 추론이 반드시 필요하다. 즉, 사탕의 개수와 금액 사이의 관계는 변하지 않는다는 구조적 동질성을 인식하는 것을 비례 추론으로 보았다. 그리고 Karplus, Pulos와 Stage(1983)는 비례 추론이란 수학적 추론의 한 형태로서 간단히 말하면 비례 상황에 내재해 있는 수학적 관계를 파악하는 것이라고 말할 수 있으며, 다양한 비례 문제를 해결할 수 있는 능력은 물론, 비례적이지 않은 상황과 비례적인 상황을 식별하는 능력을 포함하여 비례 추론 능력이라고 하였다.

Cramer, Post, Currier(1993)는 두 비의 동치관계에서 나오는 $ad=bc$와 같은 알고리즘은 비례 추론이 아닌 절차적 지식이며, 비례 추론은 다양한 문제 유형을 해결할 수 있는 능력에 비례적이지 않은 상황과 비례적인 상황을 식별하는 능력을 포함한다고 하였다. 또한 Lesh 등(1988)도 비례 추론을 잘하는 학생들은 문제의 맥락이나 숫자에 영향을 받지 않고 융통성있게 문제를 해결할 수 있으며, 비례적인 상황과 그렇지 않은 상황을 구별할 수 있어야 한다고 하였다. 비례 상황을 구별하는 능력에 관하여 Van Dooren 외(2005)는 비례적인 상황과 비교하여 비례적이지 않은 상황의 문제를 제시한 결과 연구에 참여한 학생들의 30%이상이 비례적이지 않은 상황의 문제를 비례 문제로 잘못 인식하는 오류를 범하고 있는 것을 지적하면서 학생들의 올바른 비례 추론을 위해 비례적인 상황을 구별하는 능력의 중요성을 강조하였다.

한편, 최근 수학교육 연구들을 살펴보면 수학문제를 해결하고 개념을 이해할 때 표상 활용의 중요성을 강조하고 있다. 가장 대표적으로 Bruner는 자신이 주장한 EIS이론에서 상징적 표현을 가장 상위 단계의 표현으로 보고, 활동적 표현 – 영상적 표현 – 상징적 표현을 거쳐 최종적으로 상징적 표현에 능통해 지는 것을 지적 발달로 보았다. 또한 Nakahara(1994)는 표상을 실제적 표상, 조작적 표상, 그림 표상, 언어적 표상, 기호적 표상 다섯

가지로 분류하고 그 중 기호적 표현을 이들 중 최상의 위치에 놓았으며, 이는 Bruner의 주장처럼 수학 기호를 사용한 표현 방법을 최상위 능력으로 보았다(박경은, 2004에서 재인용). 김민경・권혁진(2010)의 연구에서도 수학 문제를 해결할 때 상위권 학생들은 수식의 사용을 선호하였고 문제 해결 과정에서 수학적 기호를 원활하게 사용한 반면 중, 하위권 학생들은 그림이나 표를 이용하는 경우가 더 많았다고 하였다. 이를 통해 본 연구에서도 비례 추론 능력에 비례 문제를 해결할 때 비례 상황을 일반화하고 자신의 사고 과정을 표현하는 능력을 포함시켜야 할 필요가 있다고 생각하였다. 따라서 위의 연구들을 토대로 지필을 통해 분석할 수 있는 표현 양식만을 대상으로 하여 표현 양식을 글과 같은 언어적 표현, 그림이나 표 등과 같은 시각적 표현 그리고 수학적 기호와 수식을 이용한 기호적 표현으로 나누어 학생들이 자신의 비례 추론 과정을 어떤 표현 양식을 가지고 표현하는지에 대한 표현 능력을 분석하였다.

이러한 연구들을 바탕으로 본 연구에서는 비례 추론 능력에 구조적 동질성을 인식하는 능력을 포함시킴으로써 비례 추론 능력을 문제의 유형이나 숫자의 영향 등을 받지 않고 두 비의 구조적 동질성을 잘 인식하여 문제를 해결하고, 자신의 추론 과정을 정확하게 표현하여 다양한 비례 추론 전략을 사용할 수 있는 능력과 비례 상황을 구별하여 인식할 수 있는 능력을 포함한 개념으로 정의하고자 한다.

2. 문제해결에서의 비례 추론 전략

학생들은 비례 문제를 해결할 때 자신의 비례 추론 능력에 따라 다양한 문제해결전략을 사용한다. 비례 추론 전략이란 비례 문제를 해결할 때 비례 추론을 통해 학생들이 사용하는 문제해결전략을 의미하며, 학생들이 사용하는 비례 추론 전략은 학생들의 비례 추론 능력에 따라 차이가 있기 때문에 학생의 비례 추론 발달 단계와 밀접한 관련이 있다.

비례 추론 발달 단계에 관하여 Lesh 등(1988)은 발달 단계라는 용어 대신 개념화라는 용어를 사용하여 학생들의 비례 추론 발달 단계를 설명하였다. 그들의 연구에 따르면 개념화 1단계는 문제에서 제시한 조건을 사용하여 가법적 추론을 하는 단계이다. 그러나 이 경우에는 문제에서 제시한 조건들을 모두 사용하지 않고 일부 조건에 한정하여 추론을 한다. 개념화 2단계는 일부 조건을 사용하여 가장 초보적인 승법적 추론을 한다. 개념화 3단계는 일정한 규칙을 발견하여 비례 추론의 형태를 어느 정도 가지고 있는 단계이다. 개념화 4단계는 진정한 의미의 승법적 추론이지만 여전히 문제에서 제시한 조건의 일부만 사용하고 있는 단계이다. 마지막으로 개념화 5단계는 명백하고 분명한 절차에 근거하여 승법적 추론을 하고 있는 단계이다. 박정숙(2008)은 형식적 접근 단계를 추가하였는데 이 단계는 $a:b=c:d$와 같은 비례식을 활용하는 것으로 $a:b=c:d$일 때 $ad=bc$라는 알고리즘을 사용하여 문제를 해결하는 단계이다. 그러나 학생들이 이 방법을 사용하여 문제를 성공적으로 해결했다고 하더라도 이 학생이 비의 동치관계를 관계적으로 이해하고 문제를 해결하였는지 아니면 도구적으로 이해하고 문제를 해결하였는지 알 수 없다는 한계가 있다.

이밖에 많은 연구자들이 비례 추론 발달 단계를 Lesh 등(1988)이 제시한 개념화 단계와 비슷하게 순차적인 발달 단계로 설명하고 있다. 이와 같은 비례 추론 발달 단계에 따라 학생들이 사용하는 비례 추론 전략에 차이가 있으며 그에 따른 특징을 중심으로 연구가 진행되어 왔다. 박정숙(2008)은 비례 추론 전략에 초점을 맞추어 발달 단계 대신 문제 해결 전략 유형으로 학생들의 추론 전략을 분석하였다. 즉, 학생들의 비례 추론 전략을 덧셈을 주로 사용하는 가법적 전략, 단위화 또는 곱셈을 주로 사용하는 승법적 전략, 비례식 알고리즘과 같은 형식적 전략으로 나누어 학생들의 비례 상황 인지에 대하여 연구하였다. Tourniaire와 Pulos(1985)는 비례 추론 전략을 옳은 전략, 옳지 않은 전략 그리고 비례 추론으로 발전 가능한 전략으로 나누어 설명하였다. 옳은 전략에는 승법적 전략(multiplicative strategy)과 가법적 전략(building up)을 제시하였고, 옳지 않은 전략으로는 문제에 제시된 조건을 무시하고 문제를 해결하는 원시적인 전략과 가장 많이 나타나는 오류로 덧셈 전략(additive strategy)으로 구별하였다. 이 덧셈 전략은 “비의 관계를 한 양에서 다른 양을 빼는 것으로 계산하여 그 차를 다른 비에 적용하는 것”으로서 잘못된 전략이다. 마지막으로 비례 추론으로 발전 가능한 전략이란 옳은 전략과 옳지 않은 전략의 중간에 위치하는 것으로 완벽하게 옳은 것은 아니지만 비례 추론으로 발전할 수 있는 전략이라는 관점에서 전(前) 비례적 추론 단계(preportionality)라고 할 수 있다. 이 단계에 있는 학생들은 명백한 비례 추론은 아니지만 어느 정도 논리적인 관계를 이해하고 수행한다.

한편 Van Dooren 외(2009)는 비례 문제에서 제시하는 수의 영향을 이해하기 위해 문제에 제시된 비의 종류와 관련하여 다양한 비례 추론 전략을 살펴보았다. <표 Ⅱ-1>에서 제시된 문제를 통해 살펴보면 먼저 같은 종류의 양을 비교하는 내적비와 관련된 전략으로 곱셈적 접근(multiplicative approach)은 오렌지 개수 사이의 비를 사용하는 방법이다. 다른 종류의 양을 비교하는 외적비와 관련된 함수적 접근(functional approach)은 오렌지 개수와 물의 양 사이의 비를 사용한다. 그 밖에 양의 단위 값을 계산하는 것으로부터 출발하는 단위 인수 접근(unit factor approach), 마지막으로 제시된 전략은 덧셈의 반복에서 기초한 가법적 전략인 반복덧셈(building up)이 있다.

<표 Ⅱ-1> 비례 문제 해결 시 학생들이 사용하는 전략(Van Dooren 외, 2009)

문제: 혼합물 A는 물 6컵에 오렌지 2개가 들어있다. A와 같은 맛인 혼합물 B는 오렌지가 10개 들어있다면, 물은 몇 컵이 들어갔을까?	
전 략	전략 사용의 예
곱셈적 접근 (multiplicative approach)	A: 오렌지 2개 / B: 오렌지 10개 ⇒ A의 오렌지×5＝B의 오렌지 ∴ A의 물×5＝B의 물, 6×5＝30(컵)
함수적 접근 (functional approach)	A: 오렌지 2개 / 물 6컵 ⇒ 오렌지×3＝물 ∴ B: 오렌지 10개×3＝물 30컵
단위 인수 접근 (unit factor approach)	A: 오렌지 2개 / 물 6컵 ⇒ 오렌지 1개 / 물 3컵 ∴ B: 오렌지 1개 / 물 3컵 ⇒ 오렌지 10개 / 물 30컵
반복 덧셈 (building-up)	A: 오렌지 2개 / 물 6컵 ⇒ 오렌지 2＋2 / 물 6＋6 ⇒ … ⇒ B: 오렌지 10＝2＋2＋2＋2＋2 / 물 6＋6＋6＋6＋6＝30

본 연구에서는 Van Dooren 외(2009)가 제시한 전략을 토대로 비례식 알고리즘을 이용하는 형식적 접근(algorithm)을 전략 분석틀에 추가하였다. 비록 형식적 접근 방법이 학생들의 추론 과정을 알 수 없다는 단점은 있으나 현재 교육현장에서 비례식을 지도할 때 많이 사용하는 방법으로 이 같은 접근이 학생들의 비례 추론 전략에 어떻게 나타나는지를 알아보고자 하였다. 이 같은 사례는 김숙진(2011)의 연구에서도 비례 추론 문제 해결 내용적 전략 분석틀에 덧셈 추론 전략, 단위 비율 전략, 곱셈 추론 전략 다음으로 비례식의 성질을 이용하는 비례식 알고리즘 전략을 추가하여 학생들의 비례 추론 전략을 분석한 것을 볼 수 있다.

3. 비례 추론에 영향을 주는 요인

이종욱(2006)과 Singh(2000)의 연구결과에 따르면 유사한 비례 문제를 해결할지라도 학생들이 문제를 해결하기 위해 사용하는 지식과 전략에 차이가 있으며, 기존의 지식과 비례 개념을 통합하는 과정 또한 다른 것을 알 수 있다. 이것은 다양한 요인들이 학생들의 비례적 사고에 영향을 미치는 것을 암시하는 것이다. 따라서 비례 추론 과정이나 전략뿐 만 아니라 어떠한 요인들이 학생들의 비례적 사고에 영향을 미치는지에 대한 연구 또한 매우 중요하다.

Tourniaire와 Pulos(1985)는 학생들이 비례 문제를 푸는 데 영향을 주는 요인을 변수로 부르고 이 변수들을 문제 중심 변수(task-centered variables)와 학생 중심 변수(student-centered variables)로 나누었다. 문제 중심

변수는 다시 문제의 주제와 관련된 상황적 변수(context variables)와 문제에 제시된 숫자와 관련된 구조적 변수(structural variables)로 나뉜다. 문제 중심 변수 중 상황적 변수는 문제에 제시된 상황에 영향을 받는 것을 의미한다. 문제 상황에는 다양한 유형이 존재하는데 대표적인 문제 유형으로는 비율 문제와 혼합 문제를 들 수 있다. 비율 문제에는 물건의 가격을 구하는 문제, 일정한 시간 동안 갈 수 있는 거리를 구하는 속력과 관련된 문제, 도형의 닮음과 관련이 있는 확대/축소 문제 등 다양한 상황의 문제들을 포함한다. 한편 혼합 문제는 두 개의 양을 섞어 새로운 양을 만드는 문제로서 학생들로 하여금 두 요소를 섞었을 때 나타나는 새로운 양에 대한 이해를 요구하여 비율 문제보다 더 어렵게 느낀다는 사실을 연구에서 제시한 바 있다.

다음으로 구조적 변수는 문제에 제시된 숫자의 구조가 학생들에게 영향을 주는 것을 의미한다. 문제에 제시된 숫자가 정수비(integer ratio)인지 아닌지 또는 제시된 비가 $1:n$과 같은 단위(units) 비율과 같은 숫자의 구조는 학생들이 비례 추론을 하는데 많은 영향을 주며, 숫자를 제시하는 순서나 숫자의 크기 또한 학생들의 비례 추론에 영향을 주는 구조적 변수에 해당한다. 특히, 학생들은 정수비가 제시된 문제는 승법적 전략(multiplicative strategy)을, 정수비가 아닌 비가 제시된 문제는 가법적 전략(building up)을 사용하는 경향이 있다고 하였다. 그러나 가법적 전략은 간단한 문제에는 성공적이지만 비가 정수비가 아닐 경우에는 주어진 문제를 해결하다가 비의 관계를 한 양에서 다른 양을 빼는 것으로 계산하여 그 차를 다른 비에 적용하는 덧셈 전략(additive strategy)을 사용하는 오류를 범하는 경우가 많은 것으로 알려져 있다.

이처럼 문제에 제시된 숫자가 비례 추론에 영향을 준다는 사실은 Van Dooren 외(2009)의 연구에서도 잘 나타나 있다. Van Dooren 외(2009)는 비례 문제에서의 수의 영향을 이해하기 위해 문제에 제시된 숫자와 다양한 문제 해결 전략 사이의 연관성을 살펴보았는데, 위와 마찬가지로 정수가 아닌 비가 제시된 문제에서 덧셈 전략으로 해결하는 오류가 많이 발견되었으며, 내적비가 정수비일 경우 옳은 답이 많이 나왔지만 내적비가 정수비가 아닐 경우 정답률이 눈에 띄게 떨어진 것을 알 수 있었다. 또한 비례 문제가 아닌 미지수 문제에서도 정수비와 같이 매력적인 수일 때는 많은 학생들이 비례 문제로 착각하고 비례 추론을 사용하여 문제를 잘못 해결하는 경향이 있다고 하였다.

Lamon(1989)은 비례 추론에 영향을 주는 요인으로 비례 문제에서 제시된 다양한 상황에 따른 의미적 문제 유형을 구분하여 제시하였다. 또한 Lamon(1993)은 그의 후속 연구에서 반 전체를 구성하고 있는 부분인 남학생과 여학생의 비율과 같이 전체(whole)를 구성하는 부분(part)들의 비율과 관련된 부분-부분-전체(part-part-whole) 유형의 문제는 상대적으로 쉬워서 어려운 추론 방법을 사용하지 않고도 해결할 수 있으므로 비례 추론을 거의 사용하지 않은 반면 확대/축소(stretcher/shrinker) 유형의 문제는 거의 모든 학생들이 승법적 관계를 인지하지 못하고 가법적 방법을 사용한다고 하였다. 이와 관련하여 Singh(2000)는 닮음 문제와 같은 확대/축소 유형 문제는 학생들이 기하학적 맥락에서 비례 개념을 잘 적용하지 못한다고 하였다. 특히 두 명의 6학년 학생들을 대상으로 한 그의 연구에서 음식을 만들 때 재료의 양의 비율에 대한 문제와 가격을 묻는 문제 등은 모두 잘 해결하였으며 닮음 문제를 해결할 때는 가법적 전략을 사용하였다는 연구결과에서도 잘 나타나고 있다.

그 밖에 비례 추론에 영향을 주는 요인으로는 이산량 또는 연속량을 들 수 있다. 예를 들어 사탕의 개수와 같은 것은 이산적인 상황이고, 시간과 같은 것은 연속적인 상황이다. Tourniaire와 Pulos(1985)는 이 두 가지 상황의 차이는 학생들의 성별과 나이에 따라서도 다르게 나타난다고 하였다. 남학생들은 이산적 상황 문제를 잘 해결하고 여학생들은 연속적 상황 문제를 잘 해결하는 경향이 있다. Tourniaire와 Pulos(1985)이 제시한 또 다른 요인에는 상황에 대한 학생들의 친숙함을 제시하였는데 이 요인에 대해서는 Heller 외(1989)도 그들의 연구에서 속력 문제를 예로 들어 자동차를 운전해 본 적이 없는 학생들은 자동차로 달리는 상황보다 달리기를 하는 상황이 더 친숙하다는 것을 제시한 바 있다.

따라서 본 연구에서는 문제의 유형과 문제를 구성하고 있는 숫자가 정수비인지 정수비가 아닌지에 따라 학생들의 비례 추론에 어떠한 영향을 주는지를 살펴보았다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상 및 연구 절차

본 연구는 서울시에 소재하고 있는 K초등학교 6학년 학생들을 대상으로 하여 총 6학급 173명(남자 87명, 여자 86명)이 연구에 참여하였다. 연구에 참여한 학생들은 5학년 수학에서 비와 비례 단원을 학습하였으므로 비와 비례 개념을 충분히 알고 있는 상태였다. 학생들의 학업성취도는 학기 초에 실시한 진단평가(1회)와 매 단원 학습 후 실시하는 단원평가(5회)를 합산하여 평균 점수가 90점 이상인 학생을 상위권으로, 70점 이상 90점 미만인 학생을 중위권으로, 70점 미만인 학생을 하위권으로 구분하였다. 연구에 참여한 173명의 학생들을 이와 같은 방법으로 구분한 결과 상위권 학생은 73명, 중위권 학생은 68명, 하위권 학생은 32명이었다.

연구자는 학생들이 사용하는 비례 추론 전략을 알아보기 위하여 문헌 연구와 선행 연구를 고찰한 후, 2011년 3월 검사지를 제작하여 초등학교 5, 6학년을 대상으로 2011년 4월 예비연구를 실시하였다. 설문에 사용한 검사지는 비례추론에 대한 선행연구(Jane-Jane Lo & Watanabe, T., 1997; Kaput, J. J., & West, M. M., 1994; Misailidou, C. & Williams, J., 2003; Van Dooren, W., Bock, D. D., Evers, M., & Verschaffel, L., 2009)에서 사용한 문항을 바탕으로 연구자가 연구 목적에 맞게 선별, 수정하여 제작하였다. 또한 예비 연구 분석을 통해 학생들이 다양한 전략을 사용하여 비례 문제를 해결할 수 있도록 하기 위하여 비와 비례 단원을 학습한 6학년으로 연구 대상을 선정하고 대상에 맞게 검사지에 제시된 문제의 난이도를 조정하고 검사시간에 적절하게 문제의 개수를 조절하였으며, 앞의 문제가 뒤에 제시된 문제에 영향을 주지 않도록 하기 위해 문제의 제시 순서 등을 재수정 및 보완한 후 2011년 5월 본 연구를 실시하였다. 학생들이 작성한 검사지를 토대로 학업성취도에 따른 학생들의 문제 해결에서 나타나는 비례 추론 능력과 전략의 특징을 분석하였다.

2. 자료 수집 및 분석

본 연구에서는 총 8문항의 비례 문제를 학생들에게 제시하고, 각 문항별로 최대 3가지의 해결전략을 사용하여 문제를 해결하도록 하여 학생들이 비례 문제를 해결할 때 다양한 추론 전략을 활용하는 능력을 살펴보았다. 검사는 K초등학교 6학년 6개 학급을 선정하여 5월 27일 각 반 담임교사의 감독아래 40분간 실시하였으며, 검사의 효과를 높이기 위해 사전에 담임교사에게 검사의 목적과 검사 방법, 검사 실시상의 유의점에 대해 충분히 전달하였다. 또한 학생들이 문제를 해결하는 과정에서 가능하면 자신의 생각을 다양한 방법을 사용하여 자세히 표현할 수 있도록 요구하였다.

학업성취도에 따른 학생들의 비례 추론 능력을 알아보기 위하여 연구자는 Van Dooren 외(2009)가 제시한 <표 Ⅱ-1>의 전략을 토대로 형식적 접근(algorithm)을 추가하여 비례 추론 전략을 아래 <표 Ⅲ-1>와 같이 범주화하고 문항별로 학생들이 사용한 비례 추론 전략을 분석하고 문항마다 사용한 전략의 개수는 모두 몇 가지인지 조사하였다.

본 연구에서는 학업성취도에 따른 학생들의 비례 추론 능력을 다각도로 분석하기 위하여 비례 추론 능력을 다양한 비례 추론 전략 활용 능력과 자신의 추론 과정을 표현하는 능력, 비례적인 상황을 인식하는 능력으로 구분하여 분석하였다. 먼저 학생들의 비례 추론 전략 활용 능력을 살펴보기 위해 학업성취도별로 문제 해결에 사용한 비례 추론 전략의 개수를 분석하였고, 추론 과정 표현 능력을 살펴보기 위해 학업성취도별로 어떤 표현 양식(기호적, 언어적, 시각적 표현)을 사용하여 표현하였는지 그리고 비례 상황을 올바르게 인식하였는지를 검사지에 나타난 학생들의 풀이과정을 통해 분석하였다. 그리고 학생들이 문제를 해결할 때 [풀이방법 ①]에 가장 먼저

제시한 비례 추론 전략을 조사하여 학업성취도에 따라 문제의 유형과 문제에 제시된 숫자와 관련하여 학생들이 어떤 비례 추론 전략을 선호하는지 비례 추론 전략 사용의 특징을 분석하였다.

<표 Ⅲ-1> 연구에서 분석에 사용한 비례 추론 전략

분류 코드	비례추론전략	설 명
M	곱셈적 접근 (multiplicative approach)	내적인 비(같은 양(量) 사이의 비)를 사용하는 접근방법 (나눗셈과 관련하여) '포함제(包含除, division)'
F	함수적 접근 (functional approach)	외적인 비(서로 다른 양 사이의 비)를 사용하는 접근방법 '등분제(等分除, partition)'
U	단위 인수 접근 (unit factor pproach)	정수배를 쉽게 할 수 있는 단위 비율(하나의 단위량에 대응되는 다른 양의 비)을 구하여 해결하는 방법
B	반복 덧셈 (building-up)	덧셈의 반복에 기초한 덧셈적 추론방법
A	형식적 접근 (algorithm)	비례식을 세워 내항의 곱과 외항의 곱이 같음을 이용한 알고리즘을 사용하는 방법

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

1. 학업성취도에 따른 비례 추론 능력 분석

학생들의 비례 추론 능력을 다각도로 분석하기 위하여 본 연구에서는 비례 추론 능력을 다양한 비례 추론 전략 활용 능력과 자신의 추론 과정을 표현 양식을 사용하여 표현하는 능력, 비례적인 상황을 인식하는 능력으로 구분하여 연구 결과를 분석하였다.

(1) 비례 추론 전략 활용 능력

비례 추론 능력은 각 문항별로 학생들이 비례 추론 전략을 다양하게 활용할수록 비례 추론 능력이 뛰어난 것으로 판단하고 학업성취도와 비례 추론 능력과의 관계를 문항별로 학생들이 사용한 비례 추론 전략의 개수를 통해 분석하였다.

아래 <표 Ⅳ-1>은 문항별 학업성취도와 비례 추론 전략 사용수 사이의 관계를 나타내는 표이다. <표 Ⅳ-1>을 통해 자세히 살펴보면 상위권 학생들은 1, 4, 8번 문항을 제외한 모든 문항에서 50% 이상이 비례 추론 전략을 2개 이상 사용하여 문제를 해결하였고, 중위권은 4, 8번을 제외하고 모든 문제를 80% 이상의 학생들이 적어도 1개의 추론 전략을 사용하여 해결할 수 있었다. 그러나 하위권은 2, 3번 문항을 제외한 모든 문항에서 3개의 전략을 사용한 학생이 아무도 없었고, 1, 2, 5번 문항을 제외한 모든 문항에서 50%가 넘는 학생들이 추론 전략을 전혀 사용하지 못하는 것으로 나타났다. 따라서 학생들의 학업성취도가 높을수록 다양한 비례 추론 전략을 사용하여 문제를 해결할 수 있다는 사실을 확인할 수 있었다.

4번과 8번 문항의 경우 다른 문제들과 비교하여 상・중・하위권 학생들 모두에게서 전략을 한 가지도 사용하지 못한 학생의 비율이 큰 폭으로 증가하였음을 알 수 있다. 이는 가격이나 속력을 구하는 다른 문항들과는 달리 4번과 8번 문항과 같은 혼합물이나 확대/축소 유형의 문제는 대체로 학생들에게 친숙하지 않고, 문제의 숫자가 두 문제 모두 정수비가 아닌 것으로 제시되어 학생들에게 어려웠음을 알 수 있다.

또한 1번 문항은 상위권과 중위권의 전략 사용수의 차이가 거의 없고, 상・중・하위권 학생의 50% 이상이 모

두 한 가지 전략, 특히 단위 인수 접근 전략만을 사용한 것으로 나타났다. 이는 가격을 구하는 1번 문항의 경우 물건 하나의 가격을 구하여 문제를 해결하는 방법이 학생들에게 가장 익숙하기 때문에 다른 전략은 낯설게 느껴져서 시도하지 못한 것으로 판단된다.

<표 Ⅳ-1> 학업성취도와 비례 추론 전략 사용수 사이의 비교 (단위 : %)

전략사용수	성취도	문항1	문항2	문항3	문항4	문항5	문항6	문항7	문항8
3개	상(N=73)	9.6	27.4	20.5	11.0	27.4	12.3	17.8	11.0
	중(N=68)	5.9	17.6	13.4	0	1.8	10.3	11.8	1.5
	하(N=32)	0	3.1	3.1	0	0	0	0	0
2개	상(N=73)	28.8	32.9	43.8	26.0	52.1	38.4	41.1	19.2
	중(N=68)	38.2	35.3	29.9	22.1	48.5	20.6	32.4	17.6
	하(N=32)	3.1	18.8	15.6	0	15.6	3.1	12.5	0
1개	상(N=73)	60.3	32.9	31.5	39.7	20.5	43.8	37.0	37.0
	중(N=68)	54.4	38.2	40.3	32.4	33.8	52.9	38.2	23.5
	하(N=32)	53.1	46.9	28.1	12.5	40.6	43.8	34.4	6.3
0개	상(N=73)	1.4	6.8	4.1	23.3	0	5.5	4.1	32.9
	중(N=68)	1.5	8.8	16.4	45.6	5.9	16.2	17.6	57.4
	하(N=32)	43.8	31.3	53.1	87.5	43.8	53.1	53.1	93.8

(2) 비례적 추론 과정 표현 능력

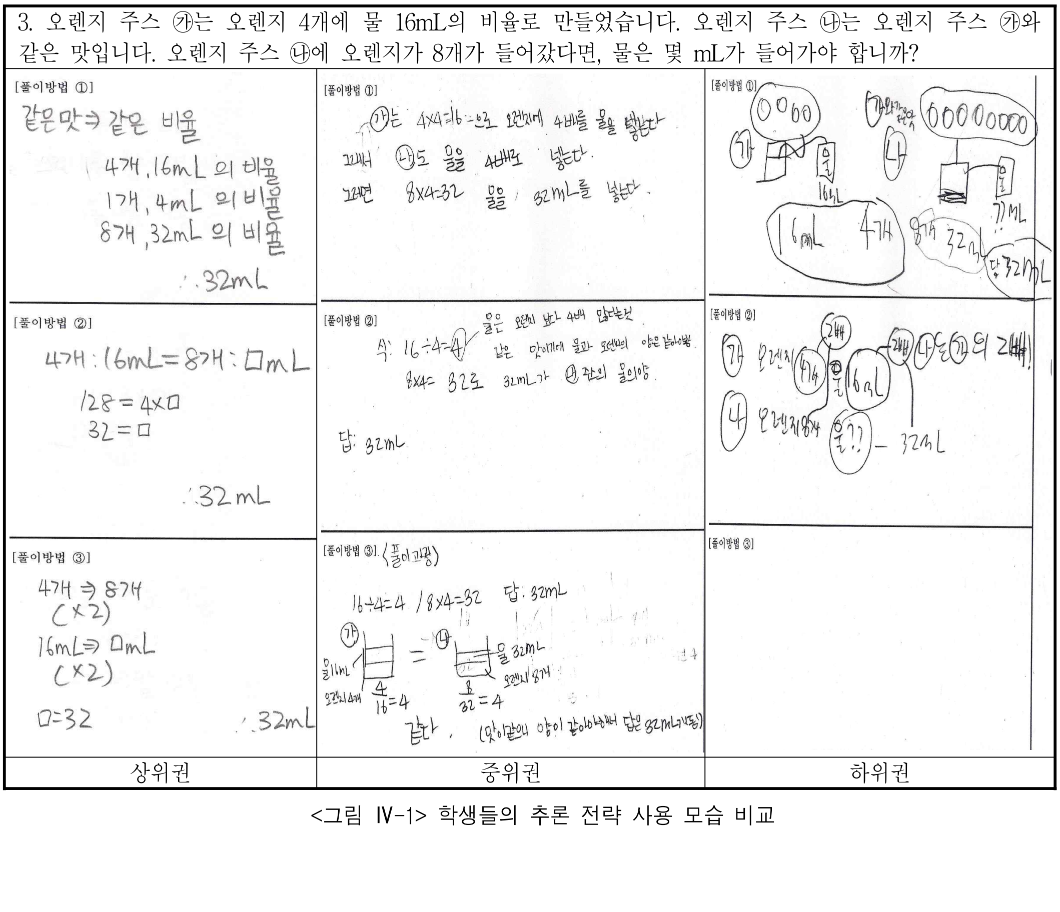
비례 문제를 해결하는 과정에서 학업성취도에 따라 학생들이 자신의 비례 추론 과정을 표현하는 능력에도 차이가 있음을 알 수 있다.

<표 Ⅳ-2> 학업성취도에 따른 표현 양식 활용 유형 비교 (단위 : %)

문항	성취도	기호적 표현	언어적 표현	시각적 표현		무응답	계
		수식	글, 논리	그림	표		
1번	상	87.7	11.0	0.0	0.0	1.4	100
	중	76.5	20.6	1.5	0.0	1.5	100
	하	37.5	9.4	6.3	3.1	43.8	100
2번	상	71.2	20.5	1.4	0.0	6.8	100
	중	69.1	17.6	2.9	1.5	8.8	100
	하	50.0	12.5	3.1	3.1	31.3	100
3번	상	69.9	24.7	1.4	0.0	4.1	100
	중	51.5	22.1	8.8	0.0	17.6	100
	하	25.0	12.5	9.4	0.0	53.1	100
4번	상	58.9	15.1	1.4	1.4	23.3	100
	중	33.8	16.2	0.0	2.9	47.1	100
	하	9.4	0.0	3.1	0.0	87.5	100
5번	상	79.5	19.2	1.4	0.0	0.0	100
	중	69.1	22.1	2.9	0.0	5.9	100
	하	34.4	12.5	9.4	0.0	43.8	100
6번	상	75.3	19.2	0.0	0.0	5.5	100
	중	57.4	25.0	1.5	0.0	16.2	100
	하	34.4	6.3	6.3	0.0	53.1	100

7번	상	86.3	8.2	1.4	0.0	4.1	100
	중	63.2	16.2	1.5	2.9	16.2	100
	하	28.1	15.6	0.0	3.1	53.1	100
8번	상	52.1	9.6	2.7	1.4	34.2	100
	중	36.8	4.4	1.5	0.0	57.4	100
	하	0.0	6.3	0.0	0.0	93.8	100

위의 <표 Ⅳ-2>는 문항별 학업성취도에 따른 표현 양식 활용 유형을 비교한 표이다. 모든 문항에서 상위권 학생들은 중・하위권 학생들보다 더 많은 비율의 학생들이 수식을 사용한 기호적 표현을 사용하여 자신의 비례 추론 과정을 표현하였다. 또한 언어적 표현에서는 학업성취도별로 별다른 차이가 없었으나 그림이나 표를 사용하는 시각적 표현은 8번을 제외한 모든 문항에서 학업성취도가 낮은 학생들에게서 많이 사용된 것을 알 수 있다. 다시 말해, 상위권 학생들은 수식을 많이 사용하는 반면 하위권 학생들은 상위권 학생들보다 시각적 표현인 그림과 표를 사용하여 자신의 비례 추론 과정을 설명하는 경향이 있었다. 이는 Bruner의 주장과 같이 수학 기호를 사용한 표현 방법을 최상위 능력으로 보았을 때 학업성취도가 높을수록 표현 능력 또한 높은 것으로 볼 수 있다.



<그림 Ⅳ-1> 학생들의 추론 전략 사용 모습 비교

<그림 Ⅳ-1>에서 학생들의 추론 전략 사용 모습을 자세히 살펴보면, 상위권 학생은 단위 인수 접근, 형식적 접근, 곱셈적 접근 방법 세 가지를 모두 사용하여 수학적 기호를 통해 간략하고 정확하게 표현하였고, 중위권 학생은 풀이방법 세 가지를 모두 적었으나 세 가지 방법 모두 함수적 접근 방법을 다르게 표현하였을 뿐 사용한 전략은 한 가지 방법뿐이었으며, 글과 그림과 같은 언어적, 시각적 표현을 사용하여 자신의 사고과정을 설명하였다. 반면에 하위권 학생은 문제의 답은 올바르게 구했지만, 첫 번째 풀이에서는 어떤 전략을 사용하여 해결하였는지 정확히 알 수 없을 정도로 자신의 생각을 표현하는데 매우 서툴렀으며, 그나마 두 번째 풀이에서 '㉯는 ㉮의 2배'라는 표현을 통해 곱셈적 접근 방법을 사용한 것을 알 수 있었다. 이를 통해 상위권 학생일수록 다양한 전략을 좀 더 유연하게 사용하며, 상위 표현 능력인 수식을 사용하여 자신의 추론 과정을 체계적이고 정확하게 표현하는 능력이 뛰어남을 알 수 있다.

이는 상위권 학생들이 문제를 이해하고 문제 해결에 필요한 조건을 잘 구별하여 적절하게 활용하는 능력이 더 뛰어나며 자신의 사고과정을 잘 구조화하여 표현할 수 있는 능력 또한 뛰어남을 의미한다. 그리고 문제를 해결하는데 사용하는 표현 양식에서 상위권 학생들은 대부분 수식을 사용하는 반면, 중・하위권 학생들은 글이나 그림을 사용하는 차이를 보였다. 상위권 학생들에게는 자신의 추론 과정을 가장 간략하고 정확하게 표현하는 기호적 표현인 수식의 사용이 능숙하게 이루어지는 것을 알 수 있다. 그러나 수식의 사용이 서툰 중・하위권 학생들은 언어적 표현과 시각적 표현인 글이나 그림을 사용해 체계적이지 않고 장황하게 설명하였다.

(3) 비례 상황 인식 능력

학생들의 학업성취도에 따라 비례 상황과 비례가 아닌 상황을 식별하는 능력에도 차이가 있음을 확인할 수 있었다. 특히, 4번과 8번 문항의 경우 학업성취도에 따라 비례 상황 인식 능력이 크게 차이가 났는데 4번 문항은 상위권 14.1%, 중위권 23.6%, 하위권 25.6%의 학생들이 문제를 비례 상황으로 인식하지 못하여 오류를 범한 것으로 나타났다. 8번 문항은 상위권 18.9%, 중위권 26.9%, 하위권 25.6%의 학생들이 이러한 오류를 범하였는데 <그림 Ⅳ-2>에서 학생의 풀이과정을 살펴보면 K학생의 경우 비에 대한 개념과 확대하기 전과 확대한 후의 비의 보존, 즉 구조적 동질성에 대한 이해가 부족하고 사진을 확대하는 다음과 같은 문제 상황을 비례 상황으로 인식하지 못하여 생긴 오류라고 할 수 있다. E학생의 경우도 비슷한데 ㉮나무를 확대시킨 상황을 비례 상황이 아닌 단순히 5cm커진 상황으로 생각하여 문제를 잘못 해결하였다. 이러한 오류는 학업성취도와 상관없이 오류를 범한 대부분의 학생들에게서 발견할 수 있었다.

8. 현성이가 사진기로 정원에 있는 나무 두 그루를 찍었습니다. 사진에 있는 ㉮나무의 높이는 3cm이고, ㉯나무의 높이는 9cm입니다. 이 사진을 확대하여 다시 재보았더니 ㉮나무의 높이가 8cm였습니다. 확대한 사진의 ㉯나무의 높이는 몇 cm입니까?	
3+6=9 14cm 8+6=14	확대한 ㉮ 나무 높이 에 확대하기전 ㉮ 나무 높이를 빼면 5cm가 나오는데 그럼 5cm를 확대한거니까 9+5를 하면 답이 나온다. 답: 14cm
K학생의 잘못된 풀이	E학생의 잘못된 풀이

<그림 Ⅳ-2> 문항 8에서 학생들의 잘못된 비례 추론 과정

2. 학업성취도에 따른 비례 추론 전략 사용의 특징

학업성취도에 따른 비례 추론 전략 사용의 특징을 분석하기 위하여 일반적으로 학생들이 문제를 해결할 때 가장 자신이 있고 선호하는 방법을 첫 번째 방법에 사용한다고 판단하고 [풀이방법①]에서 사용한 전략을 기준으로 각 문항마다 학생들이 선호하는 비례 추론 전략을 비율로 나타내어 분석하였다. 또한 학생들의 풀이방법을 살펴보고 학생들이 문제를 해결할 때 나타나는 비례 추론 전략 사용의 특징을 비교, 분석하였다. 검사지에 제시된 8문제는 다양한 비례 추론 전략 사용의 특징을 살펴보기 위하여 4가지 문제 유형별로 각각 문제를 구성하는 숫자의 비가 모두 정수비인 경우(Integer ratio)와 정수비가 아닌 경우(Non-integer ratio) 2문제씩 구성되었다.

<표 Ⅳ-3> 검사지의 구체적인 문항 구성

문제유형	문제유형설명	문항번호	숫자구조	검사내용	문제형태
물건가격	물건의 일정한 개수의 가격을 제시하고 같은 물건의 주어진 개수의 가격을 묻는 문제	1	정수비가 아님	두 비의 항상 일정한 관계(구조적 동질성)을 파악하고, a, b, c의 세 정보를 바탕으로 d의 값 추론하기	서술형
		5	정수비		
속력	일정 시간 가는 거리를 제시하고 주어진 시간 동안 가는 거리 또는 주어진 거리를 가는데 걸리는 시간을 묻는 문제	2	정수비		
		7	정수비가 아님		
혼합물	농도가 같은 혼합물을 만드는데 필요한 물질의 양을 구하는 문제	3	정수비		
		4	정수비가 아님		
확대/축소	도형이나 물체를 같은 비율로 늘이거나 줄이는 문제	6	정수비		
		8	정수비가 아님		

아래 <표 Ⅳ-4>는 8문항의 학업성취도별 선호하는 비례 추론 전략에 관한 표이다. <표 Ⅳ-4>를 살펴보면 4번과 8번 문항을 제외한 모든 문항에서 학업성취도에 따라 선호하는 전략의 차이는 없었다. 예를 들면, 1번 문항을 해결하는데 학생들이 가장 많이 사용한 비례 추론 전략은 상・중・하위권 학생들 모두 단위 인수 접근(U)이고 2번 문항 또한 곱셈적 접근(M)으로 일치하였다. 다시 말해, 4번과 8번을 제외한 각 문항마다 상・중・하위권 학생들이 가장 많이 사용한 비례 추론 전략이 일치하였으며, 이를 통해 학생들의 학업성취도는 비례 추론 전략 선택에 영향을 주지 않는 것을 알 수 있었다. 그 이유는 다양한 비례 추론 전략을 사용할 수 있는 상위권 학생일지라도 문제마다 가장 적절한 전략을 선택하여 문제를 해결하며 그 전략은 중・하위권 학생들에게도 가장 쉬운 방법으로 선택되었기 때문이다.

반면 4번과 8번 문항의 경우, 학업성취도에 따라 선호하는 전략에 약간의 차이가 있는데 4번 문항에서는 중・하위권 학생들의 선호도 모두 함수적 접근(F)이 제일 높은 반면 상위권 학생들의 선호도는 비례식 알고리즘을 사용하는 형식적 접근(A)이 37%로 가장 높은 것으로 나타났다. 8번 문항에서는 상・중위권 학생들이 선호하는 전략은 형식적 접근(A)으로 함수적 접근(F)을 선호한 하위권 학생들과 차이가 있었다. 4번과 8번 문항은 문제 유형이 혼합물과 확대/축소 유형으로 학생들에게 낯설고, 문제를 구성하는 숫자의 구조가 정수비가 아닌 것으로 오답률이 다른 문제들보다 상대적으로 높은 문제였다. 따라서 4번, 8번과 같이 오답률이 높은 어려운 문제일수록 학생들은 비례 추론 과정을 생략하고 비례식 알고리즘에 숫자를 대입하여 쉽게 문제를 해결할 수 있는 형식적 접근을 사용하는 경향이 있는 것을 알 수 있었다.

<표 Ⅳ-4> 문항별 학업성취도에 따른 비례 추론 전략 선호도

문항	성취도 \ 전략		M	F	U	B	A	MU	BU	오답	계
1	상	명수(명)	2	0	67	0	2	1	0	1	73
		비율(%)	2.7	0.0	91.8	0.0	2.7	1.4	0.0	1.4	100.0
	중	명수(명)	0	0	61	0	4	0	2	1	68
		비율(%)	0.0	0.0	89.7	0.0	5.9	0.0	2.9	1.5	100.0
	하	명수(명)	0	0	18	0	0	0	0	14	32
		비율(%)	0.0	0.0	56.3	0.0	0.0	0.0	0.0	43.8	100.0
2	상	명수(명)	44	3	14	1	5	1	0	5	73
		비율(%)	60.3	4.1	19.2	1.4	6.8	1.4	0.0	6.8	100.0
	중	명수(명)	39	3	12	4	4	0	0	6	68
		비율(%)	57.4	4.4	17.6	5.9	5.9	0.0	0.0	8.8	100.0
	하	명수(명)	17	0	2	2	1	0	0	10	32
		비율(%)	53.1	0.0	6.3	6.3	3.1	0.0	0.0	31.3	100.0
3	상	명수(명)	32	13	13	0	12	0	0	3	73
		비율(%)	43.8	17.8	17.8	0.0	16.4	0.0	0.0	4.1	100.0
	중	명수(명)	34	7	4	0	11	0	0	12	68
		비율(%)	50.0	10.3	5.9	0.0	16.2	0.0	0.0	17.6	100.0
	하	명수(명)	10	2	2	1	0	0	0	17	32
		비율(%)	31.3	6.3	6.3	3.1	0.0	0.0	0.0	53.1	100.0
4	상	명수(명)	2	20	7	0	27	0	0	17	73
		비율(%)	2.7	27.4	9.6	0.0	37.0	0.0	0.0	23.3	100.0
	중	명수(명)	0	21	0	0	15	0	0	32	68
		비율(%)	0.0	30.9	0.0	0.0	22.1	0.0	0.0	47.1	100.0
	하	명수(명)	0	4	0	0	0	0	0	28	32
		비율(%)	0.0	12.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	87.5	100.0
5	상	명수(명)	33	2	33	1	4	0	0	0	73
		비율(%)	45.2	2.7	45.2	1.4	5.5	0.0	0.0	0.0	100.0
	중	명수(명)	40	0	17	0	7	0	0	4	68
		비율(%)	58.8	0.0	25.0	0.0	10.3	0.0	0.0	5.9	100.0
	하	명수(명)	15	0	3	0	0	0	0	14	32
		비율(%)	46.9	0.0	9.4	0.0	0.0	0.0	0.0	43.8	100.0
6	상	명수(명)	42	13	0	0	14	0	0	4	73
		비율(%)	57.5	17.8	0.0	0.0	19.2	0.0	0.0	5.5	100.0
	중	명수(명)	40	5	1	0	11	0	0	11	68
		비율(%)	58.8	7.4	1.5	0.0	16.2	0.0	0.0	16.2	100.0
	하	명수(명)	12	3	0	0	0	0	0	17	32
		비율(%)	37.5	9.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	53.1	100.0
7	상	명수(명)	0	5	51	0	13	1	0	3	73
		비율(%)	0.0	6.8	69.9	0.0	17.8	1.4	0.0	4.1	100.0
	중	명수(명)	1	1	41	0	10	3	1	11	68
		비율(%)	1.5	1.5	60.3	0.0	14.7	4.4	1.5	16.2	100.0
	하	명수(명)	0	0	13	0	0	1	1	17	32
		비율(%)	0.0	0.0	40.6	0.0	0.0	3.1	3.1	53.1	100.0

8	상	명수(명)	2	19	6	0	21	0	0	25	73
		비율(%)	2.7	26.0	8.2	0.0	28.8	0.0	0.0	34.2	100.0
	중	명수(명)	0	9	3	0	17	0	0	39	68
		비율(%)	0.0	13.2	4.4	0.0	25.0	0.0	0.0	57.4	100.0
	하	명수(명)	0	2	0	0	0	0	0	30	32
		비율(%)	0.0	6.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	93.8	100.0

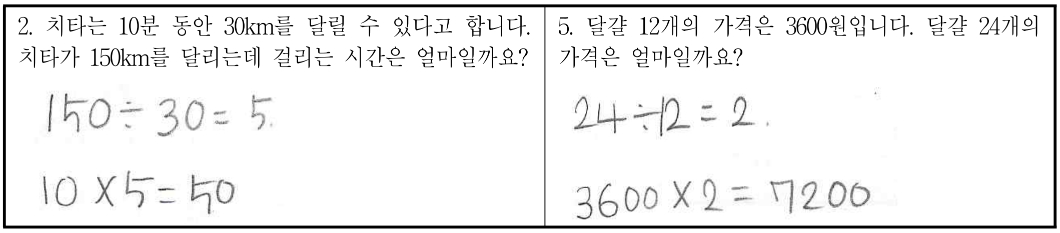
학생들의 비례 추론 전략 사용에 있어서의 또 다른 특징은 학업성취도가 높을수록 학생들이 문제를 해결할 때 선호하는 전략이 다양하다는 것이다. 예를 들어, <표 Ⅳ-4>를 통해 4번 문항을 살펴보면 하위권 학생들이 선호한 전략은 함수적 접근(F) 한 가지 뿐이었으나 중위권 학생들은 함수적 접근(F), 형식적 접근(A) 두 가지 전략을 선호하였고, 상위권 학생들은 그 보다 더 많은 네 가지 전략, 곱셈적 접근(M), 함수적 접근(F), 단위 인수 접근(U), 형식적 접근(A)을 선호하는 것으로 나타났다. 4번 문항 뿐만 아니라 모든 문항에서 상위권 학생들이 선호하는 전략이 고루 분포가 되어 있는 것으로 보아 학업성취도가 높은 학생일수록 다양한 전략 사용 능력이 뛰어나기 때문에 전략 선호의 분포가 한 가지 전략에 치우쳐 있는 것이 아니라 더 다양한 전략을 사용하여 문제를 해결할 수 있다는 것을 알 수 있었다.

학업성취도에 따라 학생들이 선호하는 비례 추론 전략에는 큰 차이가 없으나 문항별로 학생들이 선호하는 전략에는 차이가 있었다. <표 Ⅳ-5>를 보면 문제에 제시된 숫자가 정수비인 2, 3, 5, 6번 문항은 주로 곱셈적 접근(M)으로 문제를 해결하는 경향이 있었다.

그 이유를 <그림 Ⅳ-3>의 학생의 풀이방법을 통해 살펴보면, 2번 문항에서 학생들은 제시된 거리 30km와 150km사이의 관계가 5배가 됨을 쉽게 발견할 수 있고 5번 문항에서도 달걀 개수 사이의 비(내적비)가 24는 12의 2배로 학생들에게 친숙한 정수비이므로 많은 학생들이 같은 양 사이의 내적비를 사용하는 접근방법인 곱셈적 접근 방법을 사용한 것을 볼 수 있다.

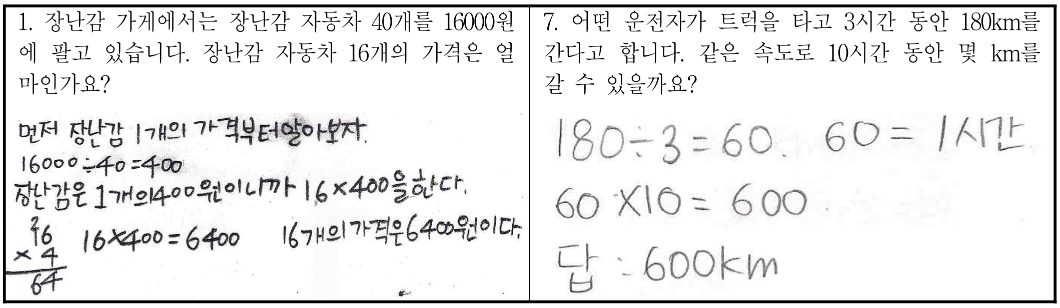
<표 Ⅳ-5> 학생들의 문항별 비례 추론 전략 선호도

문항 \ 전략		M	F	U	B	A	MU	BU	오답	계
1	학생수(명)	2	0	146	0	6	1	2	16	173
	비율(%)	1.2	0.0	84.4	0.0	3.5	0.6	1.2	9.2	100
2	학생수(명)	100	6	28	7	10	1	0	21	173
	비율(%)	57.8	3.5	16.2	4.0	5.8	0.6	0.0	12.1	100
3	학생수(명)	76	22	19	1	23	0	0	32	173
	비율(%)	43.9	12.7	11.0	0.6	13.3	0.0	0.0	18.5	100
4	학생수(명)	2	45	7	0	42	0	0	77	173
	비율(%)	1.2	26.0	4.0	0.0	24.3	0.0	0.0	44.5	100
5	학생수(명)	88	2	53	1	11	0	0	18	173
	비율(%)	50.9	1.2	30.6	0.6	6.4	0.0	0.0	10.4	100
6	학생수(명)	94	21	1	0	25	0	0	32	173
	비율(%)	54.3	12.1	0.6	0.0	14.5	0.0	0.0	18.5	100
7	학생수(명)	1	6	105	0	23	5	2	31	173
	비율(%)	0.6	3.5	60.7	0.0	13.3	2.9	1.2	17.9	100
8	학생수(명)	2	30	9	0	38	0	0	94	173
	비율(%)	1.2	17.3	5.2	0.0	22.0	0.0	0.0	54.3	100



<그림 Ⅳ-3> 문항 2, 문항 5에서 곱셈적 접근(M) 전략의 사용 모습

그러나 문제에 제시된 숫자가 정수비가 아닌 1번과 7번 문항의 경우 많은 학생들이 단위 인수 접근(U)을 사용하였다. 1번은 물건의 가격을 구하는 문제로 정수비가 아닌 숫자가 비로 제시되었을 때 학생들은 곱셈적 접근을 사용하지 못하고 상·중·하위권 학생들 모두 장난감 자동차 1개의 가격을 구해서 문제를 해결하는 단위 인수 전략을 사용하였다. 7번 문항도 학생들은 단위 인수 전략을 가장 많이 사용하였는데 이 문제는 일정 시간 동안 가는 거리를 구하는 속력과 관련된 문제로 <그림 Ⅳ-4>에서 보면 학생들이 3시간과 10시간 사이 비율을 사용하여 문제를 해결하는 것이 쉽지 않았기 때문에 학생들에게 익숙한 속력을 이용하여 해결하는 단위 인수 접근 방법을 선호한 것으로 보인다.



<그림 Ⅳ-4> 문항 1, 문항 7에서 단위 인수 접근(U) 전략의 사용 모습

그 밖에 4번 문항은 함수적 접근(F)과 형식적 접근(A)이 비슷한 비율로 나타났는데 <그림 Ⅳ-5>를 통해 살펴보면 노란색 페인트와 빨간색 페인트의 비율이 3 : 6으로 학생들이 두 페인트를 혼합할 때, 빨간색 페인트가 노란색 페인트의 2배인 것을 쉽게 찾을 수 있었다. 따라서 똑같은 색이라는 것이 같은 비율로 혼합한다는 것을 알고 있는 학생들은 주로 함수적 접근 전략을 사용하여 문제를 해결하는 경향을 보였다. 그러나 비례식 알고리즘의 사용이 익숙한 학생들은 함수적 접근보다 형식적 접근을 더 많이 사용하였다. 이 문제는 혼합물이라는 낯선 유형의 문제에 숫자까지 정수비가 아니라서 오답률이 44.5%나 되는 어려운 문제였기 때문에 학생들은 간단히 알고리즘을 통해 답을 구할 수 있는 형식적 접근을 사용한 것으로 판단된다. 이러한 현상은 확대/축소 유형의 8번 문제에서도 동일하게 나타난다. <표 Ⅳ-5>를 보면 8번 문제는 절반 이상의 학생이 해결하지 못한 문제로 형식적 접근(A)이 22%로 가장 높게 나타났다. 함수적 접근(F) 또한 17.3%로 형식적 접근 다음으로 높았지만 이 문제는 위의 혼합물 유형의 4번 문제와 마찬가지로 비례식 알고리즘을 알고 있는 대다수의 학생들은 어려운 비례 문제에 봉착할 경우 비례적 관계를 추론하는 과정 없이 알고리즘을 사용하여 문제를 해결하려는 경향이 있는 것을 알 수 있다.

<table>
<tr><td colspan="2">4. 민수가 노란색 페인트 3통과 빨간색 페인트 6통을 섞어서 방을 칠했습니다. 소희가 민수가 칠한 색과 똑같은 색으로 칠하려고 할 때, 노란색 페인트를 7통 사용하였다면 빨간색 페인트는 몇 통을 사용해야 합니까?</td></tr>
<tr><td>민수 = 3 : 6
↳ 3 × 2 = 6
소희 = 7 : □
↳ 7 × 2 = 14 답 : 14통</td><td>3 : 6 = 7 : $\boxed{14}$
노랑 빨강
6 × 7 ÷ 3 = 14
14통</td></tr>
<tr><td>함수적 접근(F)을 사용한 학생</td><td>형식적 접근(A)을 사용한 학생</td></tr>
</table>

<그림 Ⅳ-5> 문항 4에서 학생들의 비례 추론 전략 사용 모습

Ⅴ. 요약 및 결론

최근 NCTM(2000)의 학교수학과 원리를 위한 규준에서는 중등 교육과정의 중요한 내용으로 제시하고 중등수학의 기초를 마련하는 초등학교 5, 6학년 수학에서 곱셈적 상황을 통한 비례 추론을 비형식적으로 경험해야 한다고 강조한다. 초등 수학에서의 비형식적 비례 추론 교육이 성공적으로 이루어졌을 때 비로소 학생들은 중등수학에서의 형식적인 비례 추론 학습을 수행할 수 있다. 그러나 대다수의 초등학생들이 비와 비례 개념을 처음 접하였을 때 많은 어려움을 느낀다. 따라서 초등 수학에서 반드시 성공적으로 지도해야 하는 비례 추론의 중요성을 인식하고 본 연구에서는 초등학교 6학년 학생들의 학업성취도에 따른 비례 추론 능력과 비례 추론 전략을 분석하였다.

먼저 학생들의 학업성취도에 따른 비례 추론 능력은 활용능력, 표현능력과 인식능력으로 나누어 분석하였으며, 그 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 학업성취도가 높은 학생일수록 비례 추론 활용능력이 뛰어남을 알 수 있었다. 초등학교 6학년 학생들을 대상으로 학업성취도별 비례 문제 해결에서의 추론 전략 활용 능력을 관찰한 결과, 상위권 학생들은 다양한 비례 추론 전략 사용하여 문제를 해결할 수 있었고 문제를 이해하고 전략을 적용하는 능력이 뛰어남을 알 수 있었다. 반면에 하위권 학생들은 비례 추론 전략을 전혀 사용하지 못하는 학생의 비율이 중・상위권의 학생들보다 현저하게 높았다. 그러나 학업성취도와 상관없이 문제의 유형과 문제를 구성하는 숫자의 종류는 학생들의 비례 추론에 영향을 주었다. 혼합물의 비율과 관련된 문제는 전략 사용수가 상대적으로 낮게 나타났는데 이는 두 요소를 섞었을 때 어떤 일이 일어나는지에 대한 이해가 요구되며, 대부분의 혼합물이 같은 단위의 양으로 표현이 되기 때문에 학생들에게 좀 더 혼란이 야기되어 어렵게 느껴지기 때문이다. 그리고 문제를 구성하고 있는 숫자는 정수비가 아닐 경우 오답률이 높은 것으로 나타났는데 이는 모든 숫자가 정수비로 표현이 되는 경우보다는 내적비나 외적비 중 하나라도 정수비가 아닌 경우는 학생들이 비례 추론을 하는데 어느 정도 장애요소가 됨을 알 수 있다.

둘째, 상위권 학생들은 중・하위권 학생들과 비교하였을 때 동일한 추론 전략을 사용하더라도 글과 그림보다는 기호적 표현(수식, 기호 등)을 사용하여 더욱 간단하고 체계적으로 자신의 추론과정을 나타내었다. 이는 상위권 학생들이 문제를 이해하는 능력이 뛰어나고 문제를 해결하는데 필요한 조건을 잘 구별하여 문제 해결에 활용하는 능력이 더 뛰어났기 때문이다. 학업성취도가 높을수록 상위 표현 능력인 기호적 표현을 사용하여 자신의 추론 과정을 체계적이고 정확하게 표현하는 능력이 뛰어남을 알 수 있었다. 이러한 연구결과는 고등학생을 대상으로 한 김민경・권혁진(2010)의 표상에 관련된 연구에서 비례 문제는 아니지만 일반 수학 문제를 해결할 때 상

위권 학생들의 표상 활용 능력이 중·하위권 학생들에 비해 현저하게 높으며 수식의 사용을 선호하여 수학적 기호를 원활하게 사용하였다는 연구결과와 일치한다.

셋째, 학업성취도에 따른 비례적 상황 인식능력에 차이가 있음을 확인할 수 있었다. 이는 학생들의 비례 상황 인식을 알아보기 위해 제시한 혼합물 비율과 확대/축소를 다룬 문제에서 상위권 학생들에 비해 많은 중·하위권 학생들이 주어진 비례 상황을 인식하지 못하고 오류를 범하고 있는 것을 통해 알 수가 있었다. 비례 상황을 인식하는 능력은 비례 문제를 해결하기 위한 첫 단계라는 점에서 매우 중요하다. 따라서 양의 증가나 감소를 하는 상황에서 학생들이 절대적인 변화가 아닌 상대적인 변화에 집중할 수 있도록 돕는 것이 필요하다.

한편 학업성취도에 따른 학생들의 비례 추론 전략 사용의 특징을 분석한 결과 다음과 같은 차이가 있었다.

첫째, 학생들이 문제를 해결할 때 적절한 비례 추론 전략을 선택함에 있어서 학업성취도에 따라 선호하는 전략의 차이는 없었다. 그러나 학업성취도가 높을수록 문제를 해결할 때 학생들이 선호하는 전략은 다양하게 나타났다. 상위권 학생일수록 다양한 전략을 사용하는 능력이 뛰어나기 때문에 상위권의 전략 선호도가 한 가지 전략에 치우쳐 있지 않고 다양한 전략에 고루 분포되어 있었다.

둘째, 학업성취도에 따라 학생들이 선호하는 비례 추론 전략에는 별 차이가 없으나 문제의 유형과 문제에 제시된 숫자들의 비에 따라 학생들이 사용하는 전략에는 차이가 있었다. 가격이나 속력과 관련된 문제의 유형에서는 물건의 1개의 가격을 구하거나 단위 시간 당 갈 수 있는 거리를 구하여 문제를 해결하는 단위 인수 접근을 사용하는 경향이 있었으며, 문제의 숫자가 정수비로 제시된 경우에는 곱셈적 접근으로 문제를 해결하였다. 같은 양 사이의 내적비가 정수비일 때 학생들은 같은 양끼리의 곱셈적 관계를 비교하는 곱셈적 접근을 손쉽게 사용하는 경향이 있는 것으로 나타났다.

마지막으로 난이도가 높은 문제일수록 중·상위권 학생들은 비례 추론 과정을 생략하고 비례식 알고리즘에 숫자를 대입하여 형식적으로 문제를 해결하는 것으로 나타났다. 비와 비례관계를 알고리즘을 사용하여 해결하게 되면 어떤 양의 내적인 관계나 양 사이의 관계라는 현상을 정리하는 수단으로서의 비례 추론의 본질을 잃게 된다. 권미숙·김남균(2009)의 연구에서도 문제가 다소 복잡해 보이고, $A:B=A':\square$ 의 관계로 쉽게 비례식을 세울 수 없을 때 학생들은 당황하고 문제를 어려워한다고 하였다. 따라서 형식적으로 문제를 해결하기 전에 문제 상황의 비례 관계를 먼저 이해하고 비례 추론 과정을 거치도록 지도하여야 한다.

이와 같은 연구결과를 통해 효과적인 비례 추론 지도를 위해 몇 가지 제언을 한다.

첫째, 학습자 스스로 문제에 제시된 비례 상황에 적절한 비례 추론 전략을 선택하여 적용하는 경험을 할 수 있도록 하는 것이 중요하며, 이를 위해 교사는 교수·학습 과정에서 실생활에서 일어날 수 있는 다양한 비례 상황을 폭넓게 제시하고 형식적 알고리즘을 사용한 기계적인 학습보다는 다양한 비례 추론 전략을 사용하여 비례 문제를 접할 수 있도록 지도하는 것이 중요하다고 생각된다.

둘째, 학업성취도에 따라 학생들의 비례 추론 능력에 차이가 있으므로 학습 수준에 따라 다른 문제 상황과 추론 전략을 제시하여 문제를 해결하게 하고, 교사는 학생이 비례 문제를 해결하는 과정에서 사용하기 어려워하는 비례 추론 전략에 대해서 학습하도록 돕는 것도 필요하다.

셋째, 비례식 알고리즘은 비례 문제를 해결하는데 있어서 학생들이 가장 손쉽게 사용할 수 있는 강력한 도구이다. 이러한 사실은 어려운 비례 문제를 접하였을 때 문제에서 요구하는 곱셈적 추론을 하지 못하고 학생들 대부분이 비례식을 사용한 것을 보면 알 수 있다. 그러나 비례 문제에 나타난 비례 관계에 대한 이해가 부족한 상태에서 알고리즘을 사용하여 비례식을 세워 문제를 해결하는 것은 올바른 비례 추론 과정이 아니다. 또한 비와 비율에 대한 이해가 결여된 상태에서 비례식의 사용은 오히려 비와 비율의 깊이 있는 이해를 방해하고 비례적 추론 능력을 발달시키는데 장애가 된다(정은실, 2003). 따라서 비례식 알고리즘이 학생들에게 의미있고 유용한 도구가 될 수 있도록 하기 위해서는 학생들이 비와 비율의 개념을 충분히 내면화하고(고은성·이경화, 2007), 비례 문제를 통해 곱셈적 추론 과정을 충분히 경험하도록 한 후 비례식을 소개하도록 하는 것이 바람직하다고 생

각된다.

본 연구에서는 초등학교 6학년만을 대상으로 하였으나 후속 연구에서는 다른 학년 학생들의 비례 추론 능력이나 비례 추론 과정에서 학생들에게 흔히 나타나는 오류에 대한 연구를 한다면 좀 더 올바른 추론 지도를 위한 자료를 제공할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2007). 수학과 교육과정. 교육인적자원부.

고은성・이경화 (2007). 초등학교 6학년 학생의 비례 추론 능력 분석 : 2명의 사례 연구. 대한수학교육학회지 수학교육연구 17(4), 359-380.

권미숙・김남균 (2009). 초등학교 6학년 학생들의 교과서 비례 문제 해결과 비례 추론에 관한 연구. 한국초등수학교육학회지 13(2), 211-229.

김민경・권혁진 (2010). 수학 문제 해결에서 학업성취도에 따른 표상 활용 능력과 특징 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 24(2), 475-502.

김숙진 (2011). 초등학교 학생들의 비례 추론 능력에 시각적 표현이 미치는 영향 : 5, 6학년을 대상으로. 경인교육대학교 석사학위논문.

박경은 (2004). 수학적 표상 활동 : 문헌 연구를 중심으로. 고려대학교 석사학위논문.

박정숙 (2008). 학생들의 문제해결전략 유형과 비례상황 인지와의 관계. 한국학교수학회논문집 11(4), 609-627.

박정숙 (2009). 학생의 비례추론의 분석 모형과 특성 분석. 서울대학교 박사학위논문.

이종욱 (2006). 4학년 아동의 비와 비례 개념 분석. 대한수학교육학회지 수학교육연구 16(2), 157-177.

정은실 (2003). 비 개념에 대한 역사적, 수학적, 심리적 분석. 대한수학교육학회지 <학교수학> 5(4), 421-440.

Bruner, J. S. (1967). *Toward a theory of instruction, London* : Oxford University Press.

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: research implications. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp.159-178), New York: Macmillan.

Heller et al. (1989). Proportional reasoning : The effect of two context variables, rate type, and problem setting. *Journal of Research in Science Teaching*, 26(3), 205-220.

Jane-Jane Lo & Watanabe, T. (1997). Developing Ratio and Proportion Schemes: A Story of a Fifth Grader. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(2), 216-236.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. (1983). Early adolescents' proportional reasoning in 'rate' problems. *Educational Studies in Mathematics*, 14(3), 219-233.

Kaput, J. J., & West, M. M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp.235 - 287), Albany: State University of New York Press.

Lamon, S. (1989). *Ratio and proportion: Preinstructional cognitions*. PhD Thesis, University of Wisconsin, Madison.

Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: connecting content and children''s thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(1), 41-61.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester Jr. (Ed), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.629-667), Reston, VA: NCTM.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In M. Behr, & J. Hiebert (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.93 - 118), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Misailidou, C., & Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 335-368.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Singh, P. (2000). Understanding the Concepts of Proportion and Ratio Constructed by Two Grade Six Students. *Educational Studies in Mathematics*, 43(3), 271-292.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16(2), 181-204.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23(1), 57-86.

Van Dooren, W., Bock, D. D., Evers, M., & Verschaffel, L. (2009). Students' overuse of proportionality on missing-value problems: How numbers may change solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(2), 187-211.

The Analysis of 6th-Grade Elementary School Student's Proportional Reasoning Ability and Strategy According to Academic Achievement

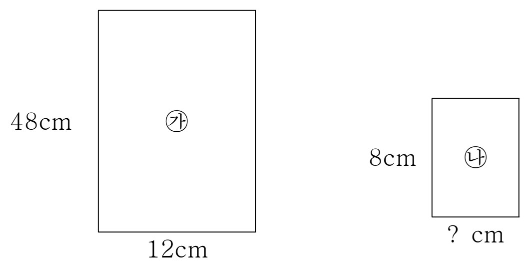
Eom, Sun young
Dept. of Curriculum and Instruction, Graduate School of Korea University, Anam-dong,
Seongbuk-ku, Seoul, Korea, 136-701
E-mail : symw85@hanmail.net

Kwean, Hyuk jin
Dept. of Math. Education, Korea University, Anam-dong,
Seongbuk-ku, Seoul, Korea, 136-701
E-mail : kwean@korea.ac.kr

This paper focuses on proportional reasoning being emphasized in today's elementary math, and analyzes the way students use their proportional reasoning abilities and strategies according to their academic achievement levels in solving proportional problems. For this purpose, various types of proportional problems were presented to 173 sixth-grade elementary school students and they were asked to use a maximum of three types of proportional reasoning strategies to solve those problems. The experiment results showed that upper-ranking students had better ability to use, express and perceive more types of proportional reasoning than their lower-ranking counterparts. In addition, the proportional reasoning strategies preferred by students were shown to be independent of academic achievement. But there was a difference in the proportional reasoning strategy according to the types of the problems and the ratio of the numbers given in the problem. As a result of this study, we emphasize that there is necessity of the suitable proportional reasoning instruction which reflected on the difference of ability according to student's academic achievement.

* ZDM Classification : C34
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : proportional problem, proportional reasoning, proportional reasoning strategies

<부록> 연구에 사용된 검사지의 문제 유형 및 내용

문항	문제유형	문 제
1	물건가격	장난감 가게에서는 장난감 자동차 40개를 16000원에 팔고 있습니다. 장난감 자동차 16개의 가격은 얼마인가요?
2	속력	치타는 10분 동안 30km를 달릴 수 있다고 합니다. 치타가 150km를 달리는데 걸리는 시간은 얼마일까요?
3	혼합물	오렌지 주스 ㉮는 오렌지 4개에 물 16mL의 비율로 만들었습니다. 오렌지 주스 ㉯는 오렌지 주스 ㉮와 같은 맛입니다. 오렌지 주스 ㉯에 오렌지가 8개가 들어갔다면, 물은 몇 mL가 들어가야 합니까?
4	혼합물	민수가 노란색 페인트 3통과 빨간색 페인트 6통을 섞어서 방을 칠했습니다. 소희가 민수가 칠한 색과 똑같은 색으로 칠하려고 할 때, 노란색 페인트를 7통 사용하였다면 빨간색 페인트는 몇 통을 사용해야 합니까?
5	물건가격	달걀 12개의 가격은 3600원입니다. 달걀 24개의 가격은 얼마일까요?
6	확대/축소	그림 ㉮는 가로의 길이가 12cm, 세로의 길이가 48cm인 직사각형입니다. 그림 ㉯는 그림 ㉮를 같은 비로 축소시킨 것입니다. 그림 ㉯의 직사각형의 세로의 길이가 8cm이라면, 가로의 길이는 몇 cm입니까? 
7	속력	어떤 운전자가 트럭을 타고 3시간 동안 180km를 간다고 합니다. 같은 속도로 10시간 동안 몇 km를 갈 수 있을까요?
8	확대/축소	현성이가 사진기로 정원에 있는 나무 두 그루를 찍었습니다. 사진에 있는 ㉮나무의 높이는 3cm이고, ㉯나무의 높이는 9cm입니다. 이 사진을 확대하여 다시 재보았더니 ㉮나무의 높이가 8cm였습니다. 확대한 사진의 ㉯나무의 높이는 몇 cm입니까?