

# 복소 전단탄성계수를 갖는 다층 감쇠보의 유한요소 진동 해석

## Finite Element Vibration Analysis of Multi-layered Damped Sandwich Beam with Complex Shear Modulus

배 승 훈\*. 윌 성 규\*. 정 의 봉†. 조 진 래\*\*. 배 수 룡\*\*\*

Seunghoon Bae, Sunggyu Won, Weuibong Jeong, Jinrae Cho and Sooryong Bae

(2010년 8월 26일 접수 ; 2010년 12월 6일 심사완료)

**Key Words** : Multi-layered Damped Beam(다층 감쇠보), Complex Shear Modulus(복소 전단탄성계수), Forced Vibration(강제진동), Finite Element Analysis(유한요소 해석)

### ABSTRACT

In this paper, the general equation of motion of damped sandwich beam with multi-viscoelastic material layer was derived based on the equation presented by Mead and Markus<sup>(2)</sup>. The viscoelastic layer, which has characteristics of complex shear modulus, was assumed to be dominantly under shear deformation. The equation of motion of n-layered damped sandwich beam in bending could be represented by (n+3)th order ordinary differential equation. Finite element model for the n-layered damped sandwich beam was formulated and programmed using higher order shape functions. Several numerical examples were implemented to show the effects of damped material.

### 1. 서 론

구조물 또는 기계 장치의 진동 및 소음 문제는 다양한 분야에 걸쳐서 연구되고 있는 대상이며 이를 줄이는 방안으로 여러 가지 방법들이 제시되어 왔다. 특히 감쇠재를 포함하는 복합적층 구조물은 구조의 진동을 효과적으로 저감하는 성질을 지니고 있다. 복합적층 구조물 중 가장 간단한 예는 두 개의 탄성재질 사이에 점탄성 재질(VEM: viscoelastic material)이 끼어 있는 다층 감쇠보 구조물이다. 다층 감쇠보 구조물은 굽힘진동 시 점탄성 재질에서 주로 굽힘

변형이 아닌 전단변형이 일어나는데, 이러한 전단 변형에 의해 점탄성 재질은 운동에너지를 흡수하여 발산시킴으로써 진동을 줄여주는 역할을 한다. 다층 감쇠보 점탄성재의 감쇠특성은 복소수의 허수부로 표현되는 복소전단탄성계수(complex shear modulus)가 널리 이용된다. 이러한 특성을 지니는 다층 감쇠보의 경우 범용 유한요소 툴로 해석하기 위해서는 솔리드 요소를 사용하여야 한다. 그러나 솔리드 요소는 많은 요소를 필요로 하므로 보형상의 구조물을 해석 시 비효율적이다. 또한 범용 유한요소 툴은 굽힘 변형을 고려하는 요소만을 갖고 있고 감쇠재의 전단 변형을 고려하지는 못하는 실정이다. 따라서 감쇠재 물성치로 복소전단 탄성계수를 갖는 다층 감쇠보를 등가 치환할 수 있는 기술이 절실히 필요하다.

전단 감쇠에 대한 이론적 고찰은 많은 사람들에게 의해 연구되어 왔다. DiTaranto<sup>(1)</sup>는 유한 길이를 갖는 3층 적층보가 자유진동하는 경우 흡진재의 감쇠

† 교신저자; 정희원, 부산대학교 기계공학부  
E-mail : wbjeong@pusan.ac.kr  
Tel : (051)510-2337, Fax : (051)517-3805  
\* 부산대학교 대학원 기계공학부  
\*\* 부산대학교 기계공학부 / ㈜마이다스아이티  
\*\*\* 정희원, 국방과학연구소

효과를 위한 보조방정식을 유도했으며, Mead와 Markus<sup>(2)</sup>는 강제 진동을 받는 3층 적층보에 대하여 6차 운동방정식을 유도하였다. Yan과 Dowell<sup>(3)</sup>은 3층 적층보에서 각 층의 길이방향 변위 및 회전관성을 고려한 해석방법을 제시하였다. Rao<sup>(4)</sup>는 여러 가지 경계조건을 가지고 있는 샌드위치형 감쇠보 구조물의 손실계수에 따른 횡변위를 조사하였다. Park<sup>(5)</sup>은 적층보의 진동감쇠특성을 실험적 방법으로 검토하고 분석하였으며 Seo<sup>(6)</sup>는 감쇠재의 두께와 손실계수가 감쇠보 특성에 미치는 영향을 조사하였으며 Won<sup>(7)</sup>은 감쇠보에 대한 강제진동 해석을 수행 하였다. Nam<sup>(8)</sup>은 RUK 방정식을 이용하여 모드 감쇠를 최대화 시키는 샌드위치 구조물의 점탄성 두께 결정법을 제시하였다.

이 연구는 Mead와 Markus<sup>(2)</sup>의 3층 감쇠보에 대한 운동방정식을 다층의 임의 복합단면으로 구성된 감쇠보 구조물로 확장하고자 한다. 그리고 다층 감쇠보에 대한 운동방정식에 변분 정식화를 적용하여 유한요소 근사 모델을 구성하고자 한다. 또한 개발한 프로그램을 이용하여 점탄성재가 다층 감쇠보 구조물의 강제진동 특성에 미치는 영향을 분석하고자 한다.

## 2. 다층 감쇠보의 운동방정식

점탄성재료로 구성되어 있는 감쇠층의 감쇠효과는 손실계수를 전단탄성계수에 복소수 형태로 포함시킬 수 있다. 복소 전단탄성계수  $G^*$ 는  $G(1+j\eta)$ 로 정의된다. 여기서  $G$ 는 통상의 전단탄성계수이고  $\eta$ 는 손실계수를 나타낸다. 다층 감쇠보의 운동방정식을 유도하기 위하여 다음과 같은 가정을 하였다.

- (1) 점탄성 재료로 구성되어 있는 감쇠재는 전단 응력만 받으며 굽힘응력은 무시할 수 있다.
  - (2) 점탄성 재료를 둘러싸는 탄성재는 굽힘응력만 받으며 전단변형은 무시할 수 있다.
  - (3) 횡방향 운동에 대한 관성력이 지배적이며 회전관성영향을 무시할 수 있는 오일러 보(Euler beam)의 특성을 갖는다.
- 감쇠재와 탄성재 사이에는 미끄럼이 발생하지 않는다.

### 2.1 3층 감쇠보

3층 감쇠보가 Fig. 1과 같이 변형할 때 감쇠층의 전단변형률  $\gamma$ 는 식 (1)과 같다.

$$\gamma = \frac{d_2}{h_2} \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \frac{u_1(x,t) - u_3(x,t)}{h_2} \quad (1)$$

여기서  $w(x,t)$ 는 중립축에서의 횡변위이고,  $u_1(x,t)$ 와  $u_3(x,t)$ 는 감쇠재를 둘러싸고 있는 탄성재의  $x$ 방향 변위이다.  $h_1, h_2$ 는 탄성재의 두께이고  $h_2$ 는 감쇠재의 두께이며  $d_2$ 는 두 탄성재 중립축의 거리이다. 감쇠보의 축방향( $x$ 방향) 힘의 평형조건은 식 (2)와 같다.

$$E_1 A_1 u_1(x,t) + E_3 A_3 u_3(x,t) = 0 \quad (2)$$

여기서  $E_1, E_3$  및  $A_1, A_3$ 는 탄성재의 영률 및 단면적이다.

3층 감쇠보의 운동에너지  $T$ 는 굽힘에 의한 횡변위의 속도의 2차 형식으로 식 (3)과 같이 표현된다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (3)$$

보의 탄성에너지는 굽힘, 인장 그리고 감쇠층의 전단변형 항들의 2차형식으로 식 (4)~(6)같이 구성된다.

$$(V_1 + V_3)_{bending} = \frac{1}{2} \int_0^L D_t \left( \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (4)$$

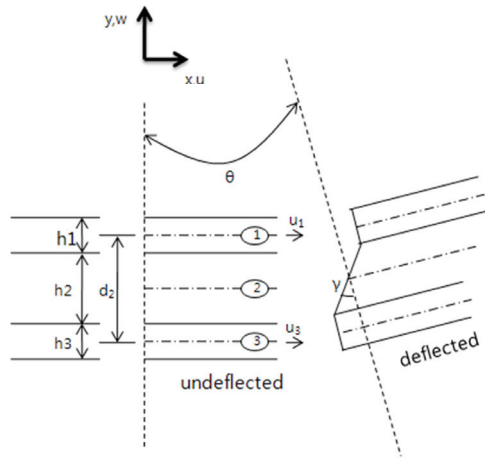


Fig. 1 Geometry of deformed 3-layered beam

$$(V_1 + V_3)_{extension} = \int_0^L E_1 A_1 \left( \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} \right)^2 + E_3 A_3 \left( \frac{\partial u_3(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx \quad (5)$$

$$(V_2)_{shearing} = \frac{1}{2} \int_0^L G_2^* A_2 \gamma^2(x,t) dx \quad (6)$$

단,  $D_t = \sum E_i I_i$ ,  $m = \sum \rho_i A_i$

식 (1)~(2)의 관계를 이용하여 보의 탄성에너지 중 인장에 관한 식 (5)를  $\gamma(x,t)$ 와  $w(x,t)$  관련 항으로 정리하면 식 (9)와 같다.

$$V_{extension} = \frac{1}{2} \frac{E_1 E_3 A_1 A_3}{E_1 A_1 + E_3 A_3} \int_0^L \left( h_2 \frac{\partial \gamma(x,t)}{\partial x} - d_2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (9)$$

식 (4), 식 (9)와 식 (6)의 탄성에너지를 모두 합하여 식 (10)와 같이 감쇠보의 전체 탄성에너지  $V$ 를 정의한다.

$$V = V_{bending} + V_{extension} + V_{shearing} \quad (10)$$

식 (3)의 운동에너지  $T$ 와 식 (10)의 탄성에너지  $V$ 를 다음 식으로 표현되는 해밀턴 정리

$$\delta \int_0^L (T - V + q) dx = 0 \quad (11)$$

에 대입하면 감쇠보의 지배방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + D_t (1 + Y) \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - D_t Y \frac{h_2}{d_2} \frac{\partial^3 \gamma(x,t)}{\partial x^3} = q(x,t) \quad (12)$$

$$g^* \gamma - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{d_2}{h_2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (13)$$

단,  $Y = \frac{d_2^2}{D_t} \frac{E_1 A_1 E_3 A_3}{E_1 A_1 + E_3 A_3}$ ,  $g^* = \frac{G_2^* A_2}{D_t Y} \left( \frac{d_2}{h_2} \right)^2$

식 (12)는 감쇠보의 횡방향 거동을 나타내는 지배방정식이며, 식 (13)은 보의 횡 변위  $w$ 와 전단변형

률  $\gamma$ 와의 관계를 나타내는 식이다. 또한 식 (12)와 (13)을 연립하여  $\gamma$ 를 소거하면  $w$  관련 6차 미분 방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial^6 w(x,t)}{\partial x^6} - g^* (1 + Y) \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \frac{1}{D_t} \left( m \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial t^2 \partial x^2} - g^* m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \right) = \frac{1}{D_t} \left( \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2} - g^* q(x,t) \right) \quad (16)$$

식 (16)은 Mead와 Markus<sup>(2)</sup>가 자유물체도에서 힘의 평형으로부터 직접 유도한 지배방정식과 동일하다. 한편 식 (16)을 다음과 같이 고쳐서 쓸 수 있다.

$$C_6 \frac{\partial^6 w(x,t)}{\partial x^6} + C_4 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + K_2 m \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + K_0 m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = K_2 \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2} + K_0 q(x,t) \quad (17)$$

단,  $C_6 = -D_t E_1 h_1 E_3 h_3 h_2$   
 $C_4 = (bd_2^2 E_1 h_1 E_3 h_3 + D_t (E_1 h_1 + E_3 h_3)) G_2^*$   
 $K_2 = -E_1 h_1 E_3 h_3 h_2$   
 $K_0 = (E_1 h_1 + E_3 h_3) G_2^*$

여기서  $E_i$ 는 탄성재의 탄성계수,  $m$ 은 감쇠보의 단위길이당 질량 그리고  $q(x,t)$ 는 분포하중이다.

### 2.2 5층 감쇠보

3층 감쇠보의 운동방정식 유도과정과 동일한 방법으로 5층 감쇠보에 적용한다. Fig. 2에 5층 감쇠보의 모델을 나타내었다. 여기서  $h_1, h_2, h_3$ 는 탄성재의 두께를 나타내고  $h_2, h_4$ 는 감쇠재의 두께를 나타낸다.  $b$ 는 감쇠보의 폭이고  $d_2, d_4$ 는 각 감쇠재 아래위에 위치한 탄성재의 중심거리를 나타낸다.

Fig. 3에서 전단변형률과 변위의 관계식

$$\gamma_2 = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \gamma_4 = \frac{\partial u_4}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (18)$$

을 고려하면 전단응력  $\tau$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\tau_2 = G_2^* \gamma_2 = G_2^* \left( \frac{d_2}{h_2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{u_1 - u_3}{h_2} \right)$$

$$\tau_4 = G_4^* \gamma_4 = G_4^* \left( \frac{d_4}{h_4} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{u_3 - u_5}{h_4} \right) \quad (19)$$

여기서  $u_i$ 는 각 탄성체의 길이방향 변위이고,  $w$ 는 감쇠 보의 횡방향 변위이며  $G_i^*$ 는 감쇠체의 복소 전단탄성계수이다.

그리고 Fig. 4로부터 5층 감쇠보 전체의 전단력은 식 (20)과 같이 정할 수 있다.

$$S = D_t \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \tau_2 b d_2 - \tau_4 b d_4 \quad (20)$$

여기서  $D_t$ 는 각 탄성층의 굽힘강성의 합이다. Fig. 5에서 감쇠보 전체의 전단력과 분포하중 사이의 관계식 및 각 탄성체에서의 힘평형식을 구하면 다음과 같다.

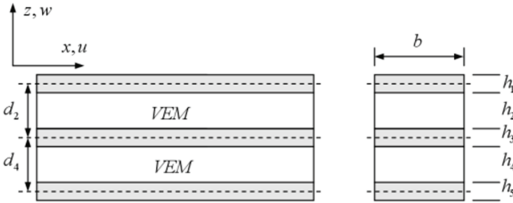


Fig. 2 5-layered damped beam

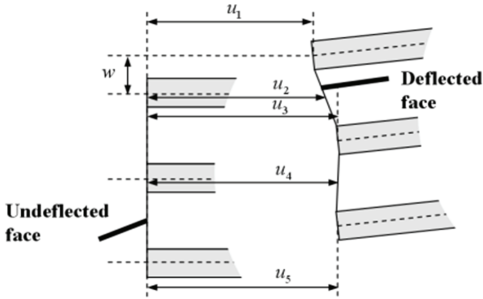


Fig. 3 Displacement in a 5-layered section

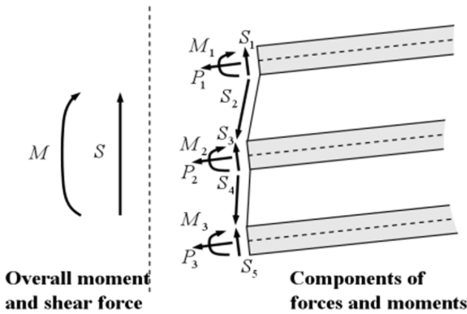


Fig. 4 Forces and moments acting on a section

$$p = \frac{\partial S}{\partial x} \quad \frac{\delta P_1}{\delta x} = \tau_2 \quad (21)$$

$$\frac{\delta P_3}{\delta x} = -\tau_2 + \tau_4 \quad \frac{\delta P_5}{\delta x} = -\tau_4$$

여기서  $p$ 는 관성력을 포함한 분포하중이고  $p_i$ 는 탄성체에 작용하는 단위폭당 힘이다.

식 (18)~(21)부터 다음과 같은 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$C_8 \frac{\partial^8 w}{\partial x^8} + C_6 w \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + C_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + K_4 m \frac{\partial^4 \ddot{w}}{\partial x^4} + K_2 m \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} + K_0 m \ddot{w} = K_4 \frac{\partial^4 q}{\partial x^4} + K_2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + k_0 q \quad (22)$$

단,  $C_8 = (h_2 h_4) (E_1 h_1 E_3 h_3 E_5 h_5) (D_t)$   
 $C_6 = -(G_4^* h_2) (E_1 h_1) (E_3 h_3 + E_5 h_5) (D_t) - (G_4^* h_2) (E_1 h_1) (b d_2^2 E_3 h_3 E_5 h_5) - (G_5^* h_4) (E_5 h_5) (E_1 h_1 + E_3 h_3) (D_t) - (G_5^* h_4) (b d_2^2) (E_5 h_5) (E_1 h_1 E_3 h_3)$   
 $C_4 = (G_2^* G_4^*) (E_1 h_1 + E_3 h_3 + E_5 h_5) (D_t) + (G_5^* G_4^*) (b d_2^2 E_1 h_1 E_3 h_3) + (G_2^* G_4^*) (b d_4^2 E_3 h_3 E_5 h_5) + (G_2^* G_4^*) b ((d_2 + d_4)^2 E_1 h_1 E_5 h_5)$   
 $K_4 = (h_2 h_4) (E_1 h_1 E_3 h_3 E_5 h_5)$   
 $K_2 = -(G_4^* h_2) (E_1 h_1) (E_3 h_3 + E_5 h_5) - (G_4^* h_2) (E_5 h_5) (E_1 h_1 + E_3 h_3)$   
 $K_0 = (G_2^* G_4^*) (E_1 h_1 + E_3 h_3 + E_5 h_5)$

식 (22)의 5층 감쇠보의 운동방정식에서  $h_2$ 와  $h_4$ 가 영인 경우 식 (17)의 3층 감쇠보의 운동방정식과 되는 것을 확인할 수 있다. 따라서 식 (22)는 식 (17)을 포함하는 식이라고 할 수 있다.

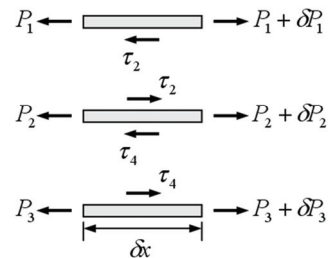


Fig. 5 Longitudinal forces acting on a section2

### 2.3 다층 감쇠보의 운동방정식

입의의 수의 감쇠층을 포함하는 일반적인 다층 감쇠보에 대한 지배방정식을 전단력과 분포하중의 미분관계식과 각 탄성층에서의 힘의 평형관계식으로부터 연립미분방정식의 형태로 구성할 수 있다. 이 논문에서는 앞 절에서 언급한 3층 및 5층 감쇠보의 운동방정식을 7층, 9층 등의 감쇠보에 적용하여 일반식을 유도하였다.  $n$  개의 감쇠층이 있는 경우의 횡변위에 대한 일반화된 운동방정식은 다음과 같다.

$$C_{2(n+2)} \frac{\partial^{2(n+2)} w}{\partial x^{2(n+2)}} + \dots + C_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + K_{2n} m \frac{\partial^{2n} \ddot{w}}{\partial c^{2n}} + \dots + K_0 m \ddot{w} = K_{2n} \frac{\partial^{2n} q}{\partial x^{2n}} + \dots + K_0 q \quad (23)$$

식 (8)에서  $n$  개의 감쇠층을 갖는 경우, 즉  $2n+1$  개의 다층 감쇠보인 경우에 횡방향운동의 지배방정식은 최고차항이  $2n+4$  차인  $w$  만의 미분방정식으로 표현되는 것을 알 수 있다.

## 3. 유한요소 근사화

### 3.1 3층 감쇠보

유도된 지배방정식은 6차의 미분항이 포함되므로 일반적으로 탄성보에서 가정하는 노드당 2자유도가 아닌 노드당 3자유도의 유한요소를 Fig. 6과 같이 가정할 필요가 있다. 요소의 길이  $L=2a$ 이며 무차원 좌표  $\xi = x/a$ 를 이용하였다.

요소의 횡변위  $w$  를 다음과 같이 5차의 다항식으로 가정하였다.

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2 + \alpha_4 \xi^3 + \alpha_5 \xi^4 + \alpha_6 \xi^5 \quad (24)$$

$$= [P_1(\xi)] \alpha$$

식 (24)의 1차 미분과 2차 미분을 식 (25) 및 식 (26)과 같다.

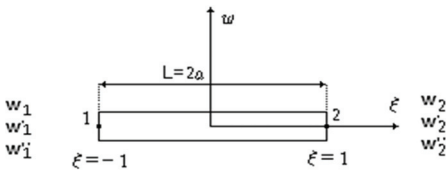


Fig. 6 Finite beam element

$$a \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{d\xi} = \alpha_2 + 2\alpha_3 \xi + 3\alpha_4 \xi^2 + 4\alpha_5 \xi^3 + 5\alpha_6 \xi^4 \quad (25)$$

$$a^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 2\alpha_3 + 6\alpha_4 \xi + 12\alpha_5 \xi^2 + 20\alpha_6 \xi^3 \quad (26)$$

$$\text{단, } [p(\xi)] = [1 \ \xi \ \xi^2 \ \xi^3 \ \xi^4 \ \xi^5]$$

$$\{a\} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6]^T$$

$$\{w\}_e = \left\{ w_1, \frac{\partial w_1}{\partial x}, \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}, w_2, \frac{\partial w_2}{\partial x}, \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right\}^T$$

또한 Fig. 6과 같은 요소의 왼쪽노드( $\xi = -1$ )와 오른쪽 노드( $\xi = +1$ )에  $w, w', w''$ 의 경계조건을 고려하면 식 (24)의  $a_1 \sim a_6$ 를 구할 수 있으며 다음과 같이 표현된다<sup>(9)</sup>.

$$[L]w_e = [A]_e \{a\} \quad (27)$$

$$\{a\} = [A]_e^{-1} [L] \{w\}_e \quad (28)$$

$$w = [P(\xi)][A]_e^{-1} [L] \{w\}_e = [N] \{w\}_e \quad (29)$$

$$\text{단, } [A]_e = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 12 & -24 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 24 \end{bmatrix}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

여기서, 형상함수는 다음과 같이 정의 된다.

$$[N] = [N_1(\xi) N_2(\xi) N_3(\xi) N_4(\xi) N_5(\xi) N_6(\xi)] \quad (30)$$

$$\text{단, } N_1(\xi) = \frac{1}{8}(4 - 7\xi + 4\xi^3 - \xi^5)$$

$$N_2(\xi) = -\frac{1}{16}(-1 + \xi)^2(-5 - 4\xi + 3\xi^2 + 2\xi^3)$$

$$N_3(\xi) = -\frac{1}{48}(-3 + 2\xi)(-1 + \xi^2)^2$$

$$N_4(\xi) = \frac{1}{8}(4 + 7\xi - 4\xi^3 + \xi^5)$$

$$N_5(\xi) = -\frac{1}{16}(1+\xi)^2(5-4\xi-3\xi^2+2\xi^3)$$

$$N_6(\xi) = \frac{1}{48}(3+2\xi)(-1+\xi^2)^2$$

갤러킨법을 적용하기 위하여 식 (17)의 양변에 가중함수  $w^*$ 를 곱하고 요소길이에 대해서 적분하면 식 (31)과 같다.

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a w^* \left[ C_6 \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + C_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + K_2 m \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} + K_0 m \ddot{w} \right] dx \\ & = \int_{-a}^a w^* \left[ K_2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + K_0 q \right] dx \end{aligned} \quad (31)$$

식 (29)를 식 (31)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 이산화된 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$[M_1]_e \{\ddot{w}\}_e + [K_1]_e \{w\}_e = \{f_1\}_e \quad (32)$$

단,  $[M_1]_e = K_2 m \int_{-a}^a \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]^T \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] dx$

$$+ K_0 m \int_0^L [N]^T [N] dx$$

$$[K_1]_e = C_6 \int_{-a}^a \left[ \frac{\partial^3 N}{\partial x^3} \right]^T \left[ \frac{\partial^3 N}{\partial x^3} \right] dx$$

$$+ C_4 \int_0^L \left[ \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \right]^T \left[ \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \right] dx$$

$$\{f_1\}_e = K_2 q \int_{-a}^a \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]^T dx + K_0 q \int_0^L [N]^T dx$$

식 (32)를 각 요소에 대해서 중첩하고 경계조건을 부여하면 전체 구조물에 대한 유한요소 지배방정식을 구할 수 있다.

### 3.2 다층 감쇠보

앞에서 샌드위치형 감쇠보의 횡 방향운동의 지배방정식은 고차의 짝수 차만의 미분방정식으로 표현되는 것을 확인하였다. 이 논문에서는 앞에서 유도한 고차의 미분방정식의 강제진동응답을 예측하기 위해서 유한요소법을 이용하였다.

갤러킨법을 적용하기 위하여 식 (23)의 양변에 가중함수  $w^*$ 를 곱하고 요소길이에 대해서 적분하면

식 (33)과 같다.

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a w^* \left[ C_{2(n+2)} \frac{\partial^{2(n+2)} w}{\partial x^{2(n+2)}} + \dots + C_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right. \\ & \quad \left. + K_{2n} m \frac{\partial^{2n} \ddot{w}}{\partial x^{2n}} + \dots + K_0 m \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \right] dx \quad (33) \\ & = \int_{-a}^a w^* \left[ K_{2n} \frac{\partial^{2n} q}{\partial x^{2n}} + \dots + K_0 q \right] dx \end{aligned}$$

유도된 지배방정식은  $2n+4$ 차의 미분항이 포함되므로 노드당  $n+2$  자유도의 유한요소를 가정하였다. 이 경우 형상함수는 다음과 같이  $2n+3$ 차의 다항식으로 가정하였다.

$$w = a_1 + a_2 \xi + \dots + a_{2n+4} \xi^{2n+3} \quad (34)$$

3층 감쇠보의 유도과정과 동일한 방법으로 요소의 왼쪽 노드 ( $\xi = -1$ )과 오른쪽 노드 ( $\xi = +1$ )에서  $w, w', \dots, w^{(n+1)}$ 의 경계조건으로부터 식 (34)의  $a_1, a_2, \dots, a_{2n+4}$ 를 구할 수 있으며 다음과 같이 형상함수를 이용하여 나타낼 수 있다.

$$w = [N] \{w\}_e \quad (35)$$

단,  $\{w\}_e =$

$$\left\{ w_1, \frac{\partial w_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n+1} w_1}{\partial x^{n+1}}, w_2, \frac{\partial w_2}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n+1} w_2}{\partial x^{n+1}} \right\}^T$$

식 (35)를 식 (33)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 이산화된 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$[M]_e \{\ddot{w}\}_e + [K]_e \{w\}_e = \{f\}_e \quad (36)$$

단,  $[M]_e = K_{2n} m \int_{-a}^a \left[ \frac{\partial^n N}{\partial x^n} \right]^T \left[ \frac{\partial^n N}{\partial x^n} \right] dx$

$$+ \dots + K_0 m \int_{-a}^a [N]^T [N] dx$$

$$[K]_e = C_{2(n+2)} \int_{-a}^a \left[ \frac{\partial^{n+2} N}{\partial x^{n+2}} \right]^T \left[ \frac{\partial^{n+2} N}{\partial x^{n+2}} \right] dx$$

$$+ \dots + C_4 \int_{-a}^a \left[ \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \right]^T \left[ \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \right] dx$$

$$\{f\}_e = K_{2n}q \int_{-a}^a \left[ \frac{\partial^n N}{\partial x^n} \right]^T dx + \dots + K_0q \int_{-a}^a [N]^T dx$$

식 (36)을 각 요소에 대해서 중첩하면 전체 구조물에 대한 유한요소 지배방정식을 구할 수 있다.

#### 4. 수치 실험

##### 4.1 3층 감쇠보

탄성재의 두께가 같은 3층 감쇠 보구조물(L=0.2 m)에 대해서 감쇠재 두께  $h_2$ 와 감쇠재 손실계수  $\eta$ 의 변화에 따른 진동해석을 수행하였다. 경계조건은 외팔보로 가정하였다. 탄성재의 재질은 steel, 감쇠재의 재질은 고무로 가정하였으며 입력값은 다음과 같다.

$$h_1 = h_3 = 0.002 \text{ m}, \quad E_1 = E_3 = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$\rho_1 = \rho_3 = 7850 \text{ kg/m}^3, \quad \rho_2 = 1300 \text{ kg/m}^3$$

$$b = 0.01 \text{ m}, \quad G = 0.001 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

Fig. 7은  $h_2=0.002 \text{ m}$ 로 일정할 때 감쇠재의 손실계수(loss factor)에 따른 주파수 응답함수의 변화를 나타낸다. 손실계수가 증가할 수록 공진점에서의 진폭이 줄어드는 것을 확인할 수 있다.

Fig. 8은  $\eta=0.02$ 로 일정할 때 감쇠재 두께에 따른 주파수 응답함수의 변화를 나타낸다. 감쇠재의 두께가 증가할 수록 전체 주파수역에서 진폭이 줄어들며 공진점에서도 진폭이 줄어드는 것을 확인할 수 있다.

Fig. 9는  $h_2=0.002 \text{ m}$ 로 일정할 때 손실계수에 따른 공진점에서의 감쇠비 변화를 나타낸다. 감쇠비는 반동력점(half power point)에서의 주파수 대역폭으로부터 계산하였다. 손실계수가 증가할 수록

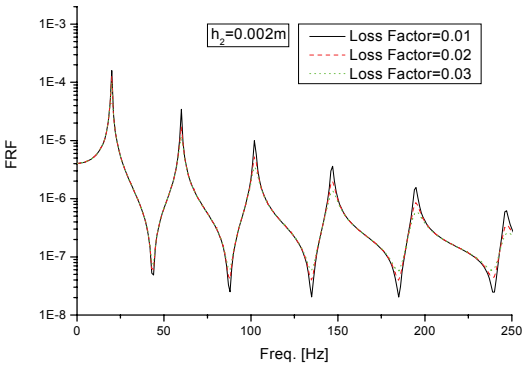


Fig. 7 Receptance according to loss factor

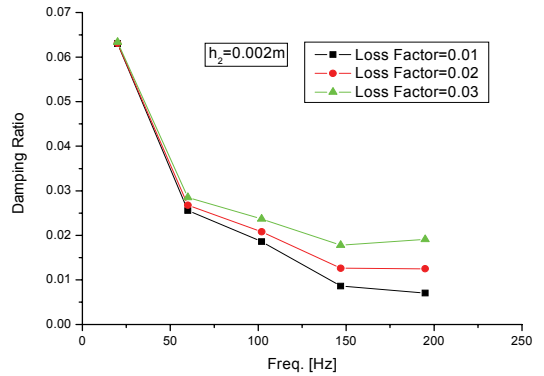


Fig. 9 Damping ratio according to loss factor

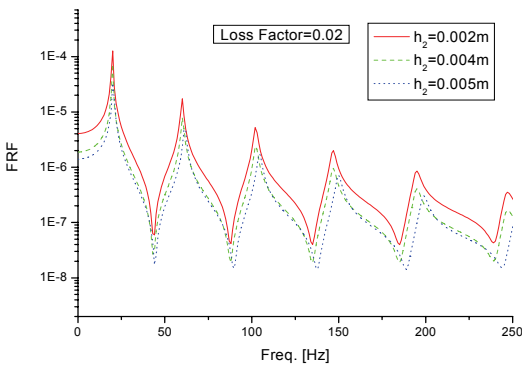


Fig. 8 Receptance according to core's thickness

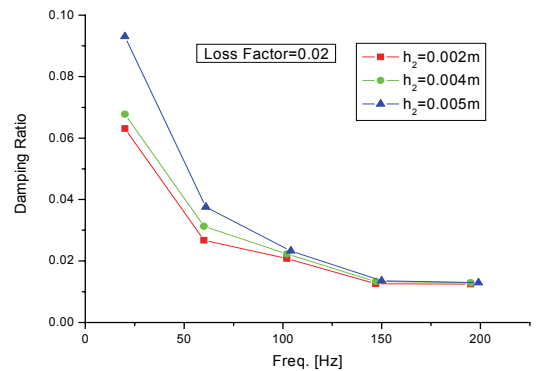


Fig. 10 Damping ratio according to core's thickness

각각의 공진점에서 감쇠비가 모두 증가하는 것을 알 수 있다.

Fig. 10은  $\eta=0.02$ 로 일정할 때 감쇠재 두께에 따른 공진점에서의 감쇠비 변화를 나타내는 것으로 감쇠재의 두께가 증가할 수록 각각의 공진점에서 감쇠비가 모두 증가하는 것을 확인할 수 있다.

### 4.2 5층 감쇠보

Table 1의 물성치를 사용하여 Fig. 11과 같이 구축된 다층 감쇠외팔보의 강제진동응답을 해석하였다. 가진점은 구속단에서 20 mm 지점이고, 응답점은 자유단에서 10 mm 지점이다. Fig. 11(a)는 감쇠재가 없는 외팔보를 나타내고, Fig. 11(b)는 탄성재 사이에 감쇠재가 끼워져 있는 3층 감쇠보를 나타내며, Fig. 11(c)는 3개의 탄성재와 2개의 감쇠재로 구성된 5층 감쇠보를 나타낸다.

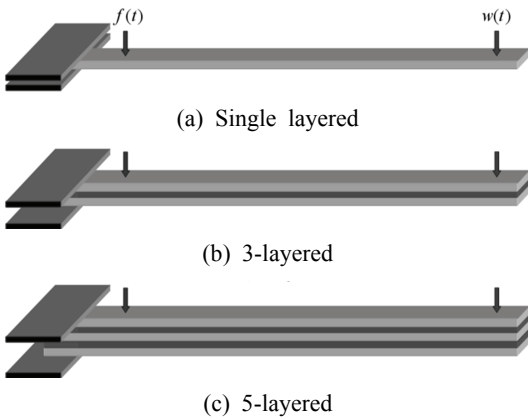


Fig. 11 Numerical models of damped beam

Table 1 Material properties

Items	Elastic layer	Damping layer
Length(mm)	250	
Width(mm)	10	
Thickness $h_1$ (mm)	3	2
Densith $\rho_i$ (kg/m <sup>3</sup> )	2,710	1,300
Young's modulus $E_i$ (N/m <sup>2</sup> )	$7.1 \times 10^{10}$	.
Poisson's ratio $\nu_i$	0.33	.
Shear modulus $G_i$ (N/m <sup>2</sup> )	.	$5.0 \times 10^6$
Loss factor $\eta_i$	.	0.2

Fig. 12는 감쇠층이 0, 1, 2개인 경우에 감쇠보의 receptance를 비교한 것으로 감쇠보의 전체 두께가 두꺼워지면서 변위응답이 작아지는 것을 확인할 수 있다.

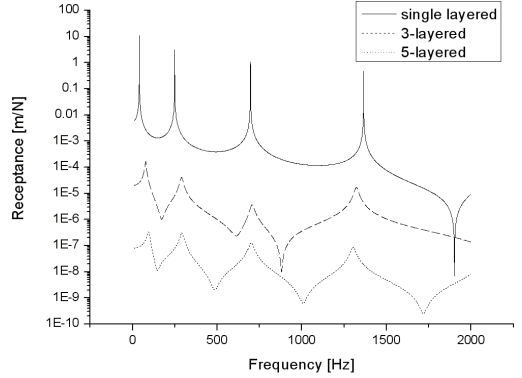


Fig. 12 Receptance of multi-layered damped beam

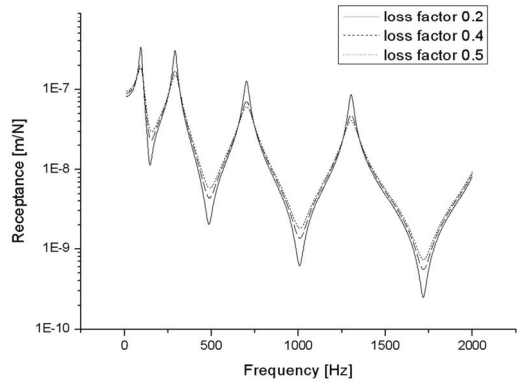


Fig. 13 Receptance according to loss factor(5-layered)

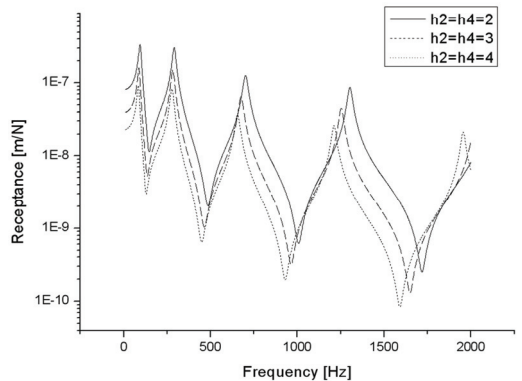


Fig. 14 Receptance according to VEM thickness (5-layered)



Fig. 13은 동일한 조건의 5층 감쇠보에 대해서 감쇠층의 손실계수만을 0.2, 0.4, 0.5로 증가시키면 서 응답을 비교한 것이다. 손실계수의 변화에 대한 고유진동수의 변화는 거의 없지만 손실계수가 0.4-0.5인 경우의 공진응답의 크기는 0.2인 경우의 50~60% 정도로 작아졌다.

Fig. 14는 동일한 조건의 5층 감쇠보에 대해서 감쇠층의 두께만을 2, 3, 4 mm로 증가시키면서 응답을 비교한 것이다. 이 경우 감쇠보의 단위길이당 질량과 횡방향 강성이 증가하였고 그 결과로 고유진동수가 감소하고 전 주파수에서의 응답레벨이 작아졌다.

## 5. 결 론

(1) 이 논문에서는 Mead와 Markus의 운동방정식을 바탕으로 다층 감쇠보에 대한 일반화된 운동방정식을 유도하였다.

(2)  $n$ 개의 감쇠재와  $(n+1)$ 개의 탄성재로 구성된 감쇠보의 경우, 횡방향의 운동방정식인 횡변위에 대하여  $2n+4$  차의 미분방정식이 표현되었다.

(3) 이 논문에서 유도된 일반화된 운동방정식은 감쇠층이 없는 경우와 3층, 5층 감쇠보 등을 포함하는 것을 확인하였다.

(4) 일반화된 운동방정식으로부터 법을 적용하여 이산화된 유한요소 근사모델을 유도하였으며 강제진동을 해석하였다.

(5) 수치예제로서 1층, 3층, 5층을 갖는 샌드위치형 감쇠보에 적용하여 감쇠재가 감쇠보의 receptance 특성에 미치는 영향을 조사하였다.

## 후 기

이 연구는 국방부/방위사업청이 지정한 UVRC(수중운동체특화연구센터)의 지원에 의하여 수행되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참 고 문 헌

(1) DiTaranto, R. A., 1965, Theory of Vibratory

Bending for Elastic and Viscoelastic Finite Length Beams, Trans. of the ASME, J. of Applied Mechanics, Vol. 32, pp. 881~886.

(2) Mead, D. J. and Markus, S., 1969, The Forced Vibration of a Three-layer Damped Sandwich Beam with Arbitrary Boundary Conditions, J. of Sound and Vibration, Vol. 10, No. 2, pp. 163~175.

(3) Yan, M. J. and Dowell, E. H., 1972, Governing Equations for Vibrating Constrained Layer Damping of Sandwich Plates and Beams, Trans. of the ASME, J. of Applied Mechanics, Vol. 39, No. 3, pp. 1041~1046.

(4) Rao, D. K., 1978, Frequency and Loss Factors of Sandwich Beams under Various Boundary Conditions, J. of Mechanical Engineering Science, Vol. 20, No. 5, pp. 271~282.

(5) Park, E. S., Bahk, S. M., Park, M. K. and Park, S. K., 1997, A Study on the Characteristics of Vibration Damping of a Beam with Inserted Viscoelastic Layer, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 7, No. 3, pp. 511~519.

(6) Seo, Y. S., Jeong, W. B. and Shin, J. Y., 2005, Vibration Analysis of Damped Sandwich Beam Using Finite Element Method, Proceedings of the KSNVE Annual Spring Conference, pp. 978~981.

(7) Won, S. G. and Jeong, W. B., 2005, Forced Vibration Analysis of Multi-layered Damped Sandwich Beam, Proceedings of the KSNVE Annual Autumn Conference, pp. 608~611.

(8) Nam, D. H., Shin, Y. H. and Kim, K. J., 2006, A Method to Determine Optimum Viscoelastic Layer Thickness of Sandwich Plate for Maximum Modal Damping, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 16, No. 7, pp. 690~696.

(9) Petyt, M., 1990, Introduction to Finite Element Vibration Analysis, Cambridge University Press, New York.