기초강좌

# 자기변형(4)
# - 자기변형 구동기의 이론적 모델링(2) -

이 호 철*
(대구가톨릭대학교 기계자동차공학부)

이번 강좌의 4번째는 자기변형 현상을 기술하는 구성방정식(constitutive equation)을 다루고자 한다. 최근의 다양한 연구 성과들은 이번 연재에서 다루는 1차 근사화된 구성방정식에서 다룰 수 없거나 다루지 않는 많은 물리적 현상을 포함한 결과를 보여주고 있으나 시작은 늘 가장 이해하기 쉽고 단순한 것에 출발하는 것이 좋다고 생각하였다. 그리고 이번 연재부터는 복잡하진 않지만 다소간의 수학식이 등장하게 된다는 점을 미리 언급해둔다.

## 1. 자기변형 물질의 구성방정식

자기변형 물질은 물론이고 피에조 물질이 포함된 시스템에 대해서 이론적인 모델을 만들 때 가장 많이 보게 되는 구성방정식은 연재 (3)(소음진동 21권 4호)에서 잠시 보여주었는데 다음과 같다. 많은 경우 $q$대신에 $d$를 사용하는데 $d$를 사용하게 되면 미분을 나타내는 기호와 혼동할 가능성이 있어 이번 연재에서는 $q$를 사용하기로 한다. 물론 $q$도 전하량을 나타내는 기호로 사용하기는 하지만 자기변형 물질을 다룰 때는 거의 나타날 일이 없으므로 이를 사용하기로 결정하였다.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E^H} + qH, \;\; B = q\sigma + \mu^\sigma H$$

여기서 $\varepsilon$과 $\sigma$는 기계공학에서 사용하는 물리량인 변형률과 응력을 나타내고 있으며 이들 물리량의 사이의 관계는 영률(Young's modulus) $E^H$에 의해서 설명된다. 즉 전자기적 현상이 없이 순수하게 기계적인 현상만을 고려한다면 우리가 흔히 고체역학 교과서에서 보게 되는 $\sigma = E\varepsilon$과 다르지 않다. 한 가지 다른 것은 영률 $E$에 부가된 첨자다. 위첨자 $H$는 자기장의 세기(magnetic field strength)라는 물리량이다. 원래 영률은 기계공학에서 다룰 때는 상수 값으로 배운다. 하지만 자기변형 현상을 함께 고려해야 하는 물질에서는 이 값이 상수가 아니라 외부에서 가해지는 자기장에 따라서 변화하게 된다. 위첨자 $H$는 이 식에서 사용된 영률이 자기장 값을 변화하지 않은 상태에서의 값이라는 뜻이다. 다시 말해 1차 선형화를 통해서 $H$의 변화량이 그리 크지 않을 때는 현재 $H$값에서의 $E$값을 사용하되 이를 $H$의 변화에 따라서 변화하는 값으로 보지 않고 그냥 상수로 놓겠다는 것을 의미한다. 실제로 terfenol-D와 같은 큰 변형률을 얻을 수 있는 자기변형 물질들에

* E-mail : holee21@cu.ac.kr / Tel : (053) 850-2712

서 외부에서 걸어주는 자기장에 의해서 발생하는 영률의 변화는 1500~2000 ppm에 달하는 것으로 알려져 있다. 기계적 공진시스템의 고유진동수는 해당 시스템에 사용된 탄성체의 영률의 제곱근에 비례하기 때문에 이 특성은 조정이 가능한(tunable) 진동 감쇠기에 사용되기도 한다.

똑같은 논의가 구성방정식의 자기적 현상을 기술하는 오른쪽 식에도 적용된다. 원래 $B=\mu H$로 표현되는 자기적 현상은 $H$라는 자기장에 의해서 발생하는 자속밀도가 $B$가 투자율 $\mu$에 의해서 결정된다는 내용이다. 즉, 철과 같은 강자성체 물질들은 투자율이 높아 외부에서 걸어주는 자기장에 민감하게 반응하게 되어 높은 자속밀도를 가지게 된다. 하지만 자기변형 물질에서는 투자율이 단순히 상수가 아니라 외부에서 걸어주는 응력 $\sigma$에 의해서 변화하게 됨을 알 수 있다. 위의 오른쪽 식에 나타난 것과 같이 외부에서 걸어주는 응력은 현재 자기변형 물질의 자기적인 상태에 직접 영향을 주기도 하지만 투자율 자체를 변화시키기도 한다. 그렇기 때문에 투자율을 응력을 특정 응력으로 고정한 상태에서의 값을 사용한다.

위에서 언급한 2가지 내용을 종합하여 수학적으로 기술하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$E^{H}=\left.\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}\right|_{H=H_0},\quad \mu^{\sigma}=\left.\frac{\partial B}{\partial H}\right|_{\sigma=\sigma_0} \tag{1}$$

마지막으로 $q$는 자기적인 현상과 기계적인 현상을 연결시켜주는 자기변형과 관련된 상수다. 이 결합상수 역시 앞서 언급한 영률이나 투자율과 마찬가지로 원래는 상수 값이 아님을 기억하자. 또한 원래 구성방정식에서 보이는 2개의 $q$값은 히스테리시스 등의 비가역적 물리적 현상으로 인해서 같은 값이 아니지만 물리량의 변화가 크지 않은 경우 이를 가역적이라고 가정하여 2개의 값이 같다고 놓았다. 이 말은 엄밀한 해석이 필요한 경우 히스테리시스까지 고려한 모델을 사용해야 함을 의미한다. 수학적으로 $q$는 다음과 같이 정의된다.

$$q=\left.\frac{\partial\varepsilon}{\partial H}\right|_{\sigma=\sigma_0}=\left.\frac{\partial B}{\partial\sigma}\right|_{H=H_0} \tag{2}$$

## 2. 자기기계적 결합상수

구성방정식과 관련하여 지능형 물질을 다루다보면 자주 등장하는 성능지수가 있는데 소위 자기기계적 결합상수(magneto-mechanical coupling coefficient)라는 것이다. 이 결합상수는 얼마나 자기적인 에너지가 기계적인 에너지로 변환이 잘 되는가(구성방정식에서 첫 번째 식), 역으로 얼마나 기계적 에너지가 자기적인 에너지로 변환이 잘되는가(구성방정식에서 두 번째 식)를 나타내는 물리상수가 된다. 흔히 이 결합상수는 $k$로 표현을 많이 하며 그 정의는 다음과 같다.

$$k=\frac{U_{me}}{\sqrt{U_m U_e}} \tag{3}$$

여기서 $U$는 에너지를 나타내고 아래첨자 $m$은 자기적 현상과 관련 양(magnetic energy)을 $e$는 기계적 현상과 관련된 양(elastic energy)을 나타낸다. 3방향의 축을 모두 고려하여 결합상수 $k$에 대한 표현식을 구하는 것은 매우 복잡하니 그림 1에 보인 것과 같이 일반적으로 자기변형 현상을 이용한 재료가 가장 많이 채용되는 형태의 1차원 구동기(actuator)인 둥근 막대 형태를 가정하여 결합상수 $k$와 $q$, $\mu^{\sigma}$, $E^{H}$사이의 관계를 유도해보자.

텐서(tensor) 표현방법을 사용하여 자기변형 물질에 저장되는 기계 및 자기적 에너지는 다음과

같이 표현된다. 다음 식에서 1, 2, 3은 각각 $x, y, z$ 방향의 좌표축을 의미한다고 보면 이해가 쉽다.

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_i\sigma_i + \frac{1}{2}H_m B_m \text{ (where i, m = 1,2,3)} \quad (4)$$

하지만 앞서 언급한 바와 같이 그림 1에서 보인 것과 같은 구동기에서는 결국 1차원 구동만을 고려할 것이므로 관련이 없는 첨자들을 모두 생략할 수 있다(엄밀하게는 관련된 물리량을 세세하게 따져보아야 한다). 이렇게 단순화된 식에 처음에 보인 구성방정식을 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{E^H} + qH\right)\sigma + \frac{1}{2}\left(\mu^\sigma H + q\sigma\right)H \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E^H} + \frac{1}{2}q\sigma H + \frac{1}{2}qH\sigma + \frac{1}{2}\mu^\sigma H^2 \quad (5) \\ &= U_e + U_{me} + U_{em} + U_m \\ &= U_e + 2U_{me} + U_m \end{aligned}$$

위의 식에서 첫 번째 항은 기계적인 현상에 의해서 저장되는 에너지 $U_e$를 나타내고 두 번째 항은 자기-기계적 결합현상에 의해서 저장되는 에너지 $U_{me} = U_{em}$을 나타내며 마지막 항은 자기적 현상에 의해서 저장되는 에너지 $U_m$을 나타낸다. 앞서 보인 $k$의 정의식에 위의 표현들을 대입하면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$k = \frac{U_{me}}{\sqrt{U_m U_e}} = \frac{\frac{1}{2}q\sigma H}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E^H}\right)\left(\frac{1}{2}\mu^\sigma H^2\right)}} = \frac{q}{\sqrt{\mu^\sigma / E^H}} \quad (6)$$

일반적으로 제곱근 기호를 사용하지 않기 위해서 $k^2$의 형태를 많이 사용하며 영률보다는 유연성의 개념을 사용한다는 것을 고려하여 위의 식을 수정하면 다음과 같다. 다음 식에서 $S^H = 1/E^H$로 유연성(compliance)를 나타낸다.

$$k^2 = \frac{q^2}{\mu^\sigma S^H} \quad (7)$$

## 3. 전기-기계시스템 유사성

자기변형 물질은 물론이고 피에조 물질과 관련된 문헌을 찾다보면 그림 2와 같은 그림을 자주 마주치게 된다. 이 그림을 이해할 수 있겠는가? 최근에는 메카트로닉스와 관련된 교육이 많이 진전되어 기계공학과 관련된 학과에서도 전기전자에 관련된 기본적인 내용들을 가르치고 있지만 필자가 대학 및 대학원을 다닐 때만해도 전기전자와 관련된 지식을, 그것도 온전히 전기전자

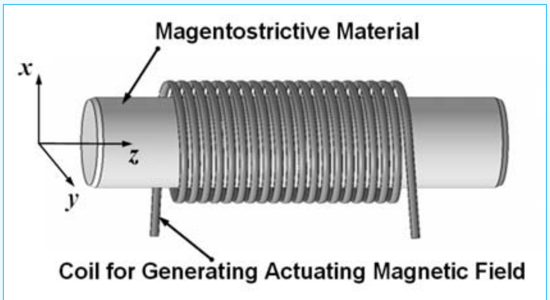


그림 1 자기변형 구동기와 좌표축 정의

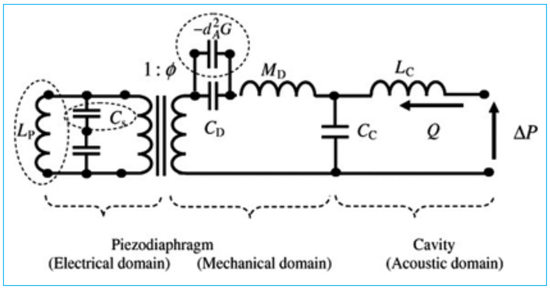


그림 2 전기적 등가회로의 예(New Journal of Physics, 2009, Vol.11 No.12)

를 위한 것이 아니라 메카트로닉스와 관련하여 필요한 정도만을 학습하는 것은 쉽지 않은 일이었다. 필자가 그림 2와 같은 그림을 처음 마주대했을 때 느꼈던 당혹감은 아직도 기억이 생생하다. 그 뒤에 독학을 통해서 많은 전기전자 지식을 쌓아갔고 지금은 큰 부담 없이 이런 그림들을 대하지만 아직도 과거 필자와 같은 느낌을 가진 있는 초심자들이 있으리라 생각한다. 그런 연유로 이번 호의 남은 부분과 다음 호에 걸쳐서는 그림 2를 이해하는 방법에 대해서 알아보도록 하자.

그림 2를 이해하려면 기본적으로 전기회로의 기본 소자인 저항, 커패시터(capacitor) 및 인덕터(inductor)에 대한 내용을 이해하고 있어야 한다. 많은 경우 기계공학을 기반으로 하는 사람들이 이를 쉽게 이해하기 위해서 전기 시스템과 기계 시스템 사이의 유사성(analogy)을 이용하곤 한다. 예를 들어 그림 3과 같이 전기소자와 기계소자 사이에는 유사하면서도 일관된 관계가 있다. (EDN Europe 2010/05/01) 그림 3(a)는 전기시스템에서 주로 다루는 물리량들의 상호관계를 보여주고 있으며 같은 그림 3(b)는 기계시스템에서 주로 다루는 물리량들의 상호관계를 보여주고 있다. 많은 경우 기계공학을 전공한 학생들은 그림 3(b)를 이해하기 쉬울 것이지만 몇 가지 언급할 것들이 있다. 먼저 기호에 대한 것이다. 전기전자와 기계공학을 함께 다루다보니 표현해야 할 물리량들이 많아지고 관련된 물리적 상수들도 많아진다. 이는 필연적으로 기호(symbol)의 부족현상을 낳게 된다. 예를 들어 기계공학에서 일반적으로 속도를 나타내는 $v$는 전기전자공학에서 전압을 나타내는 기호로 사용되기 때문에 어느 한쪽을 다른 기호로 대체해야 한다. 그림 3에서는 전압을 $e$로 대체하였으며 감쇠를 나타내는 기호 $c$도 비록 대문자 소문자의 차이는 있지만 전기 시스템에서 사용하는 정전용량 $C$와 같은 알파벳이기 때문에 $B$로 대체하였다(이렇게 놓고 보니 공평하게 하나씩 양보하였다).

두 번째는 각각의 물리량들과 그와 관련된 관계식들이다. 예를 들어 그림 3(b)에는 기계공학을 전공하는 사람들이 마치 전기전자공학을 공부하는 사람들에게 Ohm의 법칙과도 같이 기본이 되면서 중요한 Newton의 운동 제2법칙에 대한 식 $F = ma$가 보이지 않는다. 그 대신에 운동량 $p$의 개념을 도입하여 설명하고 있다. 왼쪽의 전기시스템에서 이와 등가의 개념에 해당하는 자기 플럭스 $\Phi$와 관련된 식들도 다른 식들에 비

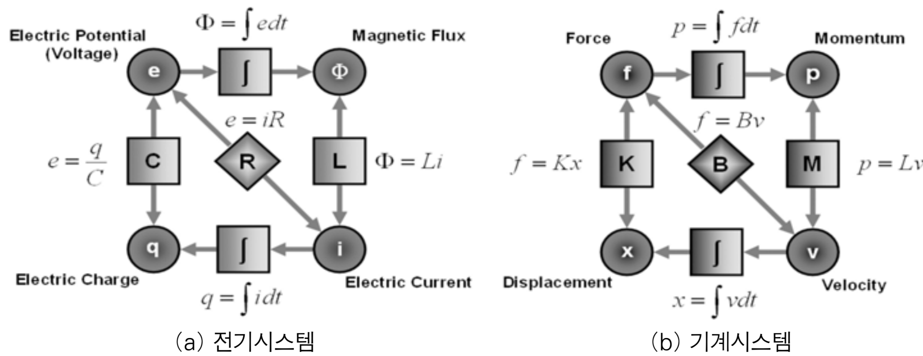


그림 3 시스템 요소 간의 상호 관계

해서 낯설 것으로 예상된다. 전압 $e$와 자기 플럭스 $\Phi$ 사이의 관계를 나타내는 식 $\Phi = \int e dt$는 보통 이 형태보다는 미분형태 $e=d\Phi/dt$로 많이 보게 되는데 이는 총 자속량의 변화가 발생하는 기전력과 같다는 Faraday의 법칙에 다름 아니다. 그림을 살펴보면 전기시스템에서 주요 관심사인 전압 및 전류가 각각 힘과 속도에 상응하는 것을 볼 수 있다. 이점이 사실 물리적인 이해를 어렵게 하는 가장 근본적인 요소 중 하나가 아닐까 싶다. 즉, 기계공학에서 주로 관심을 물리적 개념은 앞서 언급한 바와 같이 속도가 아니라 $F = ma$로 표현되는 식에서 관심을 가지는 가속도 양이다. 때때로 가속도를 두 번 적분한 변위(x: displacement)가 주된 관심사가 되기는 하지만 속도 자체가 주요 관심사가 되는 경우는 많지 않았던 것 같다. 이렇게 주로 사용하는 물리량이 다르다는 사실은 일차적으로 기계공학을 전공한 사람이 자기변형 물질 혹은 피에조 물질과 관련하여 전기적 등가회로 대할 때 불편한 느낌을 가지게 된다. 게다가 유체역학이나 열역학에서는 상황이 조금 다르지만 동역학이나 고체역학 등에서는 주로 질점(point mass)이나 질점계와 같이 고정되고 형체를 가지거나 적어도 공간상에서 위치를 특정할 수 있는 개념을 대상으로 하지만 전기시스템에서는 전하 자체를 대상으로 하기보다 전하의 '흐름'을 대상으로 한다는 점도 이해를 어렵게 하는 원인이 된다.

결국 전기시스템에서 다루는 전압($e$)과 전류($i$) 그리고 기계시스템에서 다루는 힘($f$)과 속도($v$)를 함께 다룬다는 것을 기억하자. 전기시스템에서는 전압과 전류 사이의 관계는 임피던스(impedance)라는 개념으로 정의된다. 보통 기호로는 $Z(j\omega)$로 표시하는 임피던스는 주파수에 따라서 변화하는 전압과 전류 사이의 관계를 다음 식과 같이 정의한다. 여기서 $X$는 리액턴스라고 부르며 용량성 소자(capacitance)나 유도성 소자(inductor)에 의해서 발생하는 저항 값인데 주파수에 그 값이 달라진다. 아래첨자 $R$은 이것이 리액턴스임을 나타내고 $E$는 전기시스템이라는 것을 의미한다. 앞서 언급한 Ohm의 법칙은 아래 식의 DC 즉 주파수 $\omega$가 '0'인 경우에 다름이 아님을 알 수 있다.

$$E(j\omega) = Z_E(j\omega)I(j\omega)\left(\text{where } Z_M(j\omega) = R + jX_{RE}\right) \quad (8)$$

기계적인 소자에서 관심을 두고 있는 힘과 속도에서도 비슷한 개념을 사용한다. 즉, 다음 식에서 보이는 바와 같이 소위 기계적인 임피던스(mechanical impedance)로 힘과 속도 사이의 관계를 나타낸다. 여기서 아래첨자 $M$은 이 임피던스가 기계적인 임피던스임을 나타낸다.

$$F(j\omega) = Z_M(j\omega)V(j\omega)\left(\text{where } Z_M(j\omega) = B + jX_{RM}\right) \quad (9)$$

위에서 설명한 4개의 변수들을 2개의 방정식으로 묶어서 써보면 다음과 같이 처음에 설명했던 소위 구성방정식이 조금 다른 형태로 나타난다.

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= Z_M V(j\omega) + Z_{ME} I(j\omega) \\ E(j\omega) &= Z_E I(j\omega) + Z_{EM} V(j\omega) \end{aligned} \quad (10)$$

어떤가? 첫 구성방정식과 비슷한 점이 보이는가? 여기서 $Z_{ME}$과 $Z_{EM}$은 상호 임피던스(mutual impedance)라고 하여 2개의 서로 다른 계(전기-기계) 시스템 간의 상호작용에 관련된 양인데 물리적으로는 처음에 보인 구성방정식에서 $q$의 역할을 한다. 이 두 값은 서로 크기는 같으며 부호는 같을 수도 다를 수도 있다. 이에 관한 정확한 정의 및 자세한 내용은 지면 관계상 다음 호에서 다루기로 한다. KSNVE