

평면 변형 조건에서 일축 인장력을 받는 금속 재료의 불연속 변위 각에 대한 연구

A Study on the Angle of Localization of a Metal Specimen under Uniaxial Tension with Plane Strain Condition

박 재 균† 김 미 림*
Park, Jaegyun Kim, Mi-Rim

요 지

일반적으로 인장 시험에 주로 사용되는 납작한 형태의 금속 재료에 천천히 인장력을 가하고 그 힘을 증가시키면 어느 순간에 루더스 밴드(Luders band)라고 불리는 소성 변형의 띠가 갑자기 발생한다. 이 띠들은 일정 각도를 가지고 평행하게 발생하며, 여러 연구자들에 의해 특정 경계조건에 대하여 이 띠가 발생하는 조건과 그 각도에 대한 많은 연구가 선행되어 왔다. 본 연구에서는 평면 응력 조건에서 이루어진 Thomas(1961)의 연구를 기반으로 하고 J_2 소성 변형 조건, 힘의 평형 방정식, 그리고 구성방정식을 이용하여 평면 변형 조건에서 발생하는 밴드의 각도를 해석적으로 유도하였다. 이 결과는 음향텐서를 이용한 기존의 연구 결과와 일치함을 확인하였다.

핵심용어 : 평면 변형, 루더스 밴드, 금속 재료, 불연속 변위각

Abstract

When a flat bar type metal specimen for general tension test is subject to incremental uniaxial tension, a narrow plastic shear band, so called luders band, is generated at some instance. This band typically has an angle to the axis of specimen and many early researches have been done to investigate the condition and angle of this localized deformation phenomenon by many researchers. This study follows the procedure of Thomas(1961) under plane stress boundary condition. J_2 plasticity theory, balance of linear momentum, and constitutive equations are used to derive the angle of luders band under plain strain boundary condition. The result was confirmed by other angle based on acoustic tensor theory.

Keywords : *plane strain, luders band, metal specimen, discontinuous displacement angle*

1. 서 론

응력 시험에서 많이 사용되는 금속 시편은 그 하중으로 인한 응력이 항복 강도를 넘어선 이후에 소성 변형을 일으키는 데, 그 응력 및 경계조건에 따라 여러 가지 형태로 변형한다. 특히, 일정한 폭과 두께를 가지는 인장 시편의 경우는 모든 부분에서 일정한 변형을 일으키는 안정된 상태에서 어느 순간에 특정 부분만 소성 변형을 일으키는 변형률 집중 현상(strain localization)이 발생하기 때문에 많은 학자들의 연구 대상이 되어 왔다.

대표적인 변형률 집중 현상으로는 시편의 한 지점에서 소성 변형이 발생하면서 가늘어지는 네킹 모드(necking mode)와, 수평선과 일정 각도를 이루는 평행선 띠 안에서 변형이 집중적으로 발생하는 전단 모드(shear mode)로 나누어질 수 있다. 전체적으로 균질하고 직사각형 모양을 유지하고 있는 인장 시편에 천천히 인장력을 가하고 그 힘을 증가시켰을 때, 어느 순간에 일정 각도를 가지고 평행하게 발생하는 얇은 평행선 모양의 띠를 루더스 밴드라고 한다. 이 현상은 전형적인 전단 모드이며, 이 때 인장력이 변위로 조절된다면 약간의 하중 저하를 겪게 된다.

† 책임저자, 중신회원 · 단국대학교 토목환경공학과 부교수
Tel: 031-8005-3473 ; Fax: 031-8021-7213

E-mail: jpark@dankook.ac.kr

* 단국대학교 토목환경공학과 석사

• 이 논문에 대한 토론을 2011년 8월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2011년 10월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

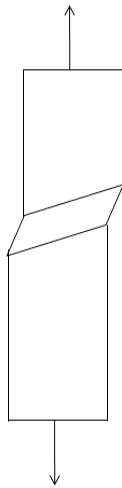


그림 1 루더스 밴드

이러한 현상은 연속체의 변형이 불안정하면서 동시에 불연속하게 되는 결과로, 변형을 국소화(Strain Localization) 현상의 하나로 Lomer(1952), Thomas(1961), Rice(1976) 등의 연구로 시작하여 Park(2002), Zhang과 Jiang(2004)에 이르기까지 그 거동을 예측하기 위한 많은 연구가 수행되어 왔다. 이러한 연구들에서 주로 다루어진 내용은 루더스 밴드가 발생하는 필요 또는 충분조건과 밴드가 외력의 직각 방향과 이루는 각도의 해석적 예측이다.

좀 더 넓은 범위에서 고체의 안정 상태에서 불안정 상태로의 전환과 그 결과에 대한 연구는 Bigoni와 Hueckel(1991)과 Nielson과 Schreyer(1993)에서 이루어졌는데, 매우 일반적인 설정으로 여러 단계의 불안정 거동이 나타나게 되는 조건 및 변형 특성을 음향 텐서(acoustic tensor) 해석을 통하여 계산하였다. 이상호 등(2000)은 손상 후의 거동을 2차 손상텐서를 이용하여 해석하였다.

본 연구에서는 Thomas(1961)의 몇 가지 가정을 이용하여 평면 변형 상태에서 발생하는 루더스 밴드의 발생 각도를 계산하고, 이를 기존의 연구와 비교하여 검증하였다.

2. 불연속 면에서의 응력 변화

루더스 밴드는 마이크로 수준에서 보았을 때 좁은 구간에서 큰 소성 변위가 발생하는 것이고, 거시적 수준으로 보았을 때에는 응력 및 변위의 불연속면으로 생각할 수 있다. 그림 2와 같이 일반적인 불연속면에 대하여 연속체 B 의 전체 영역을 Ω 로 나타내고 불연속면 Γ_x 를 기준으로 위 부분을 Ω_+ , 아래 부분을 Ω_- 라 하자.

전체와 부분에 대하여 힘의 평형 방정식을 적용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

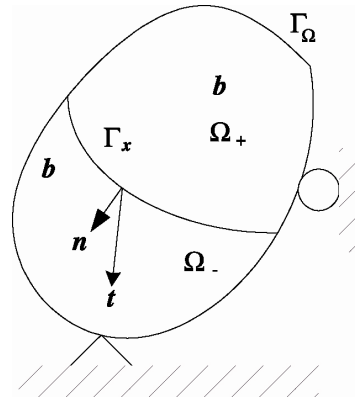


그림 2 응력 변화가 있는 구조물

$$\int_{\Omega} \rho \dot{v} d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma n d\Gamma + \int_{\Omega} \rho b d\Omega \quad (1)$$

$$\int_{\Omega_+} \rho \dot{v} d\Omega = \int_{\Gamma_+} \sigma n d\Gamma + \int_{\Omega_+} \rho b d\Omega \quad (2)$$

$$\int_{\Omega_-} \rho \dot{v} d\Omega = \int_{\Gamma_-} \sigma n d\Gamma + \int_{\Omega_-} \rho b d\Omega \quad (3)$$

위 식에서 속도 벡터 v , 응력텐서 σ , 체력 벡터 b 가 사용되었으며, Γ_+ 는 Ω_+ 의 경계, Γ_- 는 Ω_- 의 경계를 의미한다. 이제 식 (2)와 식 (3)을 더하고 식 (1)로부터 빼면 다음의 결과를 얻는다.

$$\int_{\Gamma_x} [\sigma] n d\Gamma = 0 \quad (4)$$

위 식에서 $[\cdot]$ 는 Γ_x 상에서의 벡터 차를 나타내는 연산자로 정의한다. 모든 불연속 경계에서 유효하므로 부분화 정리(Localization Theorem)에 의해 모든 불연속 경계면에서

$$[\sigma] n = 0 \quad (5)$$

을 만족한다. 즉, 응력텐서 자체는 불연속일 수 있으나, 그 면에서의 응력 벡터는 반드시 연속이어야 한다.

3. 음향텐서를 이용한 기존의 연구

일반적인 J_2 이론을 이용하여 금속 재료의 소성 변형을 정의하는 항복함수는 다음과 같다.

$$\phi(\sigma) = \|s\| - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_e + H\alpha) \leq 0 \quad (6)$$

위 식에서 $s := \sigma - \mathbf{1} \frac{tr(\sigma)}{3}$ 는 편차 응력(deviatoric stress),

σ_e 는 인장 항복 강도, H 는 선형 경화 상수, α 는 소성 변형의 정도를 나타내는 스칼라 변수, $\mathbf{1}$ 은 2차 기본행렬이다. 이 모델에 대한 4차 탄소성 강성 텐서(fourth order elasto-plastic modulus tensor) \mathbf{C}^p 는 소성 변형이 일어날 당시의 응력 변화율을 계산할 수 있는 텐서로, $\phi=0$, $\dot{\phi}=0$ 상태에서 다음의 관계를 언제나 만족한다.

$$\mathbf{C}^p = \kappa \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) - \frac{2\mu}{1+H/(3\mu)} \boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu} \quad (7)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^p \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (8)$$

위 식에서 κ, μ 는 각각 체적탄성계수(bulk modulus)와 전단탄성계수(shear modulus)이고, \mathbf{I} 는 4차 기본행렬, $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{s} / \|\mathbf{s}\|$ 는 편차응력 텐서를 정규화 한 것이다.

식 (7)의 탄소성 강성 텐서에 불연속 변위가 발생하는 면의 단위 수직벡터 \mathbf{n} 을 양쪽으로 내적하면 탄소성 음향텐서 \mathbf{Q}^p 를 얻는다.

$$\mathbf{Q}^p = \left(\kappa + \frac{1}{3} \mu \right) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mu \mathbf{1} - \frac{2\mu}{1+H/(3\mu)} (\boldsymbol{\nu} \mathbf{m}) \otimes (\boldsymbol{\nu} \mathbf{m}). \quad (9)$$

이 음향텐서가 불안정해지는 조건(Rice, 1976)은 \mathbf{n} 에 대 한 수직벡터 \mathbf{m} 을 양쪽으로 내적했을 때 다음 식과 같다.

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{Q}^p \mathbf{m} = \mu - \frac{2\mu}{1+H/(3\mu)} [\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} \mathbf{m}]^2 = 0. \quad (10)$$

이는 탄소성 텐서 \mathbf{C}^p 에 $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$ 이 적용되는 상태에서의 조건이다.

Rice(1976), Bigoni와 Hueckel(1991)의 연구에서 식 (10)의 필요 조건은

$$H = -2\mu(1+\nu) \frac{s_3^2}{\|\mathbf{s}\|^2} \quad (11)$$

이고, 여기서, s_3 은 \mathbf{s} 를 주축에서 표현했을 때 3방향에 대한 성분이다. 여기에 따르는 수직벡터 \mathbf{n} 의 성분은

$$n_1^2 = \frac{s_1 + \nu s_3}{s_1 - s_2}, \quad n_2^2 = 1 - n_1^2, \quad n_3 = 0 \quad (12)$$

이다. 즉, 음향텐서가 불안정해지면서 불연속 변위가 생길 때, 그 변위는 주응력 공간에서의 한 평면 안에서 발생하게 된다($n_3=0$). 완전 소성(perfect plasticity) 변형을 일으키

는 경우는 $H=0$ 에 해당하며, 따라서 이 조건을 식 (11)에 적용하면 다음의 결과를 얻는다.

$$s_3 = 0, \quad s_1 + s_2 = 0, \quad n_1^2 = n_2^2 = \frac{1}{2} \quad (13)$$

즉, 불연속면은 주응력 면에서 $\pi/4$ 만큼 회전한 방향이 된다. 여기서, $H=0$ 이 될 때 식 (10)의 필요조건은 물성과 관계없이 편차응력 \mathbf{s} 에 의해 결정되는 식이다.

4. 기본 가정을 이용한 불연속 변형각 계산

4.1 평면 응력 문제에서의 변형 각도 계산(Thomas, 1961)

일반적인 금속 재료를 등방성 탄성-완전 소성(isotropic elastic-perfect plastic) 물질로 가정할 수 있다. 등방성 탄성 상태에서 편차 응력(deviatoric stress) $\mathbf{s} := \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{1} \frac{tr(\boldsymbol{\sigma})}{3}$ 에 대하여 다음 관계식이 언제나 만족된다.

$$s_{ij} = \phi e_{ij} \quad (14)$$

위 식에서 $\mathbf{e} = \boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{1} \frac{tr(\boldsymbol{\epsilon})}{3}$ 는 편차 변형률(deviatoric strain) 텐서이고 탄성 상태에서는 $\phi = 2\mu$ (μ = 전단 탄성계수)의 관계가 성립한다.

중력과 관성력을 무시한 상태에서 만족시켜야 하는 힘의 평형 방정식은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (15)$$

소성 변형에 대하여 편차 응력을 사용하여 J_2 소성 모델의 von-Mises 항복 조건을 나타내면 다음과 같다.

$$s_{ij}s_{ij} = 2k^2 \quad (16)$$

대상 금속 재료의 강성(elastic modulus)이 매우 클 경우 탄성 변형으로 인한 부피의 증감은 미미하며, J_2 소성 변형을 적용하면 소성 변형 도중이나 그 이후에도 부피의 변화는 무시할 수 있다. 따라서 변형 후에도 부피가 보존되는 조건을 근사적으로 적용할 수 있다.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = u_{i,i} = 0 \quad (17)$$

일축 인장 응력이 발생하는 방향을 x_2 축, 이로부터 시계

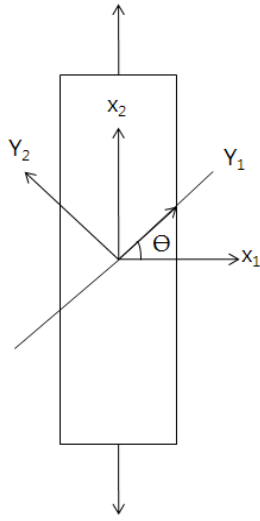


그림 3 루더스 밴드의 좌표계

방향으로 $\pi/2$ 만큼 회전된 축을 x_1 축이라고 하자. 루더스 밴드가 발생하는 방향을 y_1 축으로 정하고 x_1 과의 사이각을 θ 라 하면 그림 3과 같다. 이제 x 좌표계와 y 좌표계의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \cos \theta - y_2 \sin \theta \\ x_2 &= y_1 \sin \theta + y_2 \cos \theta \end{aligned} \quad (18)$$

이상적인 평면 응력(plane stress) 상태의 시편이 x_2 방향으로 균등한 인장 응력(uniform tension stress) $\tau (>0)$ 을 받을 때의 응력 텐서를 x 축에 대하여 나타내면 다음과 같다.

$$\sigma_{22} = \tau, \text{ 그 외의 경우 } \sigma_{ij} = 0 \quad (19)$$

이제 x 좌표계에 대한 응력 텐서 σ_{ij} 를 y 좌표계에 대한 텐서 τ_{ij} 로 나타내면, 텐서 변환식

$$\tau_{ij} = \sigma_{ab} \frac{\partial x_a}{\partial y_i} \frac{\partial x_b}{\partial y_j} = \tau \frac{\partial x_2}{\partial y_i} \frac{\partial x_2}{\partial y_j} \quad (20a)$$

을 이용하여, 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \tau \sin^2 \theta, \quad \tau_{12} = \tau \sin \theta \cos \theta, \quad \tau_{13} = 0 \\ \tau_{22} &= \tau \cos^2 \theta, \quad \tau_{23} = 0, \quad \tau_{33} = 0 \end{aligned} \quad (20b)$$

인장 응력 τ 가 계속 증가하여 어느 순간 소성 변형의 띠인 루더스 밴드가 생성되었다고 가정하자. 이 띠 안에서는 균질(homogeneous)한 소성 변형을 가정한다. 다른 불확실성을

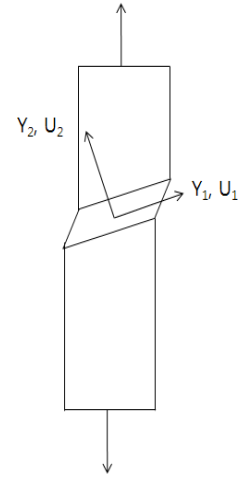


그림 4 밴드 내부의 변위 벡터

고려하지 않은 경우 변형 후의 모양을 예측하면, y 축에 대하여 선형으로 변하는 변위 벡터 u_i 를 다음과 같이 정의할 수 있다(그림 4).

$$u_1 = ay_2, \quad u_2 = by_2, \quad u_3 = -by_3 \quad (21)$$

이 때 u_i 는 y_i 방향의 변위를 의미하고, a, b 는 상수이다. 식 (21)은 a, b 의 값에 관계없이 부피 보존의 식 (17)을 언제나 만족한다. 이제 위의 변위를 이용하여 미분을 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= 0, \quad u_{1,2} = a, \quad u_{1,3} = 0 \\ u_{2,1} &= 0, \quad u_{2,2} = b, \quad u_{2,3} = 0 \\ u_{3,1} &= 0, \quad u_{3,2} = 0, \quad u_{3,3} = -b. \end{aligned} \quad (22)$$

식 (22)로부터 변형률을 계산하면,

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= 0, \quad \epsilon_{12} = \frac{a}{2}, \quad \epsilon_{13} = 0 \\ \epsilon_{22} &= b, \quad \epsilon_{23} = 0, \quad \epsilon_{33} = -b. \end{aligned} \quad (23)$$

루더스 밴드 안에서는 식 (17)에 따라 부피 변화가 없기 때문에 $\epsilon_{ij} = e_{ij}$ 라고 할 수 있으며, 따라서 식 (14)에 이 결과를 적용하면

$$\begin{aligned} s_{11}^* &= 0, \quad s_{12}^* = \frac{a}{2} \phi, \quad s_{13}^* = 0 \\ s_{22}^* &= b \phi, \quad s_{23}^* = 0, \quad s_{33}^* = -b \phi. \end{aligned} \quad (24)$$

위 결과를 이용하여 응력 성분을 나타내면,

$$\tau_{11}^* = -p, \tau_{12}^* = \frac{a}{2}\phi, \tau_{13}^* = 0 \quad (25)$$

$$\tau_{22}^* = b\phi - p, \tau_{23}^* = 0, \tau_{33}^* = -b\phi - p$$

이고 여기서, $p = -\tau_{aa}^*/3$ 을 이용하였다. 식 (25)의 응력을 힘의 평형방정식인 식 (15)에 대입하고 ϕ 가 소성 띠 안에서 상수라는 사실을 이용하면 $p_{,i} = 0$ 의 결과를 얻는다. 따라서 루더스 밴드의 소성 띠 안에서 압력 p 는 상수이다.

소성 띠 안에서 면의 수직 방향에 대한 경계조건을 고려하면, 평면응력 문제에서 $\tau_{ij}^* n_j = 0$ 으로부터 $\tau_{i3}^* = 0$ 임을 알 수 있다. 그러므로 식 (25)로부터 다음의 결과를 얻는다.

$$p = -b\phi \quad (26)$$

소성 띠가 발생하는 경계에서 식 (5)를 적용하면

$$[\tau_{i2}] = \tau_{i2} - \tau_{i2}^* = 0 \quad (27)$$

위 식에서 τ_{i2}^* 는 식 (25)에서 계산하며, τ_{i2} 는 식 (20)에서 계산할 수 있다. 식 (26)의 결과를 더하여 식 (27)을 정리하면

$$\tau \sin\theta \cos\theta = \frac{a\phi}{2} \quad (28)$$

$$\tau \cos^2\theta = 2b\phi \quad (29)$$

식 (28)을 식 (29)로 나누면,

$$\tan\theta = \frac{a}{4b} \quad (30)$$

언제나 성립하는 $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ 에 식 (29)와 (30)을 대입하면 θ 가 없는 관계식을 얻는다.

$$\frac{a^2 + 16b^2}{8b} = \frac{\tau}{\phi} \quad (31)$$

소성 조건에 대한 관계식을 정립하기 위하여 식 (24)에서 계산한 편차응력을 식 (16)에 대입하면 다음 관계를 얻는다.

$$\phi = \frac{2k}{\sqrt{a^2 + 4b^2}} \quad (32)$$

막 소성 변형이 발생하려고 할 때의 응력 상태는 인장 방

향으로 τ , 다른 모든 응력은 0이다. 이 응력을 식 (16)에 대입하면,

$$s_{ij}s_{ij} = \frac{2}{3}\tau^2 = k^2 \quad (33)$$

식 (33)을 식 (32)에 대입하고, 그 값을 식 (31)에 대입하면 다음 관계식을 얻는다.

$$a^2 + 16b^2 = 4\sqrt{3}b\sqrt{a^2 + 4b^2} \quad (34)$$

식 (34)의 양변을 제곱하여 a 의 근을 구하면 $a = \pm\sqrt{8}b$ 이며, 따라서 식 (30)으로부터 $\tan\theta = \pm 1/\sqrt{2}$, $\theta = 35^\circ 16'$ 를 얻는다. 즉, von Mises 소성 변형을 가정하는 이상적 경우에 루더스 밴드의 소성 띠는 수평면에서 35도 이상 기울어진 각도로 발생한다.

4.2 평면 변형 문제에서의 변형 각도 계산

Thomas(1961)의 해법을 평면 변형 문제에 적용하기 위하여 1,2평면에서만 변형이 가능하고 모든 변수가 x_1, x_2 의 함수인 경우를 가정한다. 이상적인 평면 변형(plane strain) 상태의 시편이 x_2 방향으로 균등한 인장 응력(uniform tension stress) $\tau (> 0)$ 를 받을 때의 응력텐서를 x 좌표계(x_1, x_2 축)에 대하여 나타내면 다음과 같다.

$$\sigma_{22} = \tau, \sigma_{33} = \nu\tau, \text{ 그 외의 경우 } \sigma_{ij} = 0 \quad (35)$$

위 식에서 ν 는 뺄와송 비율이다. 이제 x 좌표계에 대한 응력 텐서 σ_{ij} 를 4.1 절에서와 같이 y 좌표계에 대한 텐서 τ_{ij} 로 나타내면,

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \tau \sin^2\theta, \tau_{12} = \tau \sin\theta \cos\theta, \tau_{13} = 0 \\ \tau_{22} &= \tau \cos^2\theta, \tau_{23} = 0, \tau_{33} = \nu\tau \end{aligned} \quad (36)$$

인장 응력 τ 가 0으로부터 계속 증가하여 균질한 루더스 밴드가 생성되었을 때 변형 후의 모양을 예측하면, y 축에 대하여 선형으로 변하는 변위 벡터 u_i 를 정의할 수 있다(그림 4). 이 때 u_i 는 y_i 방향의 변위를 의미한다.

$$u_1 = ay_2 - by_1, u_2 = cy_2 + dy_1, u_3 = 0 \quad (37)$$

위의 변위를 이용하여 미분을 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= -b, \quad u_{1,2} = a, \quad u_{1,3} = 0 \\ u_{2,1} &= d, \quad u_{2,2} = c, \quad u_{2,3} = 0 \\ u_{3,1} &= 0, \quad u_{3,2} = 0, \quad u_{3,3} = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

이 경우에도 식 (17)의 부피가 보존되는 조건을 적용할 수 있다. 이로부터 $b=c$ 의 관계를 얻는다. 변형률을 계산하면

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= -b, \quad \varepsilon_{12} = \frac{(a+d)}{2}, \quad \varepsilon_{13} = 0 \\ \varepsilon_{22} &= b, \quad \varepsilon_{23} = 0, \quad \varepsilon_{33} = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

이제 구성방정식 식 (14)에 따라 y 축에 대한 편차응력 s^* 를 계산하면,

$$\begin{aligned} s_{11}^* &= -b\phi, \quad s_{12}^* = \frac{(a+d)\phi}{2}, \quad s_{13}^* = 0 \\ s_{22}^* &= b\phi, \quad s_{23}^* = 0, \quad s_{33}^* = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

식 (40)의 편차 응력으로부터 응력 텐서 τ^* 를 계산하면,

$$\begin{aligned} \tau_{11}^* &= -b\phi + p, \quad \tau_{12}^* = \frac{(a+d)\phi}{2}, \quad \tau_{13}^* = 0 \\ \tau_{22}^* &= b\phi + p, \quad \tau_{23}^* = 0, \quad \tau_{33}^* = p \end{aligned} \quad (41)$$

이고, 앞 절에서와 마찬가지로 $p = -\tau_{aa}^*/3$ 을 이용하였다.

식 (36)과 (41)으로부터 다음 관계식을 얻는다.

$$\tau \sin^2 \theta = -b\phi + p \quad (42)$$

$$\tau \cos^2 \theta = b\phi + p \quad (43)$$

위 식들을 더하면 평면 응력의 경우와 마찬가지로 다음 식을 얻는다.

$$\tau = 2p \quad (44)$$

루더스 밴드 경계의 위와 아래에서 식 (5)의 조건을 만족해야 하기 때문에 $\tau_{12} = \tau_{12}^*$ 를 언제나 만족해야 한다. 따라서 식 (36)과 (41)로부터 추가로 두 개의 조건식을 얻는다.

$$\tau \sin \theta \cos \theta = \frac{(a+d)\phi}{2} \quad (45)$$

$$\tau \cos^2 \theta = b\phi + \frac{\tau}{2} \quad (46)$$

위의 두 식을 결합하면

$$\tan 2\theta = \frac{(a+d)}{2b} \quad (47)$$

루더스 밴드 내에서 시편의 부피 변화가 없기 위해서는 밴드를 이루는 얇은 평행 사변형의 면적이 변형 전과 후에 일정해야 한다(그림 4). 불연속면에 대한 대칭성을 고려하면 위와 아래 면의 길이가 일정하기 때문에 그 높이가 변하지 않아야 하며, 따라서 $u_2=0$ 의 조건이 추가된다. 이 조건을 식 (37)에 대입하면, 이상적인 관계식 $b=d=0$ 를 얻는다. 이 결과를 식 (47)에 적용하면

$$\tan 2\theta = \infty \quad (48)$$

의 관계를 얻는다. 따라서 평면 변형 조건에서 루더스 밴드가 발생하는 각도는 $\theta = \pi/4$ 이며, 이는 3절에서 제시한 Bigoni & Hueckel(1991)의 결과와 일치한다. 이 결과를 식 (40)에 적용하면, 루더스 밴드가 생성될 때 그 안에서 $s_{12}^* = \frac{a\phi}{2} = s_{21}^*$ 를 제외한 모든 편차응력은 0이다. 즉, 이 변형이 완전한 전단 응력에 의한 결과라는 것을 보여주며, a, b 가 둘 다 존재하는 평면응력의 경우와 다르다.

5. 결 론

평면 변형 상태에서 발생하는 루더스 밴드에 대한 지금까지의 연구는 대부분 음향텐서를 이용하여 이루어져 온 것에 반하여, 본 연구에서는 탄성-완전 소성 조건과 von-Mises 소성이론, 그리고 비압축성의 가정을 이용하여 해석적인 유도를 시도하였다. 그 결과로 기존의 음향텐서를 이용한 결과와 일치함을 보였다. 루더스 밴드의 발생 각을 계산하기 위하여 많은 이상적인 가정들이 사용되며, 따라서 실험적 결과와 완전히 일치하기는 어렵다. 그러나 지배방정식과 조건식만을 이용하여 국부 소성 변형의 방향을 예측할 수 있다는 점에서 의의가 있다.

감사의 글

본 연구는 2009년 단국대학교 연구보조 장학사업의 도움으로 수행되었으며, 저자는 이에 감사드립니다.

참 고 문 헌

이상호, 이형기, 허용학 (2000) 수정된 2차 손상텐서를 이용한 손상된 구조체의 거동해석, 한국전산구조공학회 논문집, 13(2), pp.257~270.

- Bigoni, D., Hueckel, T.** (1991) Uniqueness and Localization. Part I: Associative and Non-Associative Elastoplasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 28, pp.197~213.
- Lomer, W.M.** (1952) The Yield Phenomenon in Polycrystalline Mild Steel, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1(1), pp.64~73.
- Neilsen, M.K., Schreyer, H.L.** (1993) Bifurcation in Elastic-Plastic Materials, *Int. J. Solids Structures*, 30, pp.521~544.
- Ottosen, N.S., Runesson, K.** (1991) Properties of Discontinuous Bifurcation Solutions in Elastoplasticity, *Int. J. Solids Structures*, 27, pp.401~421.
- Park, J.** (2002) *An Analysis of Strong Discontinuities in Thermo-Elasto-Plastic Solids*, Ph.D. Dissertation, UC Berkeley.
- Rice, J.** (1976) The Localization of Plastic Deformations, *Theoretical and Applied Mechanics*, ed. by Koiter, W.T., pp.207~219.
- Thomas, T.Y.** (1961) *Plastic Flow and Fracture in Solids*, Academic Press.
- Zhang, J., Jiang, Y.** (2004) A Study of Inhomogeneous Plastic Deformation of 1045 steel, *ASME J. Eng. Mater. Tech.*, 126, pp.164~171.

- 논문접수일 2011년 1월 3일
- 논문심사일
 - 1차 2011년 1월 13일
 - 2차 2011년 5월 10일
- 게재확정일 2011년 5월 24일