생브낭의 원리를 이용한 응력해석 개선

A Novel Methodology of Improving Stress Prediction via Saint-Venant's Principle

김 준 식* 조 맹 효†
Kim, Jun-Sik Cho, Maenghyo

요 지

본 논문에서는 생브낭의 원리를 이용하여 보/판/쉘 등의 구조물에서 응력분포를 후처리함으로써 개선할 수 있는 방법을 개발하였다. 생브낭의 원리에 따르면, 주어진 탄성문제에 대해서 실제의 응력분포에 상관없이 합응력들로 문제를 기술할 수 있다. 현재까지 알려진 바에 따르면 유일하게 점근적으로 타당한 이론들은 Euler-Bernoulli(E-B) 보이론과 Kirchhoff-Love(K-L) 판이론 등이 있다. 많은 공학적 문제들이 이 두 이론들에 기초하여 해석되어 왔음은 주지의 사실이다. 하지만, 현대의 공학 문제들은 보다 정확한 해석기법을 요구한다. 본 연구에서는 자유도가 상대적으로 많은 고차이론 등을 사용하지 않고, 고전적인 E-B 또는 K-L 해석결과를 합응력 등가의 원리를 이용하여 후처리함으로써 변위 및 응력분포를 정확하게 예측할 수 있는 방법을 개발하였고, 이방성 보 수치예제를 통해 제안된 방법론을 탄성해석법과 비교·검증하였다.

핵심용어 : 생브낭의 원리, 응력해석, 보, 판

Abstract

In this paper, a methodology is proposed to improve the stress prediction of plates via Saint Venant's principle. According to Saint Venant's principle, the stress resultants can be used to describe linear elastic problems. Many engineering problems have been analyzed by Euler-Bernoulli beam(E-B) and/or Kirchhoff-Love(K-L) plate models. These models are asymptotically correct, and therefore, their accuracy is mathematically guaranteed for thin plates or slender beams. By post-processing their solutions, one can improve the stresses and displacements via Saint Venant's principle. The improved in-plane and out-of-plane displacements are obtained by adding the perturbed deflection and integrating the transverse shear strains. The perturbed deflection is calculated by applying the equivalence of stress resultants before and after post-processing(or Saint Venant's principle). Accuracy and efficiency of the proposed methodology is verified by comparing the solutions obtained with the elasticity solutions for orthotropic beams.

Keywords : *saint-venant's principle, stress analysis, beam, plate*

1. 서 론

고강도 및 다기능성을 요구하는 현대 공학의 요구에 부응하기 위해 많은 복합재료 및 하이브리드 구조물이 개발되어 왔다(Jones, 1975). 철이 주재료인 시기에는 등방성 구조물의 해석 및 설계가 주를 이루었고, 보 구조물에 대해서는 Euler-Bernoulli(E-B) 모델이, 판 구조물에 대해서는 Kirchhoff-Love(K-L) 모델이 널리 사용되어 왔다(Timoshenko 등, 1959). 복합재료 등의 이방성 재료를 사용하는 구조물에 대해서는 Rankine-Timoshenko(R-T) 보 이론 및 Reissner-Mindlin(R-M) 판 이론이 사용되어 왔고, 보다 정확한 해석 및 설계를 위하여 다양한 고차이론들이 지난 30년간 꾸준히 개발되어 왔다(조맹효, 1994; 2002; Carrera, 2003). 이 외에도 일차전단변형이론(R-T 또는 R-M)을 강화 또는 변형하여 고차이론들에서 요구하는 많은 자유도를 줄이려는 많은 시도가 있어 왔다.

고차이론들이 많이 개발되던 70년대에서 90년대까지는 고차이론의 황금기였고, 동시에 많은 논쟁들이 있었다. 그 대표

† 책임저자, 종신회원·서울대학교 기계항공공학부 교수
Tel: 02-880-1693 ; Fax: 02-886-1693
E-mail: mhcho@snu.ac.kr
* 정회원·금오공과대학교 기계공학부 교수

• 이 논문에 대한 토론을 2011년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2011년 8월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

적인 것으로는 두 가지가 있는데 첫째, 일차전단변형이론이 고전적 이론(E-B 또는 K-L)에 비해 항상 정확한가?(Nicholson 등, 1977; Heijden 등, 1977) 둘째, 고차이론에서 사용되어지는 경계조건이 점근적으로 정확한가?(Gregory 등, 1984; Fan 등, 1994)이다. 첫 번째 문제는 특수한 경우에 일차전단변형이론이 고전적 이론 보다 모든 경우에 정확하지 않다는 것은 밝혀졌고, 두 번째 문제는 아직 진행형이다. 따라서 일부 연구자들은 고전적 이론에 기반을 두어 고차이론 또는 유사 이론을 개발하려는 시도를 하였다(조맹효, 1994; Carrera, 2003). 결과적으로 면내 응력 및 횡방향 전단응력은 어느 정도 만족할 만한 성과를 거두었고, 그 대표적인 방법으로는 3차원 응력 평형방정식을 이용하여 면외 응력들을 개선하는 것이다. 문제는 3차원 평형방정식을 통해 응력을 어느 정도 개선할 수는 있었으나, 일반적으로 전단변형을 포함하는 처짐을 개선할 수는 없었다(김준식 등, 2007; Oh 등, 2008). 이 부가적인 처짐은 면내 응력의 두께방향 분포 및 고유 진동수에 영향을 주기 때문에 이방성 구조물의 해석에서 중요하다. 전단수정계수의 도입을 통해 일차전단변형이론에서는 이런 문제를 어느 정도 해결할 수 있었지만, 이방성 구조물에 대한 정확한 전단수정계수의 계산은 어려운 문제로 남아 있다.

본 논문에서는 자유도를 추가로 고려하는 고차전단변형이론들을 사용하지 않고, 고전이론과 전단수정계수가 없는 일차전단변형이론의 해만을 이용하여 응력 및 변위를 개선하는 방법을 개발하고자 한다. 응력 및 변위 개선을 위해서 본 논문에서도 잘 알려진 3차원 응력 평형방정식을 이용한다. 이 때 처짐에 부가적인 변수를 도입하고 생브낭의 원리(Timoshenko 등, 1951; Barber, 1992)를 적용하여 부가적인 변수를 결정한다. 여기서 생브낭의 원리는 응력 개선 전후에 합응력은 등가하다는 것이다. 이렇게 함으로써 후처리만을 통해서 변위 및 응력을 모두 개선할 수 있고, 등방성 보 구조물에서는 탄성해와 정성적으로 일치하는 결과를 얻을 수 있다.

2. 정식화

이장에서는 생브낭의 원리를 소개하고, 이어서 이방성 보에 대한 고전이론(E-B) 및 일차전단변형이론(R-T)에서 생브낭의 원리를 적용하여 응력 및 변위를 개선하는 방법에 대하여 기술한다.

2.1 생브낭의 원리

생브낭의 정의는 "정적등가 하중이 작용하는 시스템에서 영역의 최대치수 이상 떨어진 점의 응력상태는 동일함" 이다 (Timoshenko 등, 1951; Barber, 1992). 이를 확대해석하면 동일한 하중에 대한 구조물의 해석 결과에서 반드시 만족해야 하는 것은 응력분포가 아니라 정적등가 하중이다. 여기서 정적등가 하중이라 함은 축 합력과 모멘트 합력을 뜻하고, 이를 합응력이라 한다.

고전이론을 적용하여 구조물의 해석을 수행하고 얻은 해들을 이용해 변위 또는 응력을 개선하기 위해서는 후처리로 얻어진 합응력은 개선전의 합응력과 반드시 등가해야 한다는 것을 알 수 있다. 또한 개선전의 합응력은 구조물의 평형방정식을 만족하기 때문에 개선후의 합응력 또한 평형방정식을 만족하게 된다. 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$N_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}^{A} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}^{B} dz$$
$$M_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}^{A} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}^{B} z dz \quad (1)$$

식 (1)에서 서로 다른 응력분포 A와 B가 있을 때 만약 이 두 응력이 동일한 시스템의 해석결과라면 축 합력과 모멘트 합력은 동일해야만 한다. 하지만 응력의 분포는 다를 수 있다는 것이다. 따라서 응력상태 B는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\sigma_{xx}^{B} = \sigma_{xx}^{A} + \sigma_{xx}^{C} \quad (2)$$

응력상태 C는 합응력이 영이 되어야 함을 알 수 있다. 즉,

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}^{C} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}^{C} z dz = 0 \quad (3)$$

여기서, 응력상태 C는 구조물의 경계(예, 보의 양단)와 도메인에서의 경계(예, 보의 윗면과 아랫면)층 응력상태라고 생각 할 수 있다. 응력상태 C를 정확하게 예측한다는 것은 정확해(exact solution)를 안다는 것과 마찬가지이다. 일반적으로 응력상태 C는 3차원 유한요소법을 사용하지 않으면 알 수 없다. 힘의 평형이라는 관점에서 보면 어떠한 경우에도 응력상태 C는 식 (3)을 만족해야 한다.

2.2 이방성 보의 정식화

본 논문에서는 2.1절에서 설명한 생브낭의 원리를 적용한 예를 보이기 위하여 윗면과 아랫면에서 분포하중 p^{+}와 p^{-}를 받고 있는 이방성 보[1)](높이 h, 폭 b, 길이 l)를 예제로 채택

1) 탄성계수E와 전단강성계수G가 독립적인 보를 뜻함.

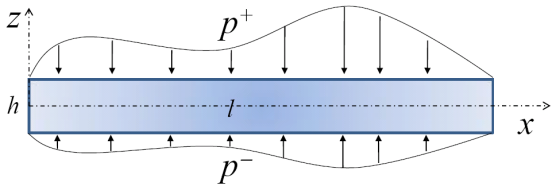

그림 1 Configuration of an orthotropic beam

하였다(그림 1).

2.2.1 고전 보이론(E-B)

고전 보이론에서 변위장은 다음과 같이 주어진다.

$$u_1(x,z) = v_1(x) - zv_{3,1}(x)$$
$$u_3(x,z) = v_3(x) \tag{4}$$

여기서, $u_i(x,z)$는 보의 변위를, $v_i(x)$는 보의 기준면에서의 변위를, 그리고 $(\bullet)_{,1}$은 $(\bullet)$에 대한 x좌표에 관한 미분을 나타낸다. 하첨자 i는 1 또는 3의 값을 가지며, 각각 x축 또는 z축 방향의 성분을 의미한다. 이 변위장으로부터 면내 응력은 다음과 같이 계산된다.

$$\sigma_{11} = E(v_{1,1} - zv_{3,11}) \tag{5}$$

여기서, E는 Young's modulus이다.

식 (5)의 면내응력을 미분하여 2차원 평형 방정식으로부터 횡방향 전단응력을 계산한다.

$$\sigma_{13} = -\int_{-h/2}^{z} \sigma_{11,1} dz = \frac{1}{2} E v_{3,111}\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right) \tag{6}$$

면내 평형방정식 $v_{1,11} = 0$, 그리고 식 (6)과 전단 구성방정식으로부터 개선된 변위장을 계산할 수 있다.

$$\sigma_{13} = G(\tilde{u}_{1,3} + \tilde{u}_{3,1}) \tag{7}$$

여기서, G는 shear modulus이고, 횡방향 변위는 섭동항(w_3)을 포함하는 식으로 다음과 같이 가정하였다.

$$\tilde{u}_3(x,z) = v_3(x) + w_3(x) \tag{8}$$

식 (8)을 식 (7)에 대입하고 두께방향(즉, z축 방향)으로 적분함으로써 면내변위를 다음과 같이 얻는다.

$$\tilde{u}_1(x,z) = v_1 + w_1(x) - \left(v_{3,1} + w_{3,1}(x)\right)z + \frac{E}{2G} v_{3,111}\left(\frac{1}{3}z^3 - \frac{h^2}{4}z\right) \tag{9}$$

여기서, w_1은 면내변위 섭동항이다. 식 (9)를 이용하여 면내 변형률을 계산하고, 구성방정식을 이용하여 개선된 면내 응력을 구한다.

$$\tilde{\sigma}_{11} = E\left(v_{1,1} + w_{1,1}\right) - E\left(v_{3,11} + w_{3,11}\right)z + \frac{E^2}{2G} v_{3,1111}\left(\frac{1}{3}z^3 - \frac{h^2}{4}z\right) \tag{10}$$

문제는 식 (10)에서 섭동항들이 미지수이므로 계산되어져야만 한다. 이 섭동항들은 2.1절에서 기술한 식을 이용하여 계산할 수 있다. 식 (5)의 면내응력으로부터 합응력과 식 (10)으로부터 계산한 합응력과 같다는 것이다. 즉,

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{\sigma}_{11} dz \tag{11}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{\sigma}_{11} z dz \tag{12}$$

식 (11)로부터 섭동항 w_1은 다음과 같이 같다.

$$w_{1,1} = 0 \rightarrow w_1 = c_1^{(1)} \tag{13}$$

그리고 식 (12)로부터 섭동항 w_3는

$$w_{3,11} = -\frac{h^2}{10}\left(\frac{E}{G}\right) v_{3,1111}$$
$$w_{3,1} = -\frac{h^2}{10}\left(\frac{E}{G}\right) v_{3,111} + c_3^{(1)}$$
$$w_3 = -\frac{h^2}{10}\left(\frac{E}{G}\right) v_{3,11} + c_3^{(1)} x + c_3^{(2)} \tag{14}$$

식 (13)과 식 (14)에서 상수들은 보의 경계조건으로부터 구할 수 있다. 특히 횡방향 변위 섭동항은 변위 경계조건에 민감함을 알 수 있는데 자세한 내용은 수치예제에서 다룰 것이다.

식 (14)의 첫 번째 식을 식 (10)에 대입함으로써 개선된 면내응력을 고전이론(E-B)의 해만으로 표시할 수 있다. 횡방향 전단응력은 식 (6)에 주어진 것과 같고, 횡방향 수직응력은 식 (6)을 2차원 평형방정식에 대입하고 두께 방향으로

적분함으로써 계산된다. 즉,

$$\sigma_{33} = -\int_{-h/2}^{z} \sigma_{13,1} dz + p^{-} = -\frac{1}{2} E v_{3,1111} \left(\frac{1}{3} z^3 - \frac{h^2}{4} z - \frac{h^3}{12} \right) + p^{-} \tag{15}$$

정리하면 식 (6), 식 (10), 식 (15)는 다음의 2차원 응력 평형방정식을 만족하는 statically admissible stress field (Dym 등, 1973) 이다.

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11,1} + \sigma_{13,3} &= 0 \\ \sigma_{13,1} + \sigma_{33,3} &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

여기서, 면내 수직응력과 횡방향 전단응력은 변위장 식 (8)과 식 (9), 그리고 구성방정식을 통해 계산된다.

2.2.2 일차전단변형이론(R-T)

티모센코(Timoshenko) 보이론으로 잘 알려져 있는 일차전단변형이론(R-T)에서 변위장은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} u_1(x,z) &= v_1(x) + z\theta(x) \\ u_3(x,z) &= v_3(x) \end{aligned} \tag{17}$$

2.2.1절에서 기술한 절차에 따르면 개선된 변위장은 다음과 같이 기술된다.

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(x,z) &= v_1 + w_1(x) - \left(v_{3,1} + w_{3,1}(x) \right) z \\ &\quad - \frac{E}{2G} \theta_{,11} \left(\frac{1}{3} z^3 - \frac{h^2}{4} z \right) \\ \tilde{u}_3(x,z) &= v_3 + w_3(x) \end{aligned} \tag{18}$$

이 변위장으로부터 면내응력과 횡방향 전단응력은 다음과 같이 주어진다.

$$\tilde{\sigma}_{11} = E\left(v_{1,1} + w_{1,1} \right) - E\left(v_{3,11} + w_{3,11} \right) z - \frac{E^2}{2G} \theta_{,111} \left(\frac{1}{3} z^3 - \frac{h^2}{4} z \right) \tag{19}$$

$$\sigma_{13} = -\frac{1}{2} E \theta_{,11} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \tag{20}$$

횡방향 수직응력은 식 (20)으로부터

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2} E \theta_{,111} \left(\frac{1}{3} z^3 - \frac{h^2}{4} z - \frac{h^3}{12} \right) + p^{-} \tag{21}$$

섭동항들은 2.2.1절의 식 (11)과 식 (12)를 이용하여 각각 다음과 같이 계산되어진다. 면내 섭동항은 다음과 같다.

$$w_{1,1} = 0 \rightarrow w_1 = c_1^{(1)} \tag{22}$$

그리고 면외 섭동항은

$$\begin{aligned} w_{3,11} &= -\left(v_{3,11} + \theta_{,1} \right) + \frac{h^2}{10} \left(\frac{E}{G} \right) \theta_{,111} \\ w_{3,1} &= -\left(v_{3,1} + \theta \right) + \frac{h^2}{10} \left(\frac{E}{G} \right) \theta_{,11} + c_3^{(1)} \\ w_3 &= -\left(v_3 + \int \theta dx \right) + \frac{h^2}{10} \left(\frac{E}{G} \right) \theta_{,1} + c_3^{(1)} x + c_3^{(2)} \end{aligned} \tag{23}$$

식 (23)에서도 알 수 있듯이 횡방향 변위를 일반적인 구조해석에 적용하기에는 적분식을 포함하고 있어 어렵다. 하지만 식 (23)의 첫 번째 식을 식 (19)에 대입하여 면내응력을 적분없이 회전각 변수(θ)의 3차미분값을 이용하여 바로 계산할 수 있다. 다음장의 수치예제에서는 식 (23)의 세 번째 식을 계산하여 면외 섭동항을 두 번 미분한 값의 정확도를 검증한다.

3. 수치예제

이장에서는 이방성 외팔보와 단순지지 보에 대하여 2장에서 기술한 방법을 사용하여 해석해를 구하고 티모센코의 탄성해와 비교한다. 편의상 폭은 단위길이($b=1$)로 가정하였다.

3.1 전단력 하의 외팔보

티모센코의 탄성론 책(Timoshenko 등, 1951)에 다루어진 고전적인 문제이다(그림 2 참조). 자유단에서 전단력 P가 가해졌을 때 면내 응력은 1차 함수로 나타나고, 횡방향 전단응력은 2차함수로 주어지며, 면외 수직 응력은 0이다.

외팔보 문제에서는 면내응력과 횡방향 전단응력이, 보의

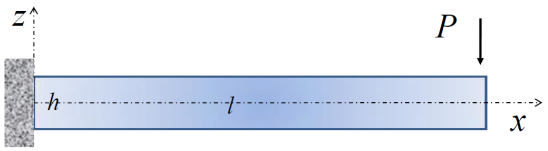

그림 2 Cantilever loaded at the end

평형 방정식으로부터 $v_{3,1111}=0$이 얻어지기 때문에, 식 (10)과 식 (6)에 의해서 정확하게 계산이 된다. 따라서 변위를 계산하여 탄성해와 비교하는 것으로 충분하다.

이 문제의 탄성해(Timoshenko 등, 1951)는 변위 경계조건을 기술하는 방식에 따라 바뀌게 되는데(Gregory 등, 1984), 본 연구에서는 참고문헌(Horgan 등, 1991)에서 제시한 두께 방향으로의 평균 회전각이 0이라는 조건을 부과하여 다시 계산하였다. 이 조건은 다음과 같이 주어진다.

$$\int_{-h/2}^{h/2} u_3^{\mathrm{TE}}(0,z)dz = \int_{-h/2}^{h/2} z u_1^{\mathrm{TE}}(0,z)dz = 0 \tag{24}$$

이 조건으로부터 티모센코의 탄성해는 다음과 같이 주어진다.

$$u_3^{\mathrm{TE}}(x,0) = v_3^{\mathrm{EB}}(x) + \frac{6}{5}\frac{Px}{GA} + \frac{\nu P(3x-5l)}{10EA} \tag{25}$$

여기서, A는 보의 단면적을 나타내고, ν는 포아송비이다.

3.1.1 고전 보이론의 해

고전 보이론의 처짐은 다음과 같이 얻어진다.

$$v_3^{\mathrm{EB}}(x) = \frac{Plx^2}{2EI} - \frac{Px^3}{6EI} \tag{26}$$

여기서, I는 보 단면의 관성모멘트이다. 고전 보이론의 해 식 (26)를 식 (14)에 대입하고, 평균변위 경계조건 식 (24)를 적용하면 고전 보이론의 개선된 해를 얻을 수 있다.

$$\tilde{u}_3^{\mathrm{EB}}(x) = v_3^{\mathrm{EB}}(x) + \frac{6}{5}\frac{Px}{GA} \tag{27}$$

식 (27)은 탄성해 식 (25)와 비교하여 단지 미세한 포아송 효과의 차이만 있다. 식 (25)의 마지막 항은 두께방향으로의 포아송 비 효과로 그 크기가 매우 작다. 또한 탄성해와 마찬가지로 잘 알려진 이방성 보(orthotropic beam)에 대한 전단수정계수 5/6을 포함하고 있다. 이 문제에 있어서는 $v_{3,1111}=0$이기 때문에 면내 응력에서 면외 섭동항의 영향이 없다. 따라서 횡방향 변위만을 개선할 수 있음을 알 수 있다. 그림 3에 식 (25)~(27)의 결과를 무차원화하여 도시하였다. 수치비교를 위하여 이방성 재질상수 및 보의 제원은 $E/G=25$, $\nu=0.25$, $l/h=4$으로 각각 가정하였다.

두 번째 예제인 분포하중 하의 단순지지 보에서는 면외 섭동항이 어떻게 면내 응력 개선에 기여하는지 보여 줄 것이다.

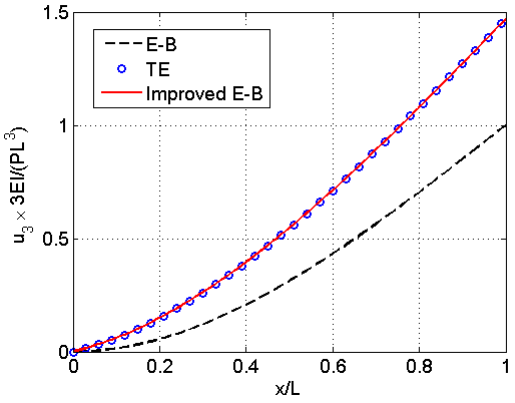

그림 3 Comparison of normalized deflections of the cantilever beam loaded at the end

3.1.2 일차전단변형이론의 해

일차전단변형이론의 해는 외팔보 문제에 대해서는 다음과 같이 얻어진다.

$$v_3^{\mathrm{RT}}(x) = v_3^{\mathrm{EB}}(x) + \frac{Px}{GA}$$
$$\theta(x) = \frac{P}{2EI}x(x-2l) \tag{28}$$

식 (28)을 식 (23)에 대입하고 경계조건 식 (24)를 적용하면, 일차전단변형이론의 개선된 해는 고전 보이론의 해와 정확하게 일치한다.

$$\tilde{u}_3^{\mathrm{RT}}(x) = v_3^{\mathrm{EB}}(x) + \frac{6}{5}\frac{Px}{GA} \tag{29}$$

여기서, 식 (28)에서는 없었던 전단수정계수 5/6이 개선된 후에는 나타나게 됨을 알 수 있다.

3.2 분포하중 하의 단순지지 보

이 절에서는 개선된 응력의 정확도를 확인하기 위하여 균일 분포하중을 받는 단순지지 보(그림 4)를 예제로 선택하였다. 이 문제에 대한 탄성해는 참고문헌(Timshenko 등, 1951; Barber, 1992)에 잘 기술되어 있다. 응력들은 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma_{11}^{\mathrm{TE}} = \frac{q}{2I}x(l-x)z + \frac{q}{I}\left(\frac{1}{3}z^3 - \frac{h^2}{20}z\right) \tag{30}$$

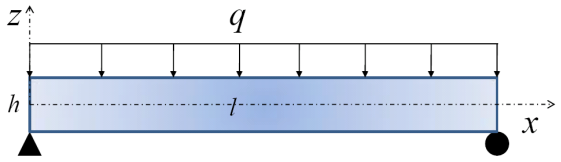

그림 4 Simply-supported beam under uniform pressure

$$\sigma_{13}^{\mathrm{TE}} = \frac{q}{4I}(2x-l)\left(z^2-\frac{h^2}{4}\right)$$
$$\sigma_{33}^{\mathrm{TE}} = \frac{q}{2}\left(1+\frac{3}{h}z-\frac{4}{h^3}z^3\right)$$

그리고 보 중앙에서의 처짐은 다음과 같이 계산된다.

$$u_3^{\mathrm{TE}}\left(\tfrac{l}{2},0\right) = \frac{5}{384}\left(\frac{ql^4}{EI}\right)+\frac{3}{20}\frac{ql^2}{GA} -\nu\frac{3}{320}\left(\frac{ql^4}{EI}\right)\left(\frac{h}{l}\right)^2 \tag{31}$$

3.2.1 고전 보이론의 해

고전 보이론의 횡방향 변위는 다음과 같이 계산된다.

$$v_3^{\mathrm{EB}}(x) = \frac{1}{24}\left(\frac{q}{EI}\right)x(x^3-2x^2l+l^3) \tag{32}$$

식 (14)에 식 (32)를 대입하고 변위 경계조건(즉, 양단에서 처짐은 영, 즉, $w_3(0)=w_3(l)=0$)을 적용하여야 한다. 잘 알려진 것과 같이 단순지지 경계조건은 생브낭의 원리가 그대로 적용되는 대표적인 예이다. 따라서 3.1절에서 기술한 외팔보 문제와 다르게 고전적인 경계조건이 그대로 적용될 수 있다(Fan 등, 1994). 결과적으로 횡방향 변위 섭동항을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$w_3^{\mathrm{EB}}(x) = -\frac{6}{5}\left(\frac{q}{2GA}\right)x(x-l) \tag{33}$$

중앙에서의 처짐은 다음과 같다.

$$\tilde{u}_3^{\mathrm{EB}}\left(\tfrac{l}{2}\right) = u_3^{\mathrm{TE}}\left(\tfrac{l}{2},0\right)+\nu\frac{3}{320}\left(\frac{ql^4}{EI}\right)\left(\frac{h}{l}\right)^2 \tag{34}$$

탄성해와 비교하여 개선된 해의 오차는 포아송비와 두께비(h/l)의 제곱에 비례함을 알 수 있고, 횡방향 수직응력에 의한 영향이다. 포아송비가 적을수록 그리고 두께비가 작을수록 오차는 감소한다. 식 (33)와 (34)에서 보여지듯이 고전적인 경계조건하에서도 섭동항은 일반적으로 0이 아님을 알 수 있다. 그림 5에 식 (31)~(34)의 결과를 무차원화 하여 도시하였다. 수치비교를 위하여 재질상수 및 보의 제원은 $E/G=25$, $\nu=0.25$, $l/h=4$으로 각각 가정하였다.

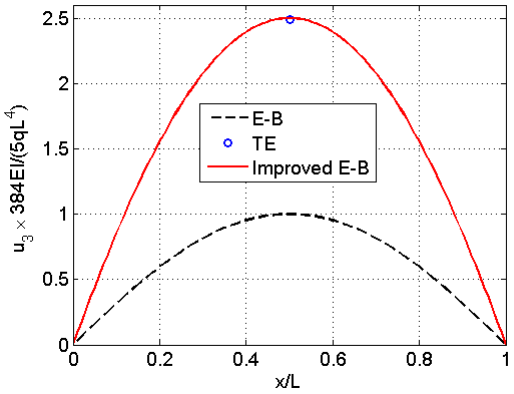

그림 5 Comparison of normalized deflections of the simply-supported beam under uniform pressure

횡방향 전단응력과 수직응력은 식 (30)에 주어진 탄성해와 일치하기 때문에 생략하였다. 개선된 면내 응력은 식 (32)와 식 (33)을 식 (10)에 대입하고 정리하면 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{11}^{\mathrm{EB}} &= \frac{q}{2I}x(x-l)z+\underline{\frac{q}{I}\left(\frac{E}{2G}\right)\left(\frac{h^2}{5}z\right)} \\ &\quad +\frac{q}{I}\left(\frac{E}{2G}\right)\left(\frac{1}{3}z^3-\frac{h^2}{4}z\right) \\ &= \frac{q}{2I}x(x-l)z \\ &\quad +\underline{\underline{\frac{q}{I}\left(\frac{E}{2G}\right)}}\left(\frac{1}{3}z^3-\frac{h^2}{20}z\right)\end{aligned} \tag{35}$$

여기서, 밑줄 친 식은 식 (14)에 의한 면내응력의 보정을 나타낸다. 밑줄을 두 번친 항은 등방성 재료인 경우$(1+\nu)$로 표시할 수 있고, 식 (30)의 탄성해와 비교하여 오차는 다음과 같다.

$$\sigma_{11}^{\mathrm{TE}}-\tilde{\sigma}_{11}^{\mathrm{EB}} = \nu\frac{q}{I}\left(\frac{1}{3}z^3-\frac{h^2}{20}z\right) \tag{36}$$

식 (36)에서 보여지는 것처럼 개선된 면내응력의 오차는 포아송비에 비례한다. 이 오차 또한 횡방향 수직응력에 의한 영향이고, 일반적으로 보의 길이가 긴 경우 영향이 매우 작

다. 포아송비가 0인 경우 탄성해와 정확하게 일치한다.

3.2.2 일차전단변형이론의 해

개선된 응력 및 변위는 고전 보이론의 개선된 값들과 같기 때문에 이 절에서는 개선되기 전의 횡방향 변위만 고찰하기로 한다. 일차전단변형이론에서의 횡방향 변위는 전단수정계수를 고려했을 때 다음과 같다.

$$v_3^{\mathrm{RT}}(x) = v_3^{\mathrm{EB}}(x) - \left(\frac{q}{2k_s GA}\right)x(x-l) \tag{37}$$

여기서, k_s는 전단수정계수이다. 식 (37)과 식 (33)를 비교해보면 전단수정계수가 5/6임을 알 수 있다.

개선된 면내응력을 평형방정식을 이용하여 계산할 경우에는 일차전단변형의 효용이 고전 보이론과 같음을 보여준다. 물론 적절한 전단수정계수를 알 수 있다면 처짐의 계산에서는 일차전단변형이론이 우위를 보이지만, 일반적으로 전단수정계수는 복합재료 보의 경우에 예측이 쉽지 않다. 또한 면내응력 및 횡방향 전단응력을 개선하기 위해서는 일차전단변형이론에서도 3차원 응력 평형방정식을 사용하는 것이 필수임을 감안하면, 고전 보이론과 비교하여 특별한 장점이 없다고 할 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 고전 보이론 및 일차전단변형이론의 해를 후처리함으로써 응력 및 변위를 개선할 수 있는 방법론을 제시하였다. 이 방법은 생브낭의 원리를 통하여 개선 전후의 면내 수직 응력으로 인한 축 합력과 모멘트 합력의 등가임을 보이고, 이를 이용하여 응력 및 변위를 개선하였다. 본론 및 수치예제를 통하여 얻은 결론들을 아래와 같이 정리할 수 있다.

- 생브낭의 원리를 이용하여 개선된 변위장에서의 섭동항들을 후처리만으로 구할 수 있었다. 횡방향 변위의 개선을 새로운 보의 지배방정식을 풀지 않고 구한 것은 주요한 결론 중의 하나이다.
- 고전 보이론과 일차전단변형이론의 개선된 해는 같은 결과를 보여준다.
- 고전 보이론에서의 횡방향 변위 섭동항은 일차 다항식의 형태로 보의 기하학적 경계조건으로부터 계산할 수 있는데 반해, 일단전단변형이론에서는 변수의 적분을 포함하므로 전자가 보다 효율적인 방법임을 알 수 있었다.
- 이방성 외팔보 및 단순지지보의 수치예제를 통해 본 논문에서 제안된 응력해석 개선기법이 탄성해와 비교하여 매우 정확한 결과를 얻을 수 있었다.
- 단순지지보에서의 오차는 횡방향 수직 응력에 의한 영향으로 횡방향 워핑함수[2]를 도입하면 해결될 수 있을 것으로 판단된다.
- 변위 경계조건이 문제되지 않는 단순지지보에서도 섭동항은 0이 아님을 알 수 있었다. 이는 우리가 고차이론을 통해 단순지지보의 처짐을 향상시킬 수 있다는 것과 일치한다.

본 논문에서 제안된 방법은 이방성 보, 판, 쉘 구조물뿐만 아니라 복합재료 구조물에도 적용할 수 있다. 두께방향으로의 비대칭(anti-symmetric)적층 복합재료 구조물의 경우에는 면내 변위 섭동항(w_1)이 중요한 역할을 하게 된다. 현재 제시된 방법을 일반적인 이방성(general anisotropic) 구조물 및 동역학 문제에 대하여 적용하는 방법을 연구 중에 있다.

감사의 글

본 연구는 금오공과대학교 학술연구비에 의하여 연구된 논문입니다.

참 고 문 헌

김준식, 조맹효 (2007) 개선된 일차전단변형이론을 이용한 복합재료 적층평판의 고정밀 해석, 한국전산구조공학회 논문집, 19(4), pp.406~418.

조맹효 (1994) 복합재료 적층판의 고차 이론의 검토, 대한기계학회지, (34)7, pp.517~526.

조맹효 (2002) 복합재료 적층 평판과 쉘의 전산해석 기법에 관한 소고, 한국전산구조공학회지, 15(1), pp.17~30.

Barber, J.R. (1992) *Elasticity*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Carrera, E. (2003) Historical Review of Zig-zag Theories for Multilayered Plates and Shells, *ASME: Applied Mechanics Review*, 56, pp.287~308.

Dym, C.L., Shames, I.H. (1973) *Solid Mechanics: A Variational Approach*, McGraw-Hill, New York.

Fan, H., Widera, G.E.O. (1994) On the Use of Variational Principles to Derive Beam Boundary Conditions, *ASME: Journal of Applied Mechanics*, 61(2), pp.470~471.

Gregory, R.D., Wan, F.Y.M. (1984) Decaying States

2) 일반적으로 보의 단면형상의 변화를 나타내는 함수를 의미한다. 잘 알려진 생브낭의 비틀림 워핑함수도 보 단면의 워핑함수들 중의 하나이다.

of Plane Strain in A Semi-infinite Strip and Boundary Conditions for Plate Theory, *Journal of Elasticity*, 14(1), pp.27~64.

Heijden, A., Koiter, W.T., Reissner, E., Levine, H.S. (1977) Discussion on Timoshenko Beam Theory is Not Always More Accurate Than Elementary Beam Theory, *ASME: Journal of Applied Mechanics*, 44(2), pp.357~359.

Horgan, C.O., Simmonds, J.G. (1991) Asymptotic Analysis of an End-Loaded, Transversely Isotropic, Elastic, Semi-Infinite Strip weak in Shear, *International Journal of Solids and Structures*, 27(15), pp.1895~1914.

Jones, R.M. (1975) *Mechanics of Composite Materials*, McGraw-Hill, Kogakusha,Tokyo.

Nicholson, J.W., Simmonds, J.G., (1977) Timoshenko Beam Theory is Not Always More Accurate Than Elementary Beam Theory, *ASME: Journal of Applied Mechanics*, 44(2), pp.337~338.

Oh, J., Cho, M., Kim, J.S., Grediac, M. (2008) A Finite Element Formulation Based On An Enhanced First Order Shear Deformation Theory for Composite and Sandwich Plates, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 22, pp.871~878.

Timoshenko, S.P., Goodier, J.N. (1951) *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, York.

Timoshenko, S.P., Woinowsky-Krieger, S. (1959) *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, Tokyo.

● 논문접수일 2010년 9월 2일
● 논문심사일 2010년 10월 4일
● 게재확정일 2010년 12월 16일