# 샤논(1948)을 넘어

이문호
전북대학교

## 요 약

본고에서는 아인슈타인(1905) 특수상대성이론과 샤논(1948)의 정보이론의 탄생배경 중심으로 유도하였고, 이 아름다운 두 식을 비교, 설명하였다. 4G 무선 이동통신의 주파수 스펙트럼 효율을 증가시키기 위해, MIMO를 쓰고 샤논 캐퍼시티에 접근하기 위해 새로운 채널코딩 기술을 쓰고 있다. 모두 샤논의 손바닥 안에 있다.

## I. 정보이론과 샤논

인간이 고안한 각종 정보의 표현방법을 보면 정보는 사물이 있는 그대로의 관계를 말하는데 우리가 정보를 전달하려면 무엇인가 공통적으로 이해될 수 있는 것으로 표현할 필요가 있다. 통상 우리가 이용하는 정보의 표현수단은 언어인데 정보통신공학 분야에서는 0과 1의 계열에 의한 표현이 널리 쓰이고 있다. 언어이든 0과 1의 계열이든 정보는 기호열로서 표현하게 되는데, 이런 의미에서 정보와 기호사이에는 깊은 관계가 있다. 한마디로 0은 여성의 심볼(- - : ♀)이고 1은 남성(- : ♂)의 심볼을 기호화한 것이 디지털 0과 1인 것이다.

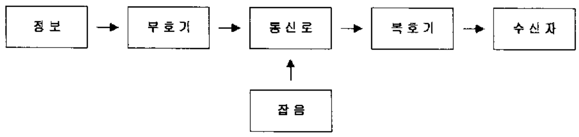
MIT교수 Norbert Wiener[1)](1894~1964)는 신경생리학, 기계공학, 전기공학, 사회학, 언어학 등의 분야에서 "같은 것에 각각 다른 이름이 붙어져 중요한 연구 성과를 정리하였고 "한 부문의 전문가이면서 동시에 인접부문에도 투철한 이해를 가진 연구자들 팀" 이 앞에서 설명한 "동물과 기계의 제어와 통신 분야를 연구할 필요가 있다" 고 주장하고 이 경계분야를 사이버네틱스(Cybernetics)라고 이름을 붙였다 [4,5].

대략 같은 시기에 Bell 전화연구소의Claude E. Shannon(샤논)은 통신공학분야에 있어서 정보의 부호화 문제를 해석한 결과 정보의 양이 수학적으로 명확하게 정의될 수 있으며, 그 단위로서 동시에 있을 수 있는 두 가지 중에서 하나를 1회 선택할 때 전달되는 정보량을 이용해야 한다는 것과 잡음이 있는 통신로에서 단위 시간당 에러(error)없이 전달할 수 있는 정보량에는 한계가 있다는 등의 중요한 결과를 알아냈다.

오늘날 정보이론은 이러한 샤논[2)]의 논문 "A Mathematical Theory of Communication" (1948)에서 시작된 것이다. (그림 1)은 샤논의 통신계의 모델을 나타낸 것이다. 샤논은 통신계를 이와 같이 모델화하여, 정보원에서 발생하는 정보는 기호열의 형태로 나타내어진다고 가정하고, 이 기호열이 송신기에서 어떻게 부호화되는가? 또, 통신로의 잡음으로 어떠한 영향을 받는가? 등을 검토하여 위의 여러 가지 결론을 얻었다 [1,2,3,6].

이처럼 거의 같은 시기에 위너 및 샤논이 독립적으로 정보량의 개념에 도달한 것을 우연한 사건이라고 말하기는 어려운 데가 있다. 그러나 이 두 사람의 관심은 처음에는 커다란 차이가 있었다. 위너는 제어계의 해석을 통하여 정보의 개념에 도달했으며 그에 반해 샤논은 통신계의 해석을 통해 같은 정보의 개념에 도달했던 것이다.

정보통신공학 분야에서도 그 이전에는 정보라는 것의 존재가 명료하게 인식되지는 못했고, 주로 통신공학의 목적은 파형의 충실한 전송에 있다고 보았다. 그러나 제2차 대전을




(그림 1) 샤논의 통신계 모델

경계로 하여 FM통신과 펄스통신의 급격한 발달로 통신공학의 목적은 파형의 충실한 전송은 물론이고, 보다 본질적인 과제는 파형에 의해 운반되고 있는 정보의 에러없는 전송이라는 것에 눈을 뜨게 되었다. 샤논이 정보량의 개념을 얻기에 이른 것은 이와 같은 배경에 연유한 것이었다.

위와 같이 정도의 차이는 있으나 위너와 샤논이 정보이론에 공헌한 것은 위대하며, 정보이론은 이 두 사람에 의해 확립되었다고 해도 좋다. 그러나 오늘날의 정보이론은 위너보다도 오히려 샤논의 영향을 더 강하게 받고 있다. 위너는 제어계의 해석을 통하여 마찬가지로 확실시되는 두 가지 사실 중에서 어느 하나를 선택할 때에 얻어지는 정보를 정보량의 단위로 해야 한다는데 눈을 떴지만, 그는 이와 같은 정보량의 문제보다도 구체적으로는 제어계 내에서의 잡음과 신호의 문제, 특히 예측과 필터(filtering)에 흥미를 가졌다. 그의 이름은 오늘날 그에 의해 확립된 예측과 필터의 이론으로 널리 알려져 있다.

이것에 대하여 샤논은 정보량 그 자체에 큰 관심을 가지고 그 성질을 명확히 하여 엔트로피(entropy), 애매도(ambiguity), 중복도(redundancy), 통신로 용량(channel capacity) 등 정보이론의 근간을 이루는 기본적 개념과 그 체제를 확립하였다.

샤논이 이와 같이 정보 그 자체를 추구하여 드디어 정보이론을 확립하는데 성공하게 된 배경에는 이 연구가 Bell 전화연구소에서 행해졌다는 사실을 간과할 수 없다. Bell 전화연구소는 통신기술을 주된 대상으로 하는 연구소로서 통신공학 분야에 있어 오랜 세월 동안의 성과의 축적이 있었다. 당시의 통신공학에서는 정보 그 자체의 존재가 명확히 인식되어 있지 않았고, 통신공학의 목적은 단지 파형의 충실한 전송에 있다고 보았다. 그러나 이 파형 그 자체는 정보의 하나의 표현수단인데 반해 정보에 대해 명확한 의식은 없었다고 하더라도 그때에 오늘날 정보라 불리는 것이 파형으로 오랜 세월에 걸쳐 취급되어 왔다.

본 논문에서는 2장에서는 아인슈타인 특수상대성 이론을, 3장에서는 샤논의 정보이론, 4장에서는 아인슈타인과 샤논의 이기종 융합 비교, 5장에서 결론을 맺는다.

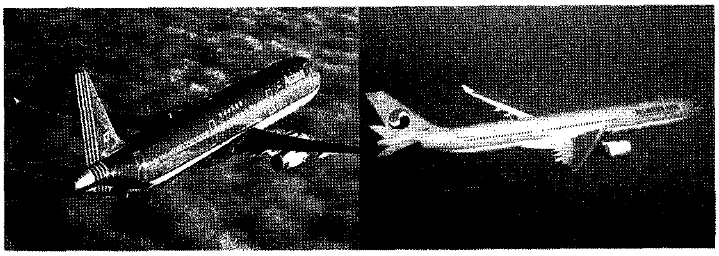
## II. 아인슈타인 특수 상대성 이론 : Motivation은 융합(Fusion)

세상에 상대적(Relative)이 아닌 것이 어디 있는가. 낮과 밤, 여자와 남자, 시간과 공간, 모두 상대적이다. 예를 들어 비행기 창 커튼을 닫고 스튜어디스가 갖다 주는 음료수를 마시면서 보면 비행기는 정지해 있다. 그러나 비행기 창 커튼을 열고 구름을 보면 비행기는 엄청난 속도로 날고 있음을 알 수 있다. 상대성 원리이다. 또한 지구는 멀미를 일으킬 만큼 빠른 속도로 회전하고 있지만, 우리는 지구가 정지된 것처럼 느끼고 있다. 지구 밖에서 지구를 바라볼 수만 있다면 지구가 돌아가는 것을 알 수 있다. 이 또한 상대성 원리이다.

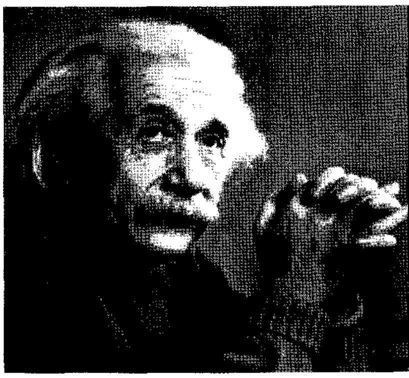
아인슈타인(Albert Einstein, 1879~1955)은 독일 남부 뷔르템베르크(Wurttemberg)의 울름(Ulm)에서, 유태계 독일인으로서 출생, 아버지는 전기공작소의 관리인으로, 부모가 모두 전혀 종교가 없는 유태인이었다. 그는 어릴 때에 부모를 따라 뮌헨(Munchen)으로 이사를 갔는데, 12세 까지는 깊은 종교심을 가졌었다. 4,5세 때에, 아버지가 준 컴퍼스(compass)를 가지고 노는 데서 경이를 느꼈다고 하며, 12세 때에는 유클리드 평면 기하학 책을 읽는 데서 두 번째 경이를 느꼈다고 한다. 12~16세에 미적분의 원리를 비롯하여 수학의 기초지식을 닦았고, 또한 이론물리학을 공부하였다. 뮌헨의 루이트폴트 고등학교를 졸업하기 직전에, 아버지의 사업실패로 이탈리아의 밀라노로 이사, 그는 이탈리아어를 못하여 스위스의 취리히(Zurich)의 공과대학(The Polytechnic Institute)을 택하였는데, 고등학교를 졸업하지 못하였기 때문에 검정시험을 쳤으나 불합격이 되었다. 그리하여 다시 고등학교에 편입하였다가, 다음 해 17세 때에 입학이 되어 수학과 물리학을 전공하였다.

대학시절에는후르비츠(Hurwitz),민코우스키(Minkowski) 같은 훌륭한 교수의 지도를 받았고, 집에서는 키르히호프(Kirchhoff), 헬름홀츠(Helmholtz), 헤르츠(Hertz), 맥스웰

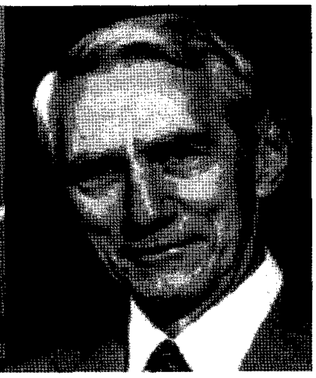
(a) 비행기 날개위



(b) 아시아나, KAL Air



(c) Einstein Albert(1879~1955) : 時卽是空 空卽是時 - 반야심경(般若心經).



(d) Claud Shannon(1916~2001) : 정보이론(情報理論) : 엔트로피

(그림 2) 비행기의 상대성 원리와 아인슈타인과 샤논

(Maxwell) 등의 저술을 탐독하였다. 21세에 대학을 졸업한 후, 스위스 시민권을 얻어 1902년에 베른(Berne)의 특허국에 기사로 취직이 되었다. 1903년에 대학동창이었던 유고슬라비아 태생인 수학자 밀레바 말렉과 결혼하여, 다음해에는 장남 알버트(현재 캘리포니아 대학 교수)를 낳았다. 수 년 후에 이혼하였는데, 차남 에드워드는 스위스 취리히(Zurich)에서 살고 있다. 그는 특허국에 근무하면서, 운동물체의 전기역학 · 광전효과 · 브라운운동에 대한 연구를 계속하였고, 또한 동년에 『분자(分子)의크기에대한신측정법』(Eineneue Bestinnung der Molekuldimensionen)이라는 논문이 취리히 대학에서 통과되어, 박사학위를 받았다. 1905년에 발표한 특수 상대성이론은 질량 m인 물체가 힘 F를 받고 그 방향으로 S 만큼 변위를 받았을 때에 물체의 운동에너지의 증가를 $\Delta E$ 라하면 다음과 같은 공식이 성립된다.

$$\Delta E = fds \qquad (2.1)$$

그런데, 운동량의 시간적 변화율이 힘이기 때문에 v를 속도라고 한다면, 다음과 같이 된다.

$$F = \frac{d}{dt}(mv) \text{ (Newton의 제 2 법칙)}$$

$$\therefore \ \Delta E = \int \frac{d(mv)}{dt} ds = \int \frac{ds}{dt} d(mv) = \int v d(mv) \qquad (2.2)$$

특수상대성이론에 의하면,

$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ 이기 때문에 다음과 같이 된다.

$$v = c\sqrt{1 - \frac{m_0^2}{m^2}} \qquad (2.3)$$

이것을 먼저 식에 넣으면, 다음과 같이, 질량과 에너지의 등가식이 성립된다.

$$\triangle E = \int c\sqrt{1-\frac{{m_0}^2}{m^2}}\, d\left(mc\sqrt{1-\frac{{m_0}^2}{m^2}}\right)$$

$$= c^2 \int \sqrt{1-\frac{{m_0}^2}{m^2}} \left\{ \sqrt{1-\frac{{m_0}^2}{m^2}} + \frac{{m_0}^2}{m^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{{m_0}^2}{m^2}}} \right\} dm$$

$$= c^2 \int dm \qquad (2.4)$$

따라서 $\triangle E = c^2 \Delta m$ (2.5)

(2.4)식 유도 :

$$d\left(cmc\sqrt{1-\frac{m_0^2}{m^2}}\right) \Leftrightarrow duv = u'v + uv'$$

$$= cd\left(\left[m'\bullet\sqrt{1-\frac{m_0^2}{m^2}}\right] + \left[m\bullet\left(\sqrt{1-\frac{m_0^2}{m^2}}\right)'\right]\right)$$

$$= cd\left(\sqrt{1-\frac{m_0^2}{m^2}} + \left(m\bullet\frac{1}{2}\left(1-\frac{m_0^2}{m^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\bullet m_0^2\bullet(-2)\bullet(m^{-3})\right)\right)$$

$$= cd\left(\sqrt{1-\frac{m_0^2}{m^2}} + \left(m\bullet m_0^2\bullet m^{-3}\bullet\left(1-\frac{m_0^2}{m^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\right)$$

$$= cd\left(\sqrt{1-\frac{m_0^2}{m^2}} + \left(\frac{m_0^2}{m^2}\bullet\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{m_0^2}{m^2}}}\right)\right)\right)$$

$$= cd\left(\sqrt{1-\frac{m_0^2}{m^2}} + \left(\frac{m_0^2}{m^2}\bullet\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{m_0^2}{m^2}}}\right)\right)\right)$$

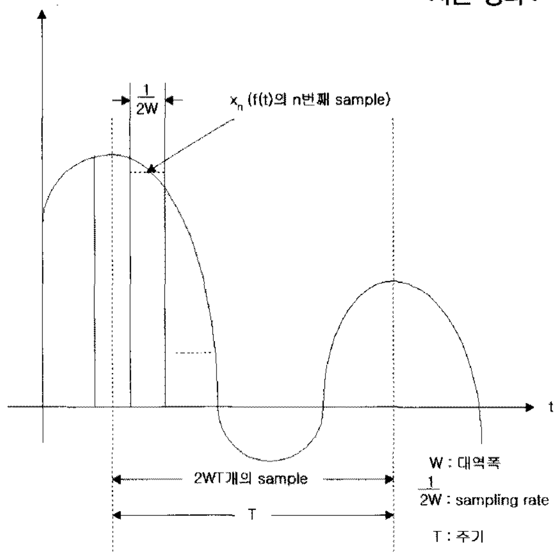
$$= c\left(\sqrt{1-\frac{m_0^2}{m^2}} + \frac{m_0^2}{m^2}\bullet\frac{1}{\sqrt{1-\frac{m_0^2}{m^2}}}\right)dm$$

이렇게 힘이 물체에 작용함으로써 생긴 운동에너지의 증가와 질량의 증가의 비는 언제나 $c^2$과 일치한다. 이 결론은 물질불멸의 법칙과 에너지 불멸의 법칙이 동일한 것이다. 한편, 우리 정신세계의 기(氣)를 상대성이론으로 표시할 수는 없을까?

## III. 샤논(1948)의 정보이론 : 열역학 Entropy와 확률의 융합

1948년 Claude E.Shannon은 정보에 확률개념을 도입하여 정보를 비트로 표현하고 계산된 정보량 및 정보 전달속도가 통신로 용량을 넘지 않는 범위 내에서는 오류에 장애됨이 없이 정보전달이 가능하다고 통신로 부호화정리를 제창하였다. 그러나 부호화와 복호에 관한 방법을 제시

**샤논 정리 :**




(그림 3) 연속파형의 sample

하지 않았다. 이 추상적인 정보이론을 토대로 발전된 부호이론은 통신사에 대혁명을 일으켰으며 이야말로 현대 디지털 데이터통신의 핵심이고 디지털 통신계와 컴퓨터 기억계의 신뢰성 향상에 지대한 공헌을 해왔다 해도 과언이 아니다.

채널 용량 개념의 중요성은 Shannon의 정보이론정리라 부르는 유명한 정리에서부터 유래되었는데 그 내용은 다음과 같다. $C$를 이산무기억 채널의 용량, $H$를 초당 $r$개의 신호들을 발생하는 이산정보원 엔트로피라 할 때, 만약 $rH \leq C$이면 전원의 출력은 채널상에서 임의의 작은 오차확률을 갖고 전송될 수 있는 코드화 방법(coding scheme)이 존재한다. 이 정리의 역은 $rH > C$이면 오차가 없이 메시지를 전송할 수 없다는 것을 설명한다. 또한 채널 정리는 잡음이 존재할 때 오차가 없이 전송할 수 있음을 나타내나 부호화 방법이 존재함을 설명하였을 뿐이고 그것들을 구성하는 방법을 제시하지는 못하였다.

Shannon으로부터 유래된 또 하나의 중요한 결과는 대역-제한된 백색 가우시안 잡음과 평균전력제안을 갖는 연속(continuous) 채널의 채널 용량을 정의한다.

유한 대역폭을 갖는 continuous signal을 전송하는 channel을 생각해 보자.

$\frac{1}{2W}\times$ (주기 $T$ 동안의 sample($x_n$)의 갯수) = $T$
∴ sample의 갯수 = $2WT$이다.

한편, 거리는 유클리드(Euclide)

- 1차원 : $d=\sqrt{x_1^2}$
- 2차원 : $d=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$
- 3차원 : $d=\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2}$
- n차원 : $d=\sqrt{\sum {x_n}^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2}$
- $2WT$차원 : $d=\sqrt{\sum_{k=1}^{2WT}{x_k}^2}$ ; 주기 $T$안에서의 sample을 생각해 볼때, sample(xn)은 2WT개 존재. 즉, 2WT개의 $X_n$이 존재한다.

또한

$$E=\frac{1}{2W}\sum {x_n}^2 \Rightarrow \sum {x_n}^2=2WE$$
$$d=\sqrt{\sum {x_n}^2} \Rightarrow d^2=\sum {x_n}^2=2WE=2WPT \tag{3.1}$$

$E$ : Sample당 에너지 $P$ : Sample당 전력

· 순수 signal의 2WT차원에서의 영역
⇒ radius = $\sqrt{2WPT}$
volume = $k(\sqrt{2WPT})^{2WT}$

· N 크기의 noise power를 갖는 Noise의 영역
⇒ radius = $\sqrt{2WTN}$
volume = $k(\sqrt{2WTN})^{2WT}$
⇒ 이것이 2WT개 존재

noise가 첨가된 signal의 영역
⇒ radius = $\sqrt{2WT(P+N)}$
volume = $k[\sqrt{2WT(P+N)}]^{2WT}$ (3.2)

▶ **channel capacity의 limit**

i) noise가 첨가된 $M$개의 sample을 고려하면 $M$개의 작은 구(sphere)들이 서로 겹치지 않기 때문에 큰 구는 작은 구의 최소한 $M$배 이상이 된다. 즉,

$$k[\sqrt{2WT(P+N)}]^{2WT} \geq Mk(\sqrt{2WTN})^{2WT} \tag{3.3}$$

$$M\leq\left(\sqrt{\frac{N+P}{N}}\right)^{2WT}=\left(1+\frac{P}{N}\right)^{TW} \tag{3.4}$$

양변에 log를 취하면 $\log M\leq TW\log\left(1+\frac{P}{N}\right)$
channel capacity의 upper limit

$$\frac{1}{T}\log M\leq W\log\left(1+\frac{P}{N}\right) \tag{3.5}$$

ii) $M$개의 구들은 각각 signal의 code 하나하나를 각각 나타낸다.
즉, 구 하나하나는 각 sample들($x_n$) 하나하나를 나타낸다.

code의 평균 error확률을 $Eav$라 하면

$$\frac{1}{T}\log M\leq W\log\left(1+\frac{P}{N}\right)+\frac{1}{T}\log E_{av} \tag{3.6}$$
(여기서, $E_{av}<1$, $\log E_{av}<0$)

(1) code의 선택에 있어서 error율은 평균 error율만큼 낮아야 한다.
(2) $T$가 충분히 크면 $\frac{1}{T}\log E_{av}$ 는 충분히 작게 된다.

⇒ 그러면 $\frac{1}{T}\log M\approx W\log\left(1+\frac{P}{N}\right)$

즉, $lub\left(\frac{1}{T}\log M\right)=W\log\left(1+\frac{P}{N}\right)$ (3.7)

수식에서, lub는 최소 가능값을 의미한다.

식(3.6)과 식(3.7)에서

$$\frac{1}{T}\log M=W\log\left(1+\frac{P}{N}\right) \tag{3.8}$$

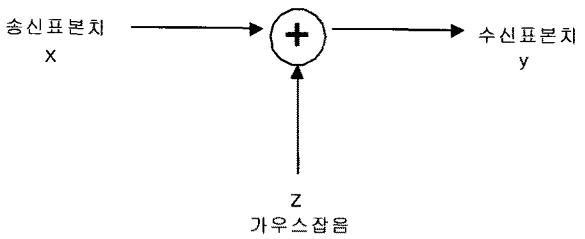
가 된다. 즉, Shannon의 channel capacity의 limit값이 다음과 같음을 알 수 있다.

$$C=W\log\left(1+\frac{P}{N}\right)^{3)} \tag{3.9}$$

▶ **가우시안 통신로에서 샤논정리 :**

아래 (그림 4)와 같은 가우스 통신로 $I(x\,;\,y)$를 구하면 (그림 4)에 표시한 것처럼 수신표본치 Y는 송신표본치 X와 잡음표본치 Z의 합이라 한다.

$$Y = X + Z$$




(그림 4) 가우스 잡음이 첨가된 통신로

여기서 잡음 표본치 $z$는 가우스 분포

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma z^2}}\, e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}} \tag{3.10}$$

로 주어지는 것으로 한다.

그리고 $x$와 $z$는 통계적 독립(Statstically independent)이어야 한다. 이와 같은 통신로는 가산성(加算性) 가우스 통신로(additive Gaussian channel)이다.

지금 x의 분포를 가우스 분포라면,

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x^2}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \tag{3.11}$$

로 하면 $y$의 분포도 가우스분포로 되어 그 분산 $\sigma^2_y$은

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_z^2 \tag{3.12}$$

로 주어진다. 이 때

$$\begin{aligned} H(y) &= \log_2\sqrt{2\pi e(\sigma_x^2+\sigma_z^2)} \\ H(y\,|\,x) &= H(z) \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$= \log_2\sqrt{2\pi e\sigma_z^2} \tag{3.14}$$

로 되어

$$\begin{aligned} I(x\,;\,y) &= \frac{1}{2}\log_2\frac{\sigma_x^2+\sigma_z^2}{\sigma_z^2} \\ C &= MAX\ I(X;Y) \\ &= \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{P+N}{N}\right) \end{aligned} \tag{3.15}$$

# Ⅳ. 아인슈타인의 특수상대성 원리와 샤논 정리 비교

2장의 아인슈타인의 특수상대성 원리와 3장의 샤논 정리 비교는 〈표 1〉과 같다.

〈표 1〉에서 보듯 아인슈타인 특수상대성원리와 샤논정리는 보는 관점만 다를 뿐 식 자체는 같다. 샤논과 아인슈타인 정리는 Perfect 하다. 세상 이치를 가장 간단하게 단순한 수식 하나로 묶은 것은 두 이론이 위대한 이유이다. 샤논은 저글링(juggling)을 즐겼다.

샤논 이론에 의하면, 샤논 Sphere(Shannon' s Palm) 내에서 놀기만 하면, 어떤 오류(error)가 있어도 되고 오류를 찾아 정정(correction) 할 수 있다. 오류를 찾고 수정하는 오류 정정 이론은 Hamming (1950), BCH(1959), Reed-Solomon(1960), LDPC(1962, MIT,Galleger), Viterbi(1967), Turbo(1993, Berrou et al), 그리고 Polar(2008, Erdal Arikan) 등이 있다. (그림 5)는 샤논 채널 용량과 채널코딩 관계를 보이고 있다.

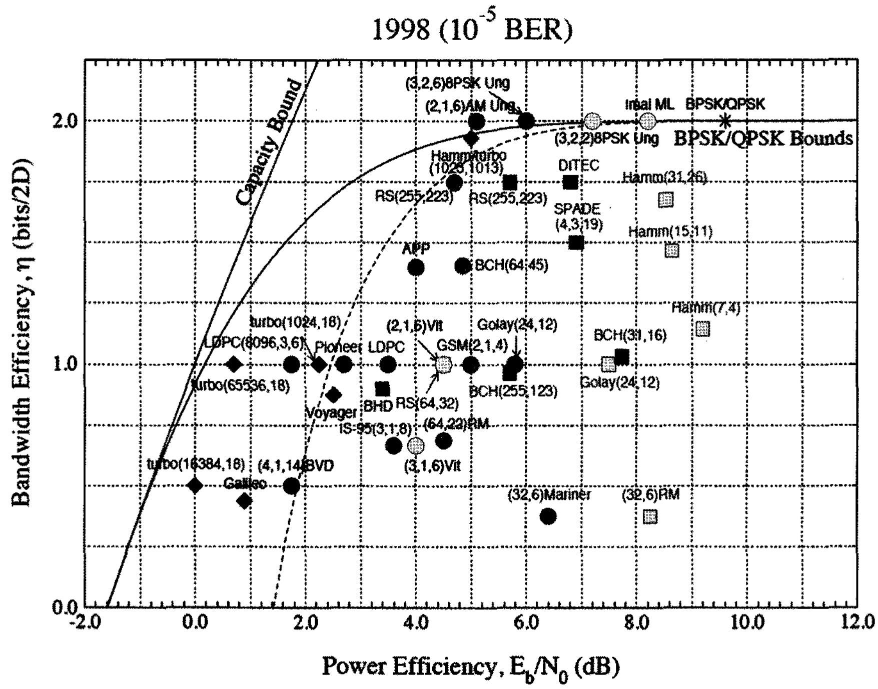
# Ⅴ. 결 론

일반적으로 무선통신에서, 주파수변조는 진폭변조(20 KHz)보다도 잡음에 대하여 강하지만 점유주파수대역폭은 주파수변조 쪽이 Carson 정리에 의하여 7배 더 크다. 즉, 무선 주파수 유효이용이란 점에서는 주파수 변조가 뒤떨어진다.

이와 같이 보다 좋은 통신계를 설계한다는 관점에서 보면 부

〈표 1〉 아인슈타인의 특수상대성 원리와 샤논정리

| | 아인슈타인(1905) | 샤논(1948) |
|---|---|---|
| 일반식 | $E=mc^2$ | $C=B\log_2(1+\frac{S}{N})$ |
| 공통점 | ① 이기종융합(Heterogenous Fusion) = 뉴튼역학(Newton Dynamics) + 맥스웰 파동방정식(Maxwell Wave Equation)<br>② 一定 = Energy<br>③ 질량과 광속도 Trade-off : 상대적(Relative) | ① 이기종융합(Heterogenous Fusion) = 열역학(Thermodynamics) + 확률(Probablity)<br>② 一定 = Channel Capacity<br>③ 대역폭과 $\frac{S}{N}$ Trade-off : 상대적(Relative) |
| 연구 배경 및 통합 이론 | ① Lavoisier(1743-1794,프랑스) : 질량보존의 법칙, "모든 화학 반응에서 반응 전후의 물질의 양은 일정하다."<br>② Faraday(1791-1867,영국) : 전자유도법칙, 전자유도(電磁誘導)에 의해 회로에 발생하는 기전력은 자속쇄교회수의 시간 감소 비율에 비례한다. 발전기 및 전동기 원리<br>③ Maxwell(1831-1879,영국) : 전자파 파동방정식,<br>$\nabla^2 E=\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}\frac{\delta^2 E}{\delta t^2}$, $\nabla^2 H=\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}\frac{\delta^2 H}{\delta t^2}$<br>$v=\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}[m/s]=3\times10^8[m/s]$<br>④ Newton(1643-1727,영국) : 뉴턴 역학 제2법칙, $F=ma$ | ① A.H. Reeves(1902-1972,영국) : 1937년, Pulse code modulation<br>② H. Nyquist(1889-1975,미국) : 표본화 정리<br>$T=\frac{1}{2f_m}$<br>③ J.R. Carson(1886-1940,미국) : 1922년, FM 대역 폭 $(2(m_f+1)w_m \simeq 2w_m)$과 잡음 관계<br>④ 샤논(1948) : Entropy 정의와 Euclidean distance, Fourier(1822) Transform, Markov(1856-1922, 러시아), Gauss(1777-1855, 독일) 분포<br>(*부록에 증명) |




(그림 5) 대역폭과 전력 효율, 샤논 채널 용량의 상호 비교

호기의 역할에 관해 보다 깊은 고찰이 필요하다. 그 결과 필연적으로 앞에서 지적한 정보이론의 두 가지 중심적 과제에 부딪히게 된다. 샤논의 가장 큰 공적은 극히 간략화한 통신계의 모델을 이용하여 이들 과제사이의 관계를 명확히 한데에 있다.

샤논은 주파수 대역폭과 신호와 잡음 사이 관계를, 아인슈타인은 질량과 광속도 사이 관계를 명쾌하게 한 식으로 묶어 놓았다. 이 얼마나 아름다운 식인가. 오늘날의 4G 무선이동통신도 샤논의 손바닥 안에 있다. 주파수 스펙트럼 효율을 높이기 위해 Relay-MIMO [7]와 인접 신호간 간섭등를 줄이기 위한 연구 등이 활발히 진행되고 있다.

세상을 파괴적으로 바뀔 기술은 기존 이론의 융복합 -아인슈타인의 특수 상대성원리와 샤논 정리- 으로 나가는 길과 전혀 새로운 아이디어 기술 개발이다. 과연, 샤논을 뛰어 넘을 새로운 이론은 나타날 것인가? 정보와 물질을 하나로 묶어 Trade-off 할 수는 없을까?

오늘, 2011년 9월 23일 CERN 이탈리아 연구팀이 아인슈타인 특수상대성이론을 뛰어넘는 빛 보다 빠른 중성미자를 발견했다고 하지않은가.

### 감사의 말씀

본 논문작성에 격려를 해주신 숭실대 김영한 교수님께 감사드립니다. 본 연구는 WCU R32-2010-000-20014-0와 FR 2010-0020942 NRF의 지원을 받았음.

## 주 석

1) 위너(Norbert Wiener : 1894~1964)

1894년 미국 미주리 주에서 하버드 대학 언어학자의 장남으로 출생했다. 철저한 영재 교육으로 3세 때 영어를 읽고 썼으며, 9세에 고등학교, 11세에 대학에 입학하여 수학, 생리학, 철학을 공부했다. 14세에 하버드대학 대학원 동물학과에 입학했으나 1년 후에 철학으로 전과, 수리 철학을 배워 18세에 박사 학위를 받았다. 영국에 건너가 러셀(Bertrand Russell)의 수제자로 물리학을 배웠으며 하디(Goodfrey H.Hardy)로부터는 수학을 배웠다. 1차 세계대전 직후 미국에 돌아왔으나, 이듬해 러셀을 찾아 다시 영국에 갔다. 그러나 전쟁이 격화되자 되돌아와 반년간 컬럼비아대학에서 지냈다. 모교인 하버드대학에서 1년간 철학과 조수로 근무한 다음 시골 대학에서 수학을 가르쳤다. 그 후 전기기사가 되었지만 부친의 권유로 백과사전 편집원이 되어 백과사전을 읽는 취미에 빠져 들었다. 1차 세계대전 말기에 그는 육군 탄도 연구소원이 되었고 대포의 사정표 작성에 종사했다. 전쟁이 끝난 후 신문기자도 해 보았으나 1919년 메사추세츠공과대학(MIT)의 수학 교수로 임명되었다. 여기서 자동 제어기계의 이론 전체를 통신의 영역에 포함시킬 수 있음을 보여 주었다. 1930년대 초부터 그는 신경생리학자 로젠부르트와 과학적방법에 대한 공동 연구를 하면서 신경계와 계산기계 및 제어기계 간의 유사성을 파고들어 통신공학이 통계적인 관점에서 다룰 때에만 의의가 있다는 것을 알게 되었다. 이러한 입장에서 2차 대전 중에는 자동 조준기, 레이더, 유도탄을 연구하고 통계적 통신 이론의 타당성을 입증했다. 특히 자동화는 고속도 계산기에 의한 지령 전달 기구임을 지적하고 그 전망을 노사(勞使)쌍방에 인식시켜 새로운 산업 혁명의 도래를 예고했다. 위너는 순수 수학 분야에서도 많은 업적을 남겼다. 한편, 위너는 푸리에(J.B.J Fourier)적분과 그 응용 연구에 심취했는데, 그는 머리를 식히거나 사색을 할 때 연구실 창문에서 바라다 보이는 찰스강을 무심코 바라보곤 했다. 어느날 우연히 연구실 창문에서 파도가 출렁거리며 다가왔다 가고, 또 출렁거리는 물결로 다가오는 것을 보았다. '바로 이것이구나!' 그는 직감적으로 출렁거리는 파도의 운동을 수학적으로 기술할 수 없을까? 생각했고, 이것이 바로 훗날 유명한 랜덤 프로세스(Random Process), 랜덤 워크(Random Walk)라는 학문의 기틀이 되었다.

2) 샤논(Claude E.Shannon, 1916~2001)

샤논은 1916년 미국 미시간주에서 출생하였다. 미시간대학 졸업 후 메사추세츠공과대학(MIT)대학원의 전기공학과에서 수학하고 1940년에 수학박사 학위를 받았다. 이 대학에는 위너 박사가 있었으므로 수학에서 위너로부터 강한 감화를 받았다. 1941년 국가 연구원이 되는 동시에 벨 전화 연구소에 복직해서 통신공학과 컴퓨터 연구에 몰두했다. 샤논의 위대한 발견은 1948년에 발표한 정보이론이다. 그런데 샤논은 노벨상은 받지 못했다.

3) Shannon, C.E., "A Mathematic Theory of Communication," Bell Syst. Tech. Journal., vol. 27, 1948, pp. 379-423, 623-657. Shannon 정리 : C=B log2(1+S/N) [bits/sec]

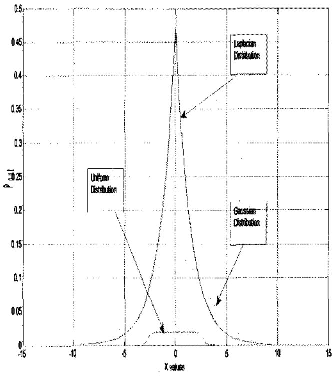
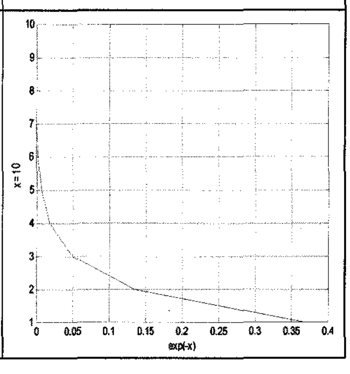
C : 채널 Capacity(골 능력/90분), B:Bandwith(골대), S:Signal(볼), N:Noise(골키퍼,상대편팀) Shannon은 1948년 “A Mathematical Theory of Communication” 이란 논문에서 그의 정리를 내놓았다. 마치 축구 골門을 모델링한 것처럼 확률 개념을 도입해 대역폭(골대)과 신호(축구공), 잡음(상대편) 관계를 식으로 표현한 것이 아닐까? 이 정리가 오늘날 이동통신(Mobile Communication), 인터넷 · TV를 비롯해 모든 정보 전달의 핵심 기술이 되고 있다. 1985년 교토상. 예수: 나는 門이다 (요한복음 10장, 7-9절)나 석가: 不二門 등 성인은 門 없는 門의 골門(Goal Gate)을 열었고, 샤논은 수학 측면에서 골門을, 빌 게이츠는 비즈니스 측면의 Window 골門을, 스티브잡스는 터치스크린으로 골門을 열었다.

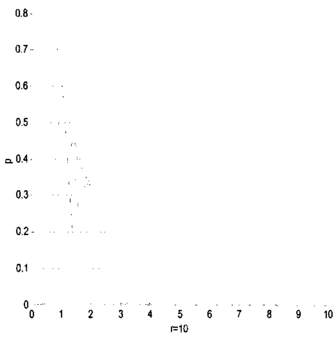
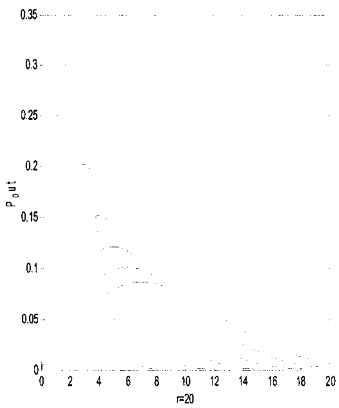
## 부 록　가우시안, 라플라스, 나카가미, 레일리 확률분포 유도

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \quad \text{where} \quad p(x) = A.\exp\left[-(\alpha x)^r\right] \;;\; \int_{-\infty}^{\infty} A.e^{-\alpha.x^r}dx = 2A\int_0^{\infty} e^{-\alpha.x^r}dx = 1$$

$$\text{Let} \quad (\alpha x)^r = t; dt/dx = r\alpha(\alpha x)^{r-1}; dx = dt / r\alpha(r\alpha)^{r-1} \;;\; \Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{n-1}dx = \frac{2A}{\alpha r}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{(\frac{1}{r}-1)}dt \qquad A = \frac{ar}{2}\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\sigma^2 = 2\int_0^{\infty} p(x)x^2dx = 2\frac{\alpha r}{2}\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\int_0^{\infty} e^{-(\alpha r)^r x^2 dx} = \frac{\alpha r}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}\frac{1}{r\alpha^3}\Gamma\left(\frac{3}{r}\right) = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{3}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}} \;;\; \therefore P(x) = \frac{r}{2\sigma}.\frac{\Gamma\left(\frac{3}{r}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}.\exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^r.\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}\right)^{\frac{r}{2}}\right]$$

| | | |
|---|---|---|
| Laplacian | If $r=1$ for Laplacian distribution: $$p(x) = \frac{1}{2\sigma}.\frac{\Gamma\left(\frac{3}{1}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{1}\right)^{\frac{3}{2}}}.\exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^1.\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{r}{\sqrt{2}\sigma}.e^{[-\sqrt{2}.\frac{x}{\sigma}]}$$ |  |
| Gaussian | If r=2 for Gaussian distribution: $$p(x) = \frac{2}{2\sigma}.\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}.\exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2.\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{\frac{2}{2}}\right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{-(\frac{x}{\sigma})^2.\frac{1}{2}}$$ | |
| Uniform | If $r=\infty$ for Uniform distribution; $$p(x) = \frac{\infty}{2\sigma}.\frac{\Gamma\left(\frac{3}{\infty}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{\infty}\right)^{\frac{3}{2}}}.\exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\infty}.\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{\infty}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\infty}\right)}\right)^{\frac{\infty}{2}}\right] \Leftarrow \Gamma\left(\frac{3}{\infty}\right)^{\frac{1}{2}} = 1; \Gamma\left(\frac{1}{\infty}\right)^{\frac{3}{2}} = 1 \Rightarrow p(x) = \frac{1}{a-b}(b \le x \le a)$$ | |
| Gamma | $$p(x) = \frac{[n(n+1)]^{\frac{n}{2}}}{2\sigma\Gamma(n)}.e^{\left[-\frac{x}{\sigma}[n(n+1)]^{\frac{1}{2}}\right]}.\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{n-1} \quad \text{Where,}$$ $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$ or $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{n-1}dx$ if n=1,2,3….(n-1) <br> $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 \Rightarrow \Gamma(3) = 2!; \Rightarrow \Gamma(4) = 3!.........\Gamma(n) = (n-1)!$ |  |

| | | |
|---|---|---|
| Nakagami | $p(x)=A.x^{2m-1}\exp\left[-\left(\alpha x^2\right)\right]$ $\quad \alpha x^2=t\Rightarrow x=\sqrt{\frac{t}{\alpha}}\Rightarrow 2\alpha x=\frac{dt}{dx}\Rightarrow dx=\frac{dt}{2\alpha x}$<br>$2A\int_0^\infty\left(\sqrt{\frac{t}{\alpha}}\right)^{2m-1}.e^{-t}.\frac{1}{2\sqrt{\alpha t}}dt=\frac{2A}{\sqrt{\alpha}^{2m-1}.2\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty\sqrt{t}^{2m-1}.e^{-t}.\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\frac{A}{\alpha^m}\int_0^\infty t^{m-1}.e^{-t}dt=\frac{A}{\alpha^m}\Gamma(m)=1\Rightarrow A=\frac{\alpha^m}{\Gamma(m)}$<br>$\sigma^2=2\int_0^\infty p(x).x^2dx=2.\frac{\alpha^m}{\Gamma(m)}\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}.x^{2m-1}dx=\frac{m}{\alpha}\Rightarrow\alpha=\frac{m}{\sigma^2}=\frac{m}{\Omega}\Rightarrow p_R(r)=\frac{1}{\Gamma(m)}.\left(\frac{m}{\Omega}\right)^m.r^{2m-1}.e^{-m\frac{r^2}{\Omega}}$ | <br> |
| Rayleigh | $\left.\begin{array}{l} p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2\frac{1}{2}\right]....(1) \\ p(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\left(\frac{y}{\sigma}\right)^2\frac{1}{2}\right]....(2)\end{array}\right\}$<br>$\Rightarrow p_{xy}(xy)=p_x(x)p_y(y)=\frac{1}{2\sigma^2\pi}\exp\left[-\left(\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)\right]$ ; **Let** $r=\sqrt{x^2+y^2}$<br>$=\frac{1}{2\sigma^2\pi}\exp\left[-\left(\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)\right]rdrd\theta\Rightarrow\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}p_{r_\theta}(r,\theta)drd\theta\Rightarrow p_{r_\theta}(r,\theta)=\frac{1}{2\sigma^2\pi}\exp\left[-\left(\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)\right]$<br>$p_r(r)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{r_\theta}(r,\theta)d\theta=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\sigma^2\pi}\exp\left[-\left(\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)\right]d\theta$<br>$p_r(r)=\frac{r}{\sigma^2}\exp\left[-\left(\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\right];if(r\geq 0)$ $\quad$ *and* $\quad p_\theta(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi};if(0<\theta<2\pi)\\ 0,otherwise\end{cases}$ | <br> |


## 참고문헌

[1] R. G. Gallager, "Claud E. Shannon : ARetrospective on His Life, Work, and Impact," IEEE Trans, on IT Vol.47, No.7, Nov. 2001.

[2] W. Gappmair, "Claude E. Shannon : The 50th Anniversary of Information Theory" IEEE Communication Magazine, April 1999.

[3] C. E. Shannon, "A Mathematical Theory of Communication" Bell System Tech. Journal Vol.27, 1948.

[4] 이문호, 골 문 III, 신아출판사, 2010.

[5] 이문호, 실용정보이론, 복두출판사, 2009.

[6] Thomas M. Cover, Joy. A. Thomas, Elements of Information Theory, Willey, 1991.

[7] Z. Li, X.-G. Xia and M. H. Lee, " A Simple Orthogonal Space-Time Coding Scheme for Asynchronous Cooperative Systems for Frequency Selective Fading Channels" , IEEE Trans. Commun, vol.58, No.8, pp.2219-2224, Aug. 2010.



## 약 력

이 문 호

1983년 전기통신기술사
1984년 전남대 전기공학과 공학박사
1985년 ~ 1986년 University of Minnesota Post Doc.
1990년 동경대학 정보통신 공학박사
1970년 ~ 1980년 남양 MBC 송신소장
1980년 ~ 2010년 전북대학교 전자정보공학부 교수
2010년 ~ 현재 전북대 WCU-II 연구책임 교수
관심분야 : 정보통신의 원형, 뿌리찾는 연구