

# KOSPI지수와 원-달러 환율의 변동성의 비대칭성에 대한 실증연구

맹혜영<sup>1</sup> · 신동완<sup>2</sup>

<sup>1</sup>이화여자대학교 통계학과, <sup>2</sup>이화여자대학교 통계학과

(2011년 9월 접수, 2011년 10월 채택)

---

## 요약

본 논문에서는 KOSPI지수와 원-달러 환율의 로그수익률을 사용하여 비대칭 이분산성에 대해 연구한다. 커널 density plot과 상승기와 하강기의 평균, 분산을 검토하여 이들 시계열의 변동의 비대칭성에 대한 윤곽을 파악하고 GARCH군의 여러 비대칭 모델을 적합하여 비대칭성을 실증적으로 파악한다. 또한 최종선택 모형인 EGARCH 모형을 바탕으로 부트스트래핑을 사용하여 미래 시점의 변동성인 조건부 분산의 기대치를 예측하고 예측표준오차를 구해본다.

주요어: 비대칭 이분산성(Asymmetric Volatility), Garch Models, Kernel density plot, Bootstrap.

---

## 1. 서론

2007년에 시작된 미국 발 금융위기의 영향으로 국제금융시장이 연쇄적인 어려움을 겪은 후 금융 시계열의 예측에 대한 연구가 활발하게 이루어지고 있다. 특히 현대사회에서의 금융시계열 예측은 값 자체보다는 변동성의 예측에 더욱 초점을 맞추고 있으며 최근의 미국 발 금융위기는 금융 시계열의 변동성의 정확한 예측이 가지는 중요한 의미를 다시 한 번 일깨워 주었다. 따라서 본 논문에서는 우리나라 금융 시장에서 가장 대표적 금융 시계열로 KOSPI지수와 원-달러 환율의 변동성을 연구하고자 한다. 우리나라 금융시계열이 금융 위기의 영향을 크게 받기 시작한 2008년부터 2010년 7월까지로 자료를 한정하였다. 전 세계적 금융 위기라는 시기적 특이성을 고려하여 연구의 최신성을 확보하였으며 금융 위기 이후로 주식시장이 또 다시 불안해지고 있는 요즘, 변동성을 설명하는 모형과 실증 분석을 통해 금융 시계열의 변동성 예측 가능성을 시사하였다.

시계열 예측에 사용되는 전통적인 방법인 Box와 Jenkins (1970)의 ARIMA 방법론은 모든 예측치의 분산을 동일하게 가정하기 때문에 주가지수, 환율 등 금융시계열에서 특징적으로 나타나는 변동의 조건부 이분산성을 표현할 수가 없다. 따라서 이러한 문제점을 극복하기 위한 많은 연구들이 이루어졌다. Engle (1982)이 오차의 이분산성을 고려한 최초의 모형인 ARCH 모형을, Bollerslev (1986)이 그것을 개선한 GARCH 모형을 제안하였다. 또한 Chen 등 (2011)은 GARCH 모형에서의 오차분산 예측의 효율을 높이기 위한 부트스트래핑 방법을 제안하였다.

---

이 논문은 교육과학기술부 연구재단(기본연구자 지원 사업, 과제번호 KRF-2009-0070618)의 지원을 받아 수행되었음.

<sup>2</sup>교신저자: (120-750) 서울특별시 서대문구 대현동 11-1, 이화여자대학교 통계학과, 교수.

E-mail: shindw@ewha.ac.kr

Black (1976)과 Christie (1982)는 동일한 정도의 호재와 악재에 따른 분산의 변화가 비대칭적인 것을 발견하였으며 이에 따라 충격의 양(+)/음(-)의 부호에 따른 비대칭 이분산성의 효과를 감안한 다양한 모형들이 소개되었다. Nelson (1991)의 EGARCH 모형, Zakoian (1994)의 TGARCH 모형, Higgins와 Bera (1992)의 NARCH 모형이 소개되었으며 Ding 등 (1993)의 APARCH 모형, Engle과 Ng (1993)의 NAGARCH 모형, Glosten 등 (1993)의 GJR-GARCH 모형 등이 제안되었다.

이러한 모형을 바탕으로 한 금융시계열에 대한 실증 연구는 매우 다양하다. 특별히 최근에는 금융위기의 영향으로 변동성의 예측이 중요한 과제로 떠오르면서 비대칭 이분산성을 가진 금융 시계열에 대한 연구가 국내외에서 더욱 활발하게 이루어지고 있다. Bekaert와 Wu (2000)는 금융시계열의 비대칭 이분산성이 시장에서의 risk와 어떻게 연관되는지를 연구하였고 Wu (2001)는 비대칭 이분산성의 주요 원인으로 레버리지 효과와 volatility feedback을 꼽았다. 최근에 이루어진 연구로는 Kumar과 Dhankar (2010)가 비대칭 이분산 모형과 EDA를 통해 S&P 500 과 NASDAQ 100 계열이 가지는 비정규성, 특히 비대칭성을 분석하였고, Henry 등 (2010)은 시장에서의 이분산성의 비대칭적 효과가 장기, 단기일 때 어떻게 다른가를 분석하였다. 국내에서는 성범용과 김기석 (2000)이 뉴스충격이 원-달러 일일환율의 변동성에 미치는 영향을 분석하였다. 또한 박주연과 여인권 (2009)은 변환-떡변환 방법을 사용하여 비대칭성을 가진 KOSPI와 KOSDAQ 수익률의 예측을 연구하였으며 김세완 (2009)은 경기변동에 따른 비대칭 변동성의 변화를 분석하였다. 본 논문에서는 우리나라 대표 금융시계열인 KOSPI지수와 원-달러 환율에 대해 금융위기 이후의 시계열 자료를 바탕으로 비정규성과 비대칭성을 실증적인 측면에서 연구하고 이를 이용하여 미래의 변동성 예측을 시도한다.

2절에서는 대표적인 비대칭 이분산 모형과 자료를 설명하고 3절에서는 KOSPI지수, 원-달러 환율에 최근 EDA기법을 통해 비대칭성 예비 확인 작업을 거친 후 2절에서 소개한 모형에 적합 시켜 보았다. 이후 그 응용으로서 가장 좋은 적합도를 가지는 EGARCH 모형을 바탕으로 실제 비대칭의 크기를 수치화 하였으며 부트스트래핑을 사용하여 미래 변동성을 예측하였다.

## 2. 비대칭 이분산성 모형과 자료설명

### 2.1. 비대칭 이분산성 모형

우리가 실제 분석에 고려하는 모형은 대표적인 비대칭성 모형인 EGARCH, GJR-GARCH, APARCH 세 가지이며 모든 모형에서 관측계열이  $r_t = \mu + a_t$ ,  $a_t = \sigma_t \epsilon_t$ 로 표현되고  $\epsilon_t$ 는  $iid(0, \sigma_\epsilon^2)$  확률변수이며  $\mu$ 는 미지의 모수이다.

EGARCH 모형은 Nelson (1991)이 고안했으며 기존 GARCH 모형에 비대칭 효과를 반영하도록 한 것이다. EGARCH( $p, q$ ) 모형은 다음과 같이 표현된다.

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j g(\epsilon_{t-j}) + \sum_{i=1}^p \beta_i \ln(\sigma_{t-i}^2),$$

$$g(\epsilon_t) = \theta \epsilon_t + \gamma [|\epsilon_t| - E(|\epsilon_t|)].$$

분산 모형에 로그 변환을 했으므로  $\alpha_0, \alpha_j, \beta_i$  계수 값이 양수라는 조건이 불필요하며 이를 통해 이전 시점 오차의 양(+)/음(-)의 부호에 따른 비대칭 이분산성 효과를 나타낸다.

GJR-GARCH 모형은 Glosten 등 (1993)에 의해 제안되었으며 분산식은 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p (\alpha_i a_{t-i}^2 + \gamma_i S_{t-i}^- a_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad S_t^- = \begin{cases} 1, & a_t < 0, \\ 0, & a_t \geq 0. \end{cases}$$

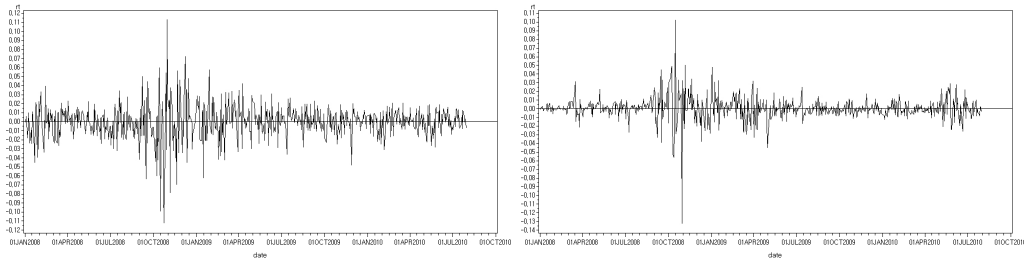


그림 2.1. KOSPI 일별 로그수익률( $r_{1t}$ )과 원-달러 환율의 일별 로그수익률( $r_{2t}$ )

$S_t^-$ 를 통해 오차가 음의 값을 가질 때 더 큰 변동성을 가지는 비대칭성을 설명 할 수 있다. GJR-GARCH 모형은 EGARCH 모형과 다르게 조건부 분산  $\sigma_t^2$  값이 항상 양수가 되어야 하므로 모수  $\alpha_0, \alpha_i, \beta_j$ 가 항상 0보다 커야 한다는 제약이 있다.

APARCH(Asymmetric Power ARCH) 모형은 Ding 등 (1993)에 의해 제시된 것으로 모형의 분산식은 다음과 같다.

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|a_{t-i}| - \gamma_i a_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^\delta.$$

APARCH 모형은 분리된 이분산 모수인  $\delta$ 를 사용하여 비대칭성을 나타내는 모수의 지수가 변화되게 만들어 폭 넓은 형태의 비대칭 이분산성 모형을 제안하였다.

## 2.2. 자료 설명

본 논문에서 사용된 자료는 2008년 1월 2일부터 2010년 7월 30일까지 총 645개의 일별 KOSPI지수와 원-달러 환율 자료를 로그 차분하여 얻은 수익률이다. 이들 계열을 본 논문에서는 각각  $r_{1t}, r_{2t}$ 로 표시한다.

그림 2.1의 KOSPI와 원-달러 환율의 일별 로그수익률( $r_{1t}, r_{2t}$ )의 특성을 살펴보면 0을 중심으로 변동하며 분산은 일정하지 않은 volatility clustering 현상을 보여 이분산성을 고려한 모형이 필요함을 알 수 있다. 변동 폭이 큰 부분은 미국 발 금융 위기의 충격이 우리나라 시장에 급격하게 반영된 2008년 9월부터 2009년 3월까지이며 이후에는 변동이 KOSPI의 경우 점차 줄어들고 원-달러 환율의 경우는 2009년 3월 이후에 변동이 줄어들다가 자료의 마지막 몇 개월은 다시 불안정한 양상을 보인다.

## 3. 실증 분석

### 3.1. KOSPI지수 일별 로그수익률( $r_{1t}$ )의 비대칭성

#### 커널 density plot

본 분석에서는 Hwang과 Shin (2010)에서와 같이 커널 density plot과 mode를 통해 KOSPI지수와 원-달러 환율의 일별 로그수익률의 분포가 가지는 비정규성, 특히 비대칭성을 살펴보고자 한다.

먼저 KOSPI 일별 로그수익률( $r_{1t}$ )에 대해 기초통계량  $n = 645, \bar{x} = -0.00008081, \hat{\sigma}_x = 0.01880644$ 를 계산하였다. 그림 3.1의 normal density plot은  $N(\bar{x}, \hat{\sigma}_x^2)$ 의 density plot이다. 커널 density plot은 비모수적 추정함수  $\hat{f}_n(x) = 1/(nh) \sum_{i=1}^n K((x - r_{1t})/h)$ 이고 커널함수  $K(x)$ 로서는 Gaussian을 사용하

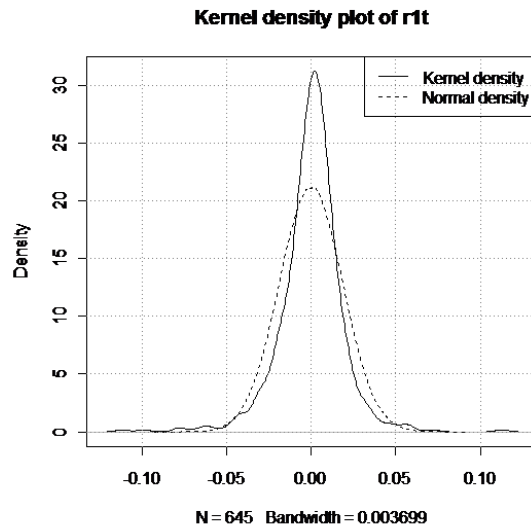


그림 3.1. KOSPI 일별 로그수익률의 커널 density plot과 Normal density plot

표 3.1. 상승기와 하강기의 KOSPI 일별 로그수익률( $r_{1t}$ )의 평균과 분산

	상승기( $r_{1t} > 0$ )	하강기( $r_{1t} < 0$ )
$n$	343	302
$r_{1t}$ 의 평균	0.01189344	-0.01368072
$r_{1t}$ 의 분산	0.00015235	0.00023464

였으며 bandwidth  $\hat{h} = 0.003699$ 는 Scott (1992)가 고안한 것을 사용하여 얻었다. bandwidth는 총 4가지 즉 Silverman (1986)이 제안한 rule-of-thumb방법을 사용한 방법, Scott (1992)가 고안한 방법, cross-validation을 사용한 방법, Sheather과 Jones (1991)가 고안한 방법을 시도해보았고 그 중 가장 smoothing이 크게 일어난, 즉  $\hat{h}$ 값이 큰 Scott (1992)가 고안한 방법을 적용하였다. Smoothing이 크게 일어난 bandwidth를 택한 이유는 Hwang과 Shin (2010)에 따라 그 경우에 mode가 더 뚜렷해지기 때문이다. 그림에서 실선 커널 density plot이 점선 normal density plot보다 더 뾰족한 peak와 두꺼운 꼬리를 가지는 이유는 그림 2.1에서 확인한 volatility clustering 때문이다. 즉 과거의 변동이 큰 경우 현재의 변동으로 이어져 극단적인 변동 값이 정규분포에서보다 더 많이 존재하게 된다. 커널 density plot은 peak가 0에서 양의 방향으로 많이 벗어나 있어서 정규 분포를 가정했을 때와 다른 mode를 가지며 이를 통해  $r_{1t}$ 의 실제 분포가 비정규성, 특별히 비대칭성을 가지는 것을 시각적으로 확인할 수 있다.

#### 상승기와 하강기의 평균과 분산 비교

KOSPI 일별 로그수익률( $r_{1t}$ )의 값이 양인 상승기와 음인 하강기에서  $r_{1t}$ 의 평균과 분산을 비교해봄으로써  $r_{1t}$ 분포가 가지는 비대칭적 특징을 파악한다.

상승기가 하강기보다 40개 정도 더 많은 것은 그림 3.1에서 커널 density plot의 mode가 0에서 오른쪽으로 많이 벗어나 커널 density plot이 비대칭적인 것을 설명해준다. 상승기 평균의 절대 값이 하강기 때 값보다 조금 더 큰 값을 가지는데 이는 상승은 완만하게 일어나며 하강은 상대적으로 급하게 일어나는 것을 뜻하며 그림 3.1에서 커널 density plot의 왼쪽이 더 두터운 꼬리를 가지는 비대칭성과 일맥상통한다. 따라서 KOSPI지수는 그 값이 상승할 때보다 하강할 때 더 큰 폭으로 변동하는 비대칭성을 가

표 3.2. KOSPI 일별 로그수익률( $r_{1t}$ )계열에 적합한 비대칭 이분산성 모형들의 AIC비교

GARCH Model		
AR(0)-GARCH(1, 1)		-3542.4
AR(0)-GARCH(1, 1), no intercept		-3543.6
AR(0)-GARCH(2, 1), no intercept		-3544.1
AR(0)-GARCH(1, 2), no intercept		-3545.8
AR(0)-GARCH(1, (2)), no intercept		-3547.7

EGARCH Model		GJR-GARCH Model		APARCH Model	
AR(0)-EGARCH(1, 1)	-3572.0	AR(0)-GJR-GAR(1, 1)	-3565.5	AR(0)-APARCH(1, 1)	-3378.7
AR(0)-EGARCH(1, 1), no intercept	-3574.1	AR(0)-GJR-GAR(1, 1), no intercept	-3567.4	AR(0)-APARCH(1, 1), no intercept	-3386.4
AR(0)-EGARCH(1, 2), no intercept	-3573.2	AR(0)-GJR-GAR(1, 2), no intercept	-3565.3	AR(0)-APARCH(1, 2), no intercept	-3252.8

집을 알 수 있다.

#### 평균 부분에 대한 ARIMA 모델링

KOSPI 일별 로그수익률( $r_{1t}$ )에 대해 표본 ACF와 PACF를 시차 30까지 그려본 결과 표본 ACF와 PACF 모두 시차 22, 26, 27의 경우를 제외한 다른 시차에서는 모두 2배의 표준 오차 밴드 내에 존재했다. 따라서 유의 수준 5%기준으로  $r_{1t}$ 이 계열 상관이 존재하지 않는 백색잡음계열이라는 귀무가설을 기각하기 힘들다. 또한 포트맨토검정을 실시한 결과 시차 6, 12, 18, 24에서  $p$ -값이 모두 0.05보다 큰 값을 가졌으므로  $r_{1t}$ 는 백색잡음계열이라고 생각해도 무방하다.

#### 비대칭 이분산성 모형의 적합

KOSPI 일별 로그수익률( $r_{1t}$ )에 대해 적절한 이분산성 GARCH 모형을 적합하기 위해 AIC 모형선택 기준을 고려하였다. 세 가지 모델 EGARCH, GJR-GARCH, APARCH에 대해 다양한 차수의 모형을 적합하여 얻은 AIC값이 표 3.2에 나타나있다. AIC는  $AIC = -2\ln(L) + 2k$ 의 정의에 의해 구해졌으며  $L$ 은 로그 likelihood 함수를 최대로 하는 값이고  $k$ 는 모형에 사용된 모수의 개수이다. 여기서 평균부분은 이전 단계에서 검토한 결과 백색잡음으로 선택하였기 때문에 모두 AR(0)이다.

표 3.2를 보면 EGARCH 모형과 GJR-GARCH 모형은 동일한 차수를 적용한 모형일 경우 일반 GARCH 모형보다 더 작은 AIC를 가진다. 그러나 APARCH 모형의 경우 동일한 차수를 사용한 모형에서 모두 일반 GARCH 모형보다 큰 AIC를 가지며 따라서  $r_{1t}$ 의 모형 적합성이 GARCH 모형에 비해 떨어진다. 세 가지 비대칭성 이분산 모형 중 AIC를 기준으로 APARCH 모형 보다는 EGARCH 모형과 GJR-GARCH 모형이 적합하다. 특별히 같은 차수의 모형을 기준으로 비교했을 때, 모든 모형에서 EGARCH 모형이 GJR-GARCH 모형보다 더 작은 AIC를 가지고 있어 더 높은 예측력을 가진다. 따라서 AIC가 가장 작은 아래의 AR(0)-EGARCH(1, 1) 모형(no intercept term)을 최종 모형으로 선택하며 적합 후 추정된 계수와 각 표준오차는 표 3.3에 나타나있다.

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 g(\epsilon_{t-1}) + \beta_1 \ln(\sigma_{t-1}^2), \quad (3.1)$$

$$g(\epsilon_t) = \theta \epsilon_t + \gamma[|\epsilon_t| - E(|\epsilon_t|)] \quad (3.2)$$

식 (3.2)에서  $\epsilon_t$ 의 부호가 양(+)일 경우  $g(\epsilon_t)$ 는 계수  $\theta + 1$ 의  $\epsilon_t$ 의 선형결합으로 표현되며,  $\epsilon_t$ 의 부호가 음(-)인 경우는 계수가  $\theta - 1$ 이다. 표 3.3에서 추정된 모든 계수가 유의수준 5%에서 유의하다.

표 3.3. AR(0)-EGARCH(1, 1), no intercept term 모형의 적합결과

모수	추정치	표준오차	t-값	Pr >  t
$\alpha_0$	-0.1273	0.0500	-2.54*	0.0110
$\alpha_1$	0.0941	0.0285	3.30*	0.0010
$\beta_1$	0.9848	0.0060	164.43*	<.0001
$\theta$	-1.2172	0.3534	-3.44*	0.0006

위 적합 모형에서는  $\gamma = 1$ ,  $E(|\epsilon_t|) = \sqrt{2/\pi} = 0.7979$ 로 가정하였으므로 값을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 r_t &= a_t, \\
 \ln(\sigma_t^2) &= -0.2024 + 0.9848 \ln(\sigma_{t-1}^2) - 0.0204\epsilon_{t-1}, \quad \epsilon_{t-1} \geq 0, \\
 \ln(\sigma_t^2) &= -0.2024 + 0.9848 \ln(\sigma_{t-1}^2) - 0.2086\epsilon_{t-1}, \quad \epsilon_{t-1} < 0.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

### 모형 검진

KOSPI 일별 로그수익률( $r_{1t}$ )에 대해 최종적으로 선택한 비대칭 이분산성 모형에 대해 모형 진단을 시행하였다. 표준화된 잔차는 그림에서 뚜렷한 패턴 없이 음과 양의 값을 반복했고 표본 ACF와 PACF의 값 역시 시차 24까지 모두 두 배의 표준오차 밴드 내에 존재했다. 따라서 표준화된 잔차는 가정한 대로 백색잡음계열에 가깝다. 포트맨토검정을 통해 얻은  $Q$  통계량 역시 시차 6, 12, 18, 24일 때 모두  $p$ -value가 0.05보다 커서 최종 모형에 가정한 평균 함수는 적당한 모형이라 할 수 있다. 분산 함수에 대한 진단을 위해 표준화된 잔차를 제공한 계열의 표본 ACF와 PACF를 시차 24까지 그려본 결과 모두 두 배의 표준오차 밴드 내에 존재했다.  $Q$  통계량 역시 시차 6, 12, 18, 24일 때 모두  $p$ -value가 0.05보다 컸으므로 우리가 각 최종 모델에 대해 가정한 분산 함수 역시 적당한 모형이라 결론 내릴 수 있다. 따라서 최종 모형은 return과 volatility 계열에서 선형 관계를 잘 반영하고 있다고 할 수 있다.

### 3.2. 원-달러 환율 일별 로그수익률( $r_{2t}$ )의 비대칭성

그림 3.2의 normal density plot은 원-달러 환율 일별 로그수익률( $r_{2t}$ )의 기초통계량  $n = 645$ ,  $\bar{x} = 0.0003612$ ,  $\hat{\sigma}_x = 0.01345556$ 을 계산하여 얻었다. 커널 density plot은 KOSPI분석에서와 같은 종류의 커널함수와 bandwidth를 사용하였으며  $\hat{h} = 0.002079$ 로 추정되었다. 커널 density plot의 mode는 정규분포를 가정했을 때 같이 0에 거의 근사하지만 왼쪽 꼬리가 오른쪽보다 더 긴 것을 통해 비정규성을 가짐을 알 수 있다.

하강기보다 상승기의 경우가 20개 정도 더 많은 것은 그림 3.2의 커널 density plot의 mode가 0에서 약간 오른쪽으로 벗어나있는 것을 설명해준다. 커널 density plot이 왼쪽으로 더 긴 꼬리를 가지므로 상승기보다 하강기의  $r_{2t}$ 의 분산이 더 큰 값을 가지나 극단 값의 빈도가 크지 않아  $r_{2t}$ 의 평균은 하강기보다 상승기의 경우가 조금 더 큰 절대 값을 가진다.

원-달러 환율 일별 로그수익률( $r_{2t}$ )의 평균 부분에 대한 ARIMA 모델링을 해본 결과 표본 ACF는 시차 3, 10, 12, 17, 18의 경우, 표본 PACF는 시차 3, 10, 12에서 2배의 표준 오차보다 큰 값을 가졌다. AR(3)와 MA(3) 모형을 적합해 보았으나  $r_{2t}$ 에 대한 두 ARIMA 모형의 적합도가 크게 다르지 않았다.

적합한 9가지 모형 중 AIC가 가장 작은 AR(0)-EGARCH(1, 1) 모형(no intercept term)을 최종 모형으로 선택하며 적합 후 추정된 계수와 각 표준오차는 다음과 같다. 모형 구조는 식 (3.1), (3.2)와 동일하며 표 3.6에서 추정된 모든 계수가 유의수준 5%에서 유의하다.

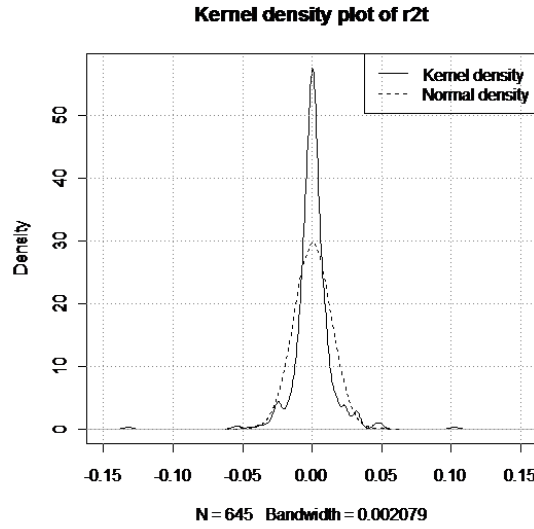


그림 3.2. 원-달러 환율 일별 로그수익률의 커널 density plot과 Normal density plot

표 3.4. 상승기와 하강기의 원-달러 환율 일별 로그수익률( $r_{2t}$ )의 평균과 분산

	상승기( $r_{2t} > 0$ )	하강기( $r_{2t} < 0$ )
$n$	335	310
$r_{2t}$ 의 평균	0.008139431	-0.008044292
$r_{2t}$ 의 분산	0.000109056	0.000122985

표 3.5. 원-달러 환율 일별 로그수익률( $r_{2t}$ )계열에 적합한 비대칭 이분산성 모형들의 AIC비교

GARCH Model		
AR(1,3)-GARCH(1,1), no intercept		-4187.4
AR(1)-GARCH(1,1)		-4187.6
AR(0)-GARCH(1,1), no intercept		-4189.2
EGARCH Model	GJR-GARCH Model	APARCH Model
AR(1)-EGARCH(1,1) -4201.7	AR(1)-GJR-GAR(1,1) -4196.5	AR(1)-APARCH(1,1) -4189.7
AR(0)-EGARCH(1,1) no intercept -4204.8	AR(0)-GJR-GAR(1,1) no intercept -4198.4	AR(0)-APARCH(1,1) no intercept -4179.4

표 3.6. AR(0)-EGARCH(1,1), no intercept term 모형의 적합결과

모수	추정치	표준오차	t-값	Pr >  t
$\alpha_0$	-0.1612	0.0674	-2.39*	0.0167
$\alpha_1$	0.2812	0.0436	6.45*	<.0001
$\beta_1$	0.9816	0.0073	134.22*	<.0001
$\theta$	0.3818	0.1018	3.75*	0.0002

$\gamma = 1$ ,  $E(|\epsilon_t|) = \sqrt{2/\pi} = 0.7979$ 값을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 r_t &= a_t \\
 \ln(\sigma_t^2) &= -0.3865 + 0.9816 \ln(\sigma_{t-1}^2) + 0.3886\epsilon_{t-1}, \quad \epsilon_{t-1} \geq 0, \\
 \ln(\sigma_t^2) &= -0.3865 + 0.9816 \ln(\sigma_{t-1}^2) - 0.1738\epsilon_{t-1}, \quad \epsilon_{t-1} < 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

모형 진단 결과 KOSPI의 경우와 마찬가지로 추정된 평균 함수, 분산 함수가 모두 무리가 없음을 확인할 수 있었다.

### 3.3. EGARCH 모형을 사용한 실제 비대칭 반응의 크기 측정

#### KOSPI지수 일별 로그수익률( $r_{1t}$ )의 비대칭 반응

모형 추정과 진단을 통해 확정된  $r_{1t}$ 의 최종 모형인 AR(0)-EGARCH(1,1), no intercept 모형을 사용하여 실제로 음의 shock과 양의 shock에 대하여 변동성의 반응의 차이를 수치화한다. 식 (3.1)에서 얻어진 최종 모형을 역 로그 변환하면 다음과 같다.

$$\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^{2 \times 0.9848} e^{-0.2024} \begin{cases} e^{-0.0204\epsilon_{t-1}}, & \epsilon_{t-1} \geq 0 \\ e^{-0.2086\epsilon_{t-1}}, & \epsilon_{t-1} < 0. \end{cases}$$

Shock  $|\epsilon_{t-1}| = 2$ 에 대해, 즉 2배 표준편차만큼의 shock에 반응하는 변동성의 차이를 계산해 보면,

$$\frac{\sigma_t^2(\epsilon_{t-1} = -2)}{\sigma_t^2(\epsilon_{t-1} = 2)} = \frac{\exp(-0.2086 \times (-2))}{\exp(-0.0204 \times 2)} = e^{0.4580} = 1.5809$$

즉, 두 배 표준편차 크기의 음의 shock에 대한 변동성에 대한 반응은 같은 크기의 양의 shock에 대한 반응보다 58.09% 더 크다. 즉 KOSPI 지수의 일별 수익률이 2배의 표준오차만큼 감소할 때의 오차 분산에 대한 반응이, 같은 크기만큼 증가할 때의 오차 분산에 대한 반응보다 58.09% 크다.

#### 원-달러 환율의 일별 로그수익률( $r_{2t}$ )의 비대칭 반응

KOSPI의 경우와 마찬가지로 최종 선택 모형인 AR(0)-EGARCH(1,1) 모형(no intercept)을 사용하여 실제로 음의 shock과 양의 shock에 대하여 변동성의 반응 차이를 계산해 보았다.  $|\epsilon_{t-1}| = 2$ 에 대하여 반응하는 변동성의 차이를 계산해 보면,

$$\frac{\sigma_t^2(\epsilon_{t-1} = 2)}{\sigma_t^2(\epsilon_{t-1} = -2)} = \frac{\exp(0.3886 \times 2)}{\exp(-0.1738 \times (-2))} = e^{0.4296} = 1.5366.$$

이어서 원-달러 환율의 일별 변화율이 증가할 때의 오차 분산에 대한 반응이 환율의 일별 변화율이 감소할 때의 오차 분산에 대한 반응보다 53.66% 크다.

### 3.4. 부트스트래핑을 사용한 미래의 오차 분산의 조건부 기대치의 예측

미래오차분산의 조건부 기대 값을 예측하기 위해 Chen 등 (2011)이 GARCH 모형에 대해 사용한 방법을 적용해보았다. 그들이 사용한 제공계열에 대해 ARMA 추정을 하는 seive 부트스트래핑 대신 moving block 부트스트래핑을 적용하였다. Moving block 부트스트래핑은 Künsch (1989)와 Liu와 Singh (1992)에 의해 독립적으로 소개된 것으로 Efron (1979)이 weakly dependent stationary data에 적용한 부트스트래핑을 개선하기 위해 제안되었다. 본 분석에서는 실험의 편의를 위해 부트스트래핑의 반복 추출 과정 중에 자료 645개에서 처음 5개 자료를 제외한 640개의 자료를 사용하여 50시점 후까지의 오차 분산을  $b = 20$ 으로 1000번 반복 추정하였다. 예측에 사용된 EGARCH(1,1) 모형을 기준으로 예측 시점  $n$ 에서의  $h$ 시점 후 조건부 분산 예측 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{n+h}^2 &= \sigma_{n+h-1}^{2\beta_1} \exp(\alpha_0) \exp(\alpha_1 g(\epsilon_{n+h-1})), \quad h = 1, 2, \dots, s, \\ g(\epsilon_n) &= \theta \epsilon_n + |\epsilon_n| - \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$



표 3.7. 부트스트래핑으로 구한  $h$ 시점 후 오차의 조건부분산 예측치(평균)와 예측표준오차(SD)

		$h = 1$	$h = 2$	$h = 3$	$h = 4$	$h = 5$	...	$h = 10$
KOSPI	평균	1.466e-4	1.624e-4	1.787e-4	1.940e-4	2.053e-4	...	2.554e-4
	$\hat{\sigma}_{1n}^2(h)$ SD	3.263e-5	6.791e-5	9.989e-5	1.276e-4	1.434e-4	...	2.365e-4
원-달러 환율	평균	5.891e-5	7.453e-5	8.662e-5	9.918e-5	1.057e-4	...	1.633e-4
	$\hat{\sigma}_{2n}^2(h)$ SD	3.309e-5	9.569e-5	1.189e-4	1.440e-4	1.431e-4	...	3.531e-4

표 3.8. KOSPI와 원-달러 환율의  $r_t$ 의 표본 분산과  $\hat{\sigma}_t^2$ 의 표준편차

	KOSPI	원-달러 환율
$r_t$ 의 표본 분산	3.536e-4	1.810e-4
$\hat{\sigma}_t^2$ 의 표준편차 ( $t = 1, 2, \dots, 645$ )	3.944e-4	3.017e-4

식 (3.5)에 근거한  $r_{1t}, r_{2t}$ 계열에 대해  $h$ 시점 후의 부트스트랩 조건부 분산의 예측치와 예측표준오차가 표 3.7에 나타나있다. 부트스트래핑의 각 반복에서 생성되는 값은 미래 변동성  $\sigma_{n+h}^{*2}$ 의 개별치에 대한 조건부 실현 값으로 생각할 수 있다. 이들 1000개 실현 값의 평균과 표준편차(SD)가 각각 조건부 분산의 예측치와 예측표준오차이다. 표 3.7에서의  $r_{1t}, r_{2t}$ 의 미래 조건부 분산의 예측치는 초기 시점 일 때는 표 3.8에 나타난 각 계열의 표본 분산인 0.00035368, 0.00018105보다 작은 값을 가지나 예측시점이 멀어질수록 이 값들에 가깝게 수렴한다. 또한 예측표준오차는 두 계열 모두 예측시점이 멀어질수록 더 큰 값을 가지는 경향을 보였고 표 3.8에 표기된 각 계열의  $\hat{\sigma}_t^2$ 의 표준편차에서 크게 벗어나지 않았다.

#### 4. 결론 및 논의

본 논문에서는 우리나라 대표적인 금융 시계열인 KOSPI 지수와 원-달러 환율의 일별 로그수익률 자료의 다양한 비대칭성을 살펴보았다. 일반 GARCH 모형을 적합 시켜 금융 시계열의 이분산성 존재 여부를 확인한 후 변동성의 비대칭성을 감안한 다양한 차수의 EGARCH, GJR-GARCH, APARCH 모형을 적합 시켜본 결과 AR(0)-EGARCH 모형이 최소 AIC값을 갖는 것을 살펴보고 이 모형에 근거하여 과거 로그리턴의 부호에 따라 조건부 분산이 다르게 반응하는 것을 입증하였다. 마지막으로 예측력이 가장 높은 최적의 비대칭 이분산성 모형으로 양(+)/음(-)의 return에 따른 실제로 변동성 차이를 수치로 확인하고 부트스트래핑 방법을 사용해 조건부 분산의 미래 개별 예측치, 예측표준오차를 구해보았다. 분석결과, KOSPI지수와 원-달러 환율의 shock의 부호에 대한 변동성의 반응이 정 반대로 나타났다. KOSPI지수는 오늘 일별 로그수익률이 양(+)의 shock을 가질 때 보다 음(-)의 shock을 가질 때 내일 더 큰 변동성을 가졌으며 58.09% 더 컸다. 그러나 원-달러 환율의 경우는 오늘 일별 로그 변화율이 양(+)의 shock을 가질 때 내일 더 큰 변동성을 가졌으며 53.66% 더 컸다. 이는 아마도 시장입장에서 KOSPI지수는 하락이 나쁜 소식이고 원-달러 환율은 상승이 나쁜 소식이어서 그러할 것이다. 결과적으로 두 금융 시계열은 과거 return의 부호에 따라 각기 반대의 반응을 보였으며 같은 시기의 자료를 사용하여 분석하였기 때문에 변동성에 대한 두 시계열의 반응은 수치적으로 큰 차이가 없었다. 또한 부트스트래핑을 사용하여 구한 변동성의 미래 개별 예측치는 예측 시점이 멀어질수록 각 계열의 표본 분산에 수렴하는 경향을 보였다.

#### 참고문헌

김세완 (2009). 경기변동을 고려한 주식수익률과 변동성 관계의 변화: 비대칭 GARCH 모형을 이용하여, <금융연구>, 23, 1-28.

- 박주연, 여인권 (2009). 변화된 GARCH모형에서의 예측값 추정, <응용통계연구>, **22**, 971-979.
- 성범용, 김기석 (2000). 뉴스충격이 원/달러환율의 변동성에 미치는 효과분석, <국제경제연구>, **6**, 161-180.
- Bekaert, G. and Wu, G. (2000). Asymmetric volatility and risks in equity markets, *The Review of Financial Studies*, **13**, 1-42.
- Black, F. (1976). Studies in stock price volatility changes, Proceedings of the 1976 business meeting of the business and economic statistics section, *American Statistical Association*, 177-181.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307-327.
- Box, G. E. P. and Jenkins, G. M. (1970). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day, San Francisco.
- Chen, B., Gel, Y. R., Balakrishna, N. and Abraham, B. (2011). Computationally efficient bootstrap prediction intervals for returns and volatilities in ARCH and GARCH processes, *Journal of Forecasting*, **30**, 51-71.
- Christie, A. (1982). The stochastic behavior of common stock variances: Value, leverage and interest rate effects, *Journal of Financial Economics*, **10**, 407-432.
- Ding, Z., Granger, C. W. J. and Engle, R. F. (1993). A long memory property of stock market returns and a new model, *Journal of Empirical Finance*, **1**, 83-106.
- Efron, B. (1979). Bootstrap methods: Another look at the jackknife, *Annals of Statistics*, **7**, 1-26.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom, *Econometrica*, **46**, 1287-1294.
- Engle, R. F. and Ng, V. (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility, *Journal of Finance*, **48**, 1749-1778.
- Glosten, L., Jagannatha, R. and Runkle, D. (1993). On the relation between expected excess return on stocks, *Journal of Finance*, **48**, 1779-1801.
- Henry, O., Olekalns, N. and Shields, K. (2010). Sign and phase asymmetry: News, economic activity and the stock market, *Journal of Macroeconomics*, **32**, 1083-1100.
- Higgins, M. L. and Bera, A. K. (1992). A class of nonlinear arch models, *International Economic Review*, **33**, 137-158.
- Hwang, E. J. and Shin, D. W. (2010). Asymptotics and optimal bandwidth selection for kernel estimators of mode under psi-weak dependence.
- Kumar, R. and Dhankar, R. S. (2010). Empirical analysis of conditional heteroskedasticity in time series of stock returns and asymmetric effect on volatility, *Global Business Review*, **11**, 21-33.
- Künsch, H. R. (1989). The jackknife and the bootstrap for general stationary observations, *Annals of Statistics*, **17**, 1217-1241.
- Liu, R. Y. and Singh, K. (1992). *Moving Blocks Jackknife and Bootstrap Capture Weak Dependence*, In *Exploring the Limits of Bootstrap* (R. LePage and L. Billard, eds.), 225-248, Wiley, New York.
- Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach, *Econometrica*, **59**, 347-370.
- Scott, D. W. (1992). *Multivariate Density Estimation: Theory, Practice, and Visualization*, Wiley.
- Sheather, S. J. and Jones, M. C. (1991). A reliable data-based bandwidth selection method for kernel density estimation, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **53**, 683-690.
- Silverman, B. W. (1986). *Density Estimation*, Chapman and Hall, London.
- Wu, G. (2001). The determinants of asymmetric volatility, *Review of Financial Studies*, **14**, 837-859.
- Zakoian, J. M. (1994). Threshold heteroskedastic models, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **18**, 931-955.

# Empirical Analyses of Asymmetric Conditional Heteroscedasticities for the KOSPI and Korean Won-US Dollar Exchange Rate

Hye Young Maeng<sup>1</sup> · Dong Wan Shin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Statistics, Ewha Womans University

<sup>2</sup>Department of Statistics, Ewha Womans University

(Received September 2011; accepted October 2011)

---

## Abstract

In this paper, we use a nested family of models of Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity(GARCH) to verify asymmetric conditional heteroscedasticity in the KOSPI and Won-Dollar exchange rate. This study starts from an investigation of whether time series data have asymmetric features not explained by standard GARCH models. First, we use kernel density plot to show the non-normality and asymmetry in data as well as to capture asymmetric conditional heteroscedasticity. Later, we use three representative asymmetric heteroscedastic models, EGARCH(Exponential Garch), GJR-GARCH(Glosten, Jagannathan and Runkle), APARCH(Asymmetric Power Arch) that are improved from standard GARCH models to give a better explanation of asymmetry. Thereby we highlight the fact that volatility tends to respond asymmetrically according to positive and/or negative values of past changes referred to as the leverage effect. Furthermore, it is verified that how the direction of asymmetry is different depending on characteristics of time series data. For the KOSPI and Korean won-US dollar exchange rate, asymmetric heteroscedastic model analysis successfully reveal the leverage effect. We obtained predictive values of conditional volatility and its prediction standard errors by using moving block bootstrap.

**Keywords:** Asymmetric Volatility, Garch Models, Kernel density plot, Bootstrap.

---

---

This research is supported by Basic Science Research Program through the National Research foundation of Korea(NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology(KRF-2009-0070618).

<sup>2</sup>Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Ewha Woman's University, Seoul 120-750, Korea. E-mail:shindw@ewha.ac.kr