

양단이 탄성받침으로 지지된 Timoshenko 보의 자유진동

Free Vibrations of Timoshenko Beam with Elastomeric Bearings at Two Far Ends

이병구* · 이태은** · 박창은***

Lee, Byoung Koo · Lee, Tae Eun · Park, Chang Eun

Abstract

This paper deals with free vibrations of the Timoshenko beam supported by two elastomeric bearings at two far ends. The ordinary differential equation governing free vibrations of such beam is derived, in which both effects of rotatory inertia and shear deformation are included as the Timoshenko beam theory. Also, boundary conditions of the free end are derived based on the Timoshenko beam theory. The ordinary differential equation is solved by the numerical methods for calculating natural frequencies and mode shapes. Both effects of the rotatory inertia and shear deformation on natural frequencies are extensively discussed. Also, relationships between natural frequencies and slenderness ratio, foundation modulus and bearing length are presented. Typical mode shapes of bending moment and shear force as well as deflection are given in figures which show the positions of maximum amplitudes and nodal points.

Keywords : free vibration, Timoshenko beam, elastomeric bearing, rotatory inertia, shear deformation

요 지

이 연구는 양단이 탄성받침으로 지지된 Timoshenko 보의 자유진동에 관한 연구이다. 회전관성과 전단변형을 동시에 고려하는 Timoshenko 보 이론을 적용하여 탄성받침 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식과 자유단의 경계조건을 유도하였다. 이 상미분방정식을 수치해석하여 고유진동수와 진동형상을 산출하였다. 회전관성과 전단변형이 자유진동에 미치는 영향을 분석하고, 변수연구를 통하여 세장비, 지반계수, 탄성받침 길이 등이 자유진동에 미치는 영향을 그림에 나타내었다. 변위 및 휨 모멘트, 전단력의 진동형상을 그림에 나타내어 최대진폭 및 무변위의 위치를 알 수 있도록 하였다.

핵심용어 : 자유진동, Timoshenko 보, 탄성받침, 회전관성, 전단변형.

1. 서 론

보는 기둥, 곡선 부재, 평판/곡면판 등과 더불어 가장 기본적인 구조단위 중에 하나이므로 각종 구조물에서 뼈대구조로 이용되고 있다. 따라서 보에 대한 동적 연구 특히 자유진동에 관한 연구는 구조공학에서 매우 전통적인 연구 주제 중에 하나이다.

구조물의 자유진동해석에서 회전관성 및 전단변형은 고유진동수 및 진동형상에 큰 영향을 미친다. 회전관성은 고차모드에서 더 큰 영향을 미치고, 전단변형은 세장비가 작은 구조물에서 더 큰 영향을 미친다. 회전관성과 전단변형 효과를 모두 고려하는 Timoshenko 보의 자유진동 해석은 구조공학에서 전통적으로 중요한 연구과제 중에 하나이다.

지난 수십 년간 보의 자유진동에 관한 매우 많은 연구들이 진행되어 왔다. 보의 자유진동에 관한 연구는 1) 해석방

법(Banerjee, 2003; Chen *et al.*, 2004; Alonso and Riberio, 2008; Khalili *et al.*, 2010), 2) 변단면의 영향(Ganesan and Zabihollah, 2007; Calim, 2009; 이 등, 2011), 3) 관성력의 영향(Foda, 1999; Yang *et al.*, 2008; Attarnejad *et al.*, 2010), 4) 탄성지반의 영향(Lee *et al.*, 1999; Lee *et al.*, 2002; Chen *et al.*, 2004; Morfidis, 2010) 등의 연구 내용으로 구분할 수 있다.

구조물에서 보의 양단은 일반적으로 회전 또는 고정 등과 같은 강성지점으로 지지되어 있다. 작용하중이 매우 큰 보에서는 지점에 큰 지압하중이 발생하여 지점의 기능을 상실하는 경우가 자주 발생한다(Salmon and Johnson, 1996). 특히 교량 등과 같이 반복적으로 충격하중을 받는 보에서는 지점의 손상으로 인하여 교좌장치가 제대로 기능을 발휘하지 못하여 교량의 수명을 단축시키거나 잦은 유지보수의 원인이 되기도 한다. 이와 같은 전통적인 강성지점의 문제점을

*정회원 · 교신저자 · 원광대학교 토목환경공학과 교수 (E-mail : bkleeest@wku.ac.kr)

**정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 연구교수 (E-mail : telee@wku.ac.kr)

***정회원 · 원광대학교 대학원 토목환경공학과 석사과정 (E-mail : chparkst@wku.ac.kr)

극복하기 위하여 최근에는 교량의 교좌장치를 탄성받침으로 시공하는 것이 일반적인 추세이다. 이러한 경우에 충격하중을 완화시킬 수 있을 뿐만 아니라 탄성받침에 이상이 발생한 경우에도 교좌장치를 쉽게 교체할 수 있는 장점이 있다. 이와 같이 탄성받침으로 지지된 보가 교량 등과 같은 실제 구조물에서 자주 이용되고 있는 반면, 이에 대한 동적 거동 특성에 관한 연구는 매우 드물다. 특히 동하중을 받는 구조물의 동적 해석에서 자유진동해석은 가장 먼저 수행되어야 하는 과제이다(Kisa and Gurel, 2007).

이상과 같은 관점에서 이 연구는 양단이 탄성받침으로 지지된 Timoshenko 보의 자유진동에 관한 연구이다. 따라서 이 논문은 앞에서 분류한 1), 3), 4)의 연구 내용을 포함한다. 탄성지반으로 지지된 보 요소의 자유진동에 관한 편미분방정식을 이용하여 양단이 탄성받침으로 지지된 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하였다. 상미분방정식에는 회전관성과 전단변형을 고려하는 Timoshenko 보 이론을 적용하였다. 양단이 탄성받침으로 지지된 보의 경계조건은 자유단이므로 Timoshenko 보 이론을 적용하여 경계조건을 유도하였다.

유도한 상미분방정식을 수치해석하여 고유진동수 및 진동형상을 산정하였다. 수치해석의 결과로 수치해의 정확도를 확보하기 위하여 수렴해석을 실시하고, 본 연구와 SAP 2000에서 산정한 고유진동수를 비교하여 본 연구의 이론 및 수치해석 방법의 타당성을 검증하였다. 회전관성 및 전단변형이 보의 고유진동수에 미치는 영향을 분석하였고, 변수연구를 통하여 세장비, 지반계수, 탄성받침 길이 등이 고유진동수에 미치는 영향을 표 및 그림에 나타내었다. 보의 변위, 휨 모멘트 및 전단력의 전형적인 진동형상을 산정하여 그림에 나타내었다.

2. 수학적 모형

2.1 동적 평형방정식

그림 1은 시간길이 l 이고 양단의 일정구간이 탄성받침으로 지지된 보를 나타낸다. 점선은 정적 상태의 보를 나타내고, 실선은 변위 y_x 에 대한 진동형상을 나타낸다. 보의 단면은 등단면이며 단면적 및 단면2차모멘트는 각각 A , I 이다. d_a , d_b 는 탄성받침의 축방향길이이고, k_a , k_b 는 탄성받침의 지반계수이다. 이 연구에서 지반계수 k_a , k_b 는 보의 폭을 고려하여야 하기 때문에 일반적으로 지반공학에서 사용하는 $[FL^{-3}]$ 차원에 보를 지지하는 탄성받침의 폭을 곱한 $[FL^{-2}]$ 의 차원을 갖는다. 이 그림에서와 같이 보의 양단은 강성지점이 아

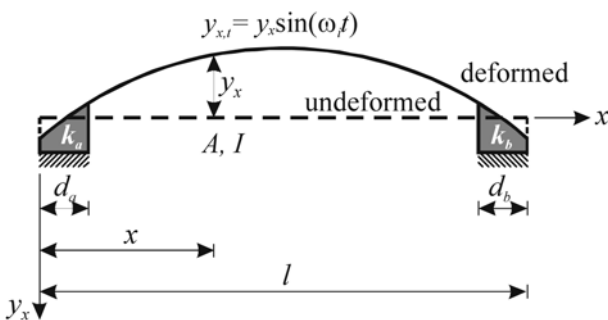


그림 1. 양단이 탄성받침으로 지지된 보의 진동형상

닌 자유단이므로 전단 및 휨에 저항할 수 없다.

보의 자유진동을 조화진동으로 가정하면 그림 1에 실선으로 표시한 자유진동의 동적 변위 y_x 와 보의 단면에 발생하는 동적 휨 모멘트 $M_{x,t}$ 동적 전단력 $V_{x,t}$ 는 다음과 같이 조화진동식들로 나타낼 수 있다.

$$y_{x,t} = y_x \sin(\omega_i t) \quad (1)$$

$$M_{x,t} = M_x \sin(\omega_i t) \quad (2)$$

$$V_{x,t} = V_x \sin(\omega_i t) \quad (3)$$

여기서 y_x , M_x , V_x 는 조화진동의 진폭들이며 x 만의 함수이다. ω_i 는 고유각진동수(rad/s)이고, t 는 시간이다. 또한 ω_i 에서 $i(=1, 2, 3, 4, \dots)$ 는 모드번호이다.

Timoshenko 보 이론(Timoshenko *et al.*, 1974)과 지반계수 k 의 영향을 중첩하고(Chopra, 2001), 식 (1)~(3)을 이용하면 탄성받침으로 지지된 보 요소의 자유진동을 지배하는 편미분방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$EI \frac{\partial^4 y_{x,t}}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y_{x,t}}{\partial t^2} + k y_{x,t} - \rho I \left(R + S \frac{E}{\alpha G} \right) \frac{\partial^4 y_{x,t}}{\partial x^2 \partial t^2} - S \frac{EI k}{\alpha G A} \frac{\partial^2 y_{x,t}}{\partial x^2} + RS \left(\frac{\rho I k}{\alpha G A} \frac{\partial^2 y_{x,t}}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\alpha G} \frac{\partial^4 y_{x,t}}{\partial t^4} \right) = 0 \quad (4)$$

위 식에서 E , G , ρ 는 보 재료의 탄성계수, 전단탄성계수 및 질량밀도이다. α 는 단면형상계수이고, R , S 는 지배미분방정식에서 회전관성 및 전단변형의 고려여부를 정의해주는 지표이며 그 의미는 다음과 같다.

$$R=0: \text{회전관성 미고려} \quad (5.1)$$

$$R=1: \text{회전관성 고려} \quad (5.2)$$

$$S=0: \text{전단변형 미고려} \quad (6.1)$$

$$S=1: \text{전단변형 고려} \quad (6.2)$$

식 (4)에서 앞의 3항이 탄성지반으로 지지된 보의 자유진동을 지배하는 가장 기본적인 편미분방정식이다. R 항은 회전관성의 영향, S 항은 전단변형의 영향, RS 항은 전단변형과 회전관성의 연계영향이다. 따라서 $R=S=0$ 이면 회전관성과 전단변형을 모두 무시하는 기본 보이고, $R=1$, $S=0$ 이면 회전관성만을 고려하는 회전관성 보이고, $R=S=1$ 이면 회전관성과 전단변형을 모두 고려하는 Timoshenko 보이다.

식 (4)의 편미분방정식을 상미분방정식으로 변환하기 위하여 식 (1)을 x , t 로 각각 편미분하여 다음과 같이 편미분식과 상미분식들 사이의 관계를 구한다.

$$\frac{\partial^4 y_{x,t}}{\partial x^4} = \frac{d^4 y_x}{dx^4} \sin(\omega_i t) \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial^2 y_{x,t}}{\partial x^2} = \frac{d^2 y_x}{dx^2} \sin(\omega_i t) \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial^2 y_{x,t}}{\partial t^2} = -\omega_i^2 y_x \sin(\omega_i t) \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial^4 y_{x,t}}{\partial x^2 \partial t^2} = -\omega_i^2 \frac{d^2 y_x}{dx^2} \sin(\omega_i t) \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial^4 y_{x,t}}{\partial t^4} = \omega_i^4 y_x \sin(\omega_i t) \quad (7.5)$$

위에서 구한 식 (7)을 식 (4)에 대입하고 정리하면 탄성지반으로 지지된 Timoshenko 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$EI \frac{d^4 y_x}{dx^4} + \left[\rho I \left(R + S \frac{E}{\alpha G} \right) \omega_i^2 - S \frac{EI k}{\alpha GA} \right] \frac{d^2 y_x}{dx^2} + \left[RS \frac{\rho^2 I}{\alpha G} \omega_i^4 - \left(RS \frac{\rho I k}{\alpha GA} + \rho A \right) \omega_i^2 + k \right] y_x = 0 \quad (8)$$

식 (8)의 상미분방정식을 양단이 탄성받침으로 지지된 보에 적용하기 위해서는 탄성지반으로 지지된 보의 구간과 지지되지 않은 구간으로 나누어 지반계수에 대한 조건을 다음과 같이 적용한다.

$$k = k_a, \quad x \leq d_a \quad (9.1)$$

$$k = 0, \quad d_a < x < l - d_b \quad (9.2)$$

$$k = k_b, \quad x \geq l - d_b \quad (9.3)$$

2.2 무차원 미분방정식의 유도

자유진동을 지배하는 상미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = \frac{x}{l} \quad (10)$$

$$\eta = \frac{y_x}{l} \quad (11)$$

$$\varepsilon_a = \frac{d_a}{l}, \quad \varepsilon_b = \frac{d_b}{l} \quad (12.1, 12.2)$$

$$\gamma_a = \frac{k_a l^4}{EI}, \quad \gamma_b = \frac{k_b l^4}{EI} \quad (13.1, 13.2)$$

$$\mu = \frac{G}{E} \quad (14)$$

$$\lambda = \frac{l}{\sqrt{I/A}} \quad (15)$$

$$C_i = \omega_i^2 l^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad (16)$$

$$m = \frac{M_x l^2}{EI} \quad (17)$$

$$v = \frac{V_x l^3}{EI} \quad (18)$$

여기서 (ξ, η)는 무차원 직교좌표계이며 η 는 변위의 무차원 진폭이다. ($\varepsilon_a, \varepsilon_b$)는 탄성받침의 무차원 길이이고, (γ_a, γ_b)는 무차원 지반계수이다. μ 는 탄성계수 비, λ 는 세장비이다. C_i 는 무차원 고유진동수이고, (m, v)는 휨 모멘트 및 전단력의 무차원 진동형상 즉, 진폭이며 (m, v)의 하중-변위 관계식은 후술할 2.3절 경계조건의 유도에서 식 (24), (25)와 같이 유도한다.

식 (10), (11)을 이용하면 (x, y)의 미분식을 다음과 같이 (ξ, η)의 미분식으로 변수변환할 수 있다.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{l} \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \quad (19.1)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1}{l^2} \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} \quad (19.2)$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{1}{l^3} \frac{d^4 \eta}{d\xi^4} \quad (19.3)$$

식 (19.1), (19.3)을 식 (8)에 대입하고 식 (10)~(18)의 무차원 변수식들을 이용하면 다음과 같이 탄성받침으로 지지된 Timoshenko 보의 진동형상을 지배하는 무차원 상미분방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = \left[\frac{S \gamma}{\alpha \mu \lambda^2} \left(R + \frac{S}{\alpha \mu} \right) \frac{C_i^2}{\lambda^2} \right] \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + (C_i^2 - \gamma) \left(1 - RS \frac{C_i^2}{\alpha \mu \lambda^4} \right) \eta \quad (20)$$

위의 상미분방정식을 탄성받침으로 지지된 구간과 지지되지 않은 구간으로 나누어 무차원 지반계수 γ 에 대한 조건을 다음과 같이 적용한다.

$$\gamma = \gamma_a, \quad \xi \leq \varepsilon_a \quad (21.1)$$

$$\gamma = 0, \quad \varepsilon_a < \xi < 1 - \varepsilon_b \quad (21.2)$$

$$\gamma = \gamma_b, \quad \xi \geq 1 - \varepsilon_b \quad (21.3)$$

2.3 경계조건

탄성받침으로 지지된 보에 발생하는 동적 휨 모멘트 $M_{x,t}$ 를 회전관성 효과(R) 및 탄성지반(k)의 영향을 고려하여 유도하면 다음과 같다.

$$M_{x,t} = EI \left(\frac{\partial^2 y_{x,t}}{\partial x^2} - \frac{R \rho}{\alpha G} \frac{\partial^2 y_{x,t}}{\partial t^2} - \frac{k}{\alpha GA} y_{x,t} \right) \quad (22)$$

탄성이론에서 $V_x = dM_x/dx$ 이므로 식 (22)를 이용하여 동적 전단력 $V_{x,t}$ 를 다음과 같이 유도한다.

$$V_{x,t} = \frac{\partial M_{x,t}}{\partial x} = EI \left(\frac{\partial^3 y_{x,t}}{\partial x^3} - \frac{R \rho}{\alpha G} \frac{\partial^3 y_{x,t}}{\partial x \partial t^2} - \frac{k}{\alpha GA} \frac{\partial y_{x,t}}{\partial x} \right) \quad (23)$$

위식에서 지반계수 k 를 좌단($x=0$)의 지반계수인 k_a 로 대체하면 좌단의 동적 휨 모멘트와 동적 전단력을 얻을 수 있다. 탄성받침으로 지지된 보의 좌단은 자유단이므로 휨 모멘트와 전단력에 저항할 수 없다. 식 (22), (23)에서 $M_{x,t}=0, V_{x,t}=0$ 이라 놓고, 이 식들에 식 (10)~(16)을 적용하면 보의 좌단($\xi=0$)에서 무차원 경계조건을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$m = \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \frac{1}{\alpha \mu \lambda^2} (RC_i^2 - \gamma_a) \eta = 0 \quad (24)$$

$$v = \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} + \frac{1}{\alpha \mu \lambda^2} (RC_i^2 - \gamma_a) \frac{d\eta}{d\xi} = 0 \quad (25)$$

보의 우단($\xi=1$)에서 경계조건은 식 (24), (25)에서 좌단의 무차원 지반계수 γ_a 를 우단의 무차원 지반계수 γ_b 로 대체하여 얻을 수 있다. 식 (17), (18)의 무차원 휨 모멘트의 (m, v) 식은 식 (24), (25)의 좌변에 γ_a, γ_b 를 대입하여 계산할 수 있다.

3. 수치해석 방법

3.1 수치해석 과정

위에서 유도한 식 (20)의 상미분방정식을 식 (24), (25)의 경계조건식에 적용하여 수치해석하면 무차원 고유진동수 C_i

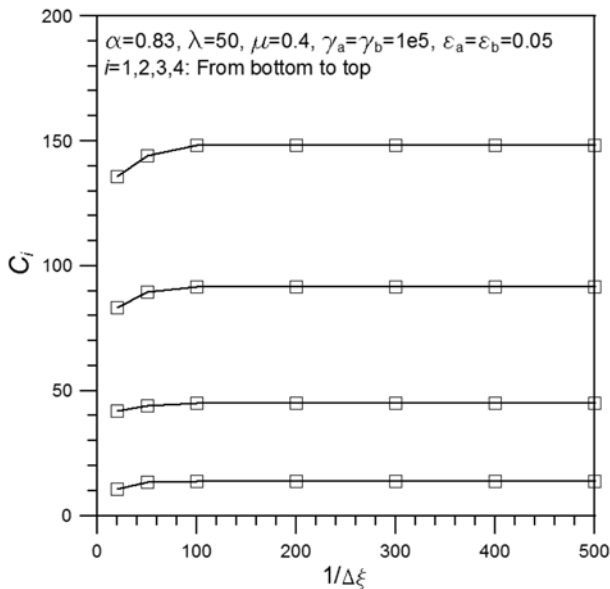


그림 2. 수렴해석

와 진동형상을 계산할 수 있다. 식 (20)의 수치적분은 Runge-Kutta 법(Carnahan *et al.*, 1969)을 이용하였고, 상미분방정식의 고유치인 C_i 는 비선형 방정식의 해법인 Regula-Falsi 법(Carnahan *et al.*, 1969)을 이용하여 계산하였다.

이상의 수치해석 과정을 이용하여 보의 변수들인 단면형상 계수 α , 세장비 λ , 탄성계수 비 μ , 무차원 지반계수 γ_a, γ_b 무차원 지반길이 $\varepsilon_a, \varepsilon_b$ 를 입력하면 무차원 고유진동수 C_i 와 변위, 전단력, 휨 모멘트의 진동형상 (η, m, v)를 계산할 수 있는 FORTRAN 컴퓨터 프로그램을 작성하였다. 실제의 수치해석에서 단면형상계수 $\alpha=0.83$ 의 직사각형 단면을 사용하였고, 최저치의 제4모드까지 C_i 와 (η, m, v)를 산정하였다.

3.2 수렴해석

수치해석 결과의 정확도를 확보하기 위하여 수렴해석을 실시하였다. 수치해의 정확도는 상미분방정식을 수치적분하기 위한 Runge-Kutta 법에서 단계길이 $\Delta\xi$ 와 밀접한 관계가 있다. 그림 2는 무차원 고유진동수 C_i 와 시간길이의 분할개수 $1/\Delta\xi$ 사이의 관계 즉, 수렴해석의 결과를 나타낸다. 그림 상단에 수치해석에 이용한 입력조건을 표시하였다.

이 그림에서와 같이 C_i 는 $1/\Delta\xi=100$ 즉 $\Delta\xi=0.01$ 에서 충분한 정도로 수렴하였다. 이 결과는 $\varepsilon_a, \varepsilon_b$ 가 0.01보다 큰 경우에 해당한다. 이후의 수치해석에서는 정확도를 더욱 확보하기 위하여 $1/\Delta\xi=200$ 으로 수치해석을 실시하였다. 이 경우에 수치해들은 $1/\Delta\xi=500$ 과 비교하여 유효숫자 3자리의 정확도를 갖는다.

3.3 검증

이 연구에서 산정한 고유각진동수 ω_i (rad/s)를 검증하기 위하여 표 1에서 SAP 2000에서 산정한 ω_i 와 비교하였다. SAP 2000에서는 전단변형 효과를 고려하기 위하여 전단 단면적을 입력하였다. 자유진동해석에 이용한 보의 변수들은 다음과 같다.

- 지반길이 및 단면: $l=1$ m, 0.1×0.05 m의 직사각형 단면 $\omega_1(A=5 \times 10^{-3} \text{ m}^2, I=1.042 \times 10^{-6} \text{ m}^4)$

표 1. 이 연구와 SAP 2000의 고유각진동수 ω_i 비교

$k_a=k_b$ (GPa)	자료 출처	고유각진동수 ω_i (rad/s)			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
1	이 연구	733	2166	3406	5273
	SAP 2000	746	2295	3642	5435
100	이 연구	1268	3742	7532	12475
	SAP 2000	1322	3843	7709	12797
10000	이 연구	1746	4753	9138	14716
	SAP 2000	1775	4844	9350	15140

- 재료 성질: $E=200$ GPa, $G=80$ GPa, $\rho=7,850$ Ns²/m⁴
- 탄성받침: $d_a=d_b=0.05$ m, $k_a=k_b=1, 100, 10,000$ GPa(3 종류) 위의 변수들을 무차원 변수들로 계산하면 $\alpha=0.83, \lambda=69.3, \mu=0.4, \varepsilon_a=\varepsilon_b=0.05, \gamma_a=\gamma_b=4.8 \times 10^3, 4.8 \times 10^5, 4.8 \times 10^7$ 이다. 산정된 C_i 로부터 식 (16)을 이용하면 고유각진동수 $\omega_i=72.9 C_i$ rad/s를 계산할 수 있다.

이 표에서 두 ω_i 는 서로 1.63%~6.48%의 오차를 보이고, 평균오차는 3.07%이어서 이 연구의 이론 및 수치해석 방법이 모두 타당함을 알 수 있었다.

4. 수치해석 예 및 토의

표 2는 회전관성(R) 및 전단변형(S)이 무차원 고유진동수 C_i 에 미치는 영향을 분석한 표이다. 수치해석에 사용한 보 변수는 $\alpha=0.83, \mu=0.4, \lambda=50, \varepsilon_a=\varepsilon_b=0.5, \gamma_a=\gamma_b=10^3, 10^5, 10^7$ 이다. 표 2에서 () 속의 숫자는 회전관성과 전단변형을 모두 무시하는 기본 보($R=S=0$)의 C_i 를 나타낸다. 회전관성 보($R=1, S=0$)와 Timoshenko 보($R=S=1$)에 대해서는 기본 보에 대한 C_i 의 감소율(%)을 수록하였다. 감소율에 대한 정의는 표 아래에 기술되어 있다. 이 표에서 보는 바와 같이 회전관성과 전단변형은 모두 고유진동수를 감소시키는 요인이며, 감소율은 회전관성보다 전단변형의 영향이 더 크다. 회전관성과 전단변형은 모두 고차모드에서 감소율이 더 크고, 더 큰 지반계수에서 감소율은 더 크다. 예로서 $\gamma_a=10^3$ 인 경우

표 2. 기본 보에 대한 회전관성 보 및 Timoshenko 보의 무차원 고유진동수 C_i 의 감소율(%)**

$\gamma_a=\gamma_b$	R	S	C_i 의 감소율(%)			
			$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
10^3	0	0	(7.61)	(15.79)	(29.08)	(63.88)
	1	0	0.03	0.06	0.17	0.86
	1	1	0.15	0.19	0.69	3.25
10^5	0	0	(13.98)	(45.76)	(95.72)	(160.6)
	1	0	0.21	0.80	1.72	2.62
	1	1	0.79	1.55	4.20	7.60
10^7	0	0	(24.55)	(67.65)	(132.6)	(219.0)
	1	0	0.29	0.99	2.11	3.56
	1	1	8.14	11.46	13.88	17.03

*표에서 () 속 숫자: 기본 보($R=0, S=0$)의 C_i 값

**감소율(%)=[$1-C_i/(R=0, S=0$ 의 C_i)] $\times 100$

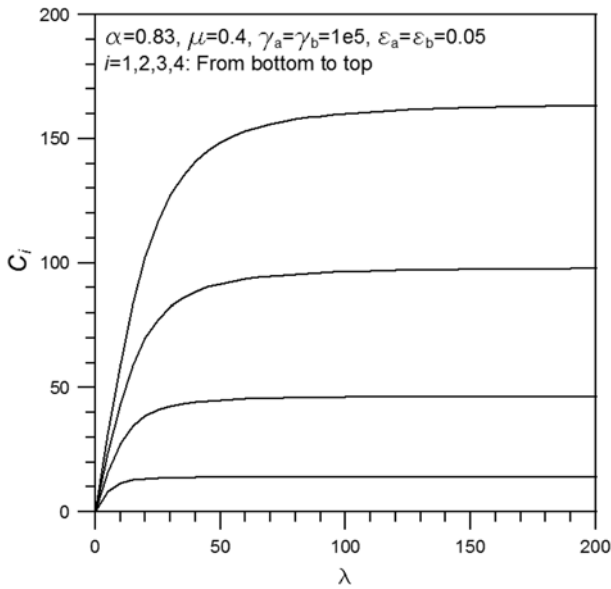


그림 3. C_i - λ 곡선

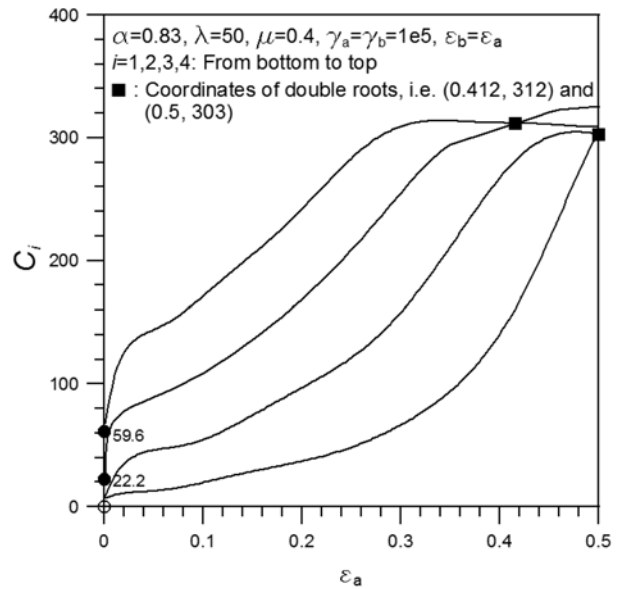


그림 5. C_i - ϵ_a 곡선

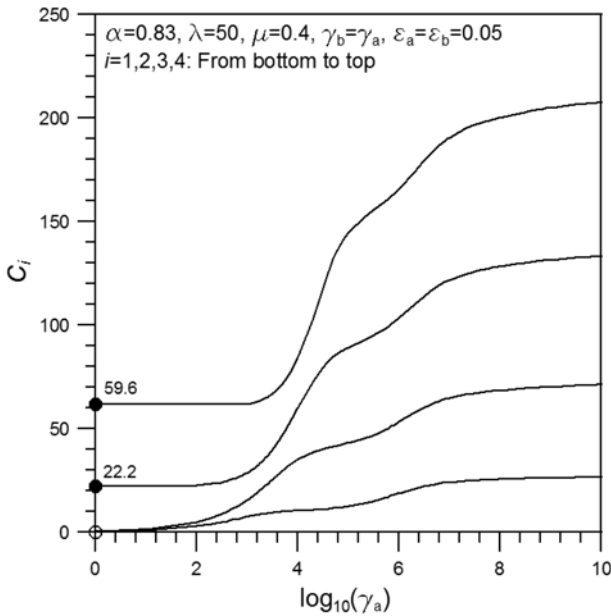


그림 4. C_i - γ_a 곡선

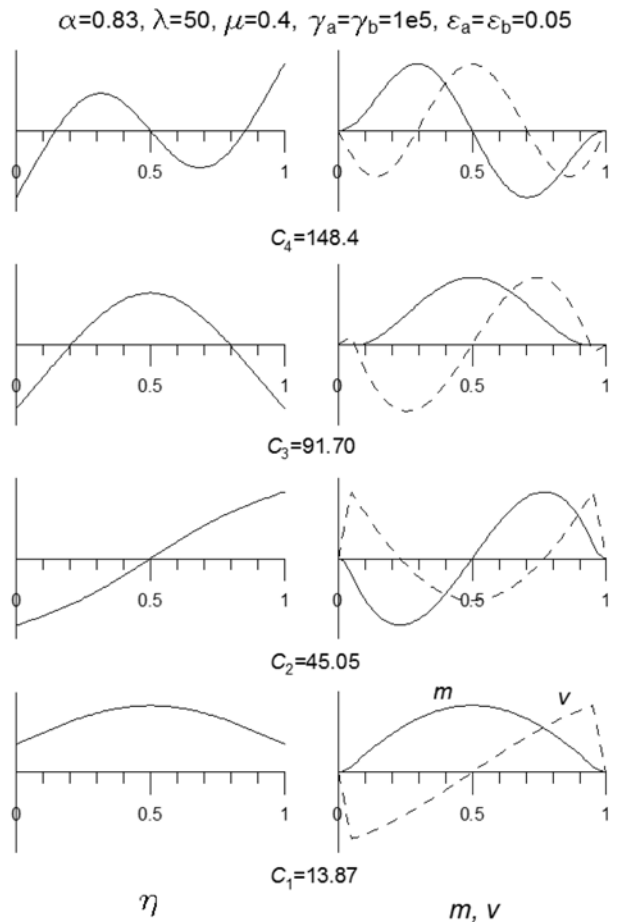


그림 6. 진동형상

에 Timoshenko 보의 C_4 는 기본 보에 비하여 3.25%의 감소율을 보이지만 $\gamma_a = 10^7$ 인 경우에는 17.03%의 큰 감소율을 보인다. 따라서 탄성받침으로 지지된 보의 자유진동 해석은 회전관성 및 전단변형을 모두 고려하여야만 보다 더 정확한 고유진동수를 산정할 수 있다.

그림 3은 무차원 고유진동수 C 와 세장비 λ 사이의 고유진동수 곡선을 나타낸다. 수치해석에 사용한 보 변수를 그림 상단에 나타내었다. λ 가 증가하면 C_i 는 증가하지만 증가율은 감소하여 결국 고유진동수 곡선은 수평선에 접근한다. 저차 모드에서는 더 작은 λ 에서 더 빨리 수평선에 접근하며 $\lambda=50$ 이상에서는 4개 모드 모두 C_i 의 증가는 거의 없다. 이 그림에서 보는 바와 같이 동일한 C_i 값을 갖는 λ 의 범위가 매우 넓으므로 소오의 무차원 고유각진동수 ω_i 를 갖는 범위도 매우 넓게 된다. 식 (16)에서 보는 바와 같이 ω_i 는 λ 에 반비례하므로 동일한 C_i 값을 갖는다 하더라도 작은 λ 에서 더 큰 ω_i 를 갖게 된다. 이러한 관점에서 그림 3과 같은

C_i - λ 곡선에서 소정의 ω_i 를 가질 수 있는 적당한 λ 값을 찾는 것이 합리적이다.

그림 4는 무차원 고유진동수 C_i 와 무차원 지지계수 $\gamma_a (= \gamma_b)$ 사이의 고유진동수 곡선을 나타낸다. 수치해석에 사용한 보 변수를 그림 상단에 나타내었다. γ_a 가 증가하면 C_i 는 증가하지만 증가율은 γ_a 의 크기에 따라서 큰 차이를 보이고 있다. 예로서 제 4모드인 C_4 에서 $\gamma_a < 2,000$ ($\log_{10} 2,000 = 3.3$)이면 증가율은 거의 없어 γ_a 축과 거의 나란하고 이후에 증가율은 증가와 감소를 반복한다. 저차모드에서 C_i

의 증가율은 더 작은 경향을 보인다. 보의 고유진동수를 소정의 고유진동수로 제어할 필요가 있을 경우에는 그림 4와 같은 $C_r\gamma_a$ 곡선을 이용하여 탄성받침의 기반계수를 결정하는 것이 합리적이다. 이 그림의 수직 축 ($\log_{10}1=0$)에서 $\gamma_a=1$ 이므로 탄성받침으로 지지되지 않은 자유-자유 보에 거의 수렴($\gamma_a=1 \Rightarrow 0$)한 보이다. 자유-자유 보의 제1, 2모드는 강제모드이므로 ○로 표시한 $C_1=C_2=0$ (Humar, 1990)이고, 제3, 4 모드는 ●로 표시한 $C_3=22.2$, $C_4=59.6$ 에 수렴하는 것을 알 수 있다. 여기서, Timoshenko 보의 $C_3=22.2$, $C_4=59.6$ 은 기본 보에 대한 $C_3=22.4$, $C_4=61.8$ (Paz, 1997)보다는 당연히 작게 산정되는 것을 확인할 수 있다.

그림 5는 무차원 고유진동수 C_i 와 무차원 탄성받침 길이 $\varepsilon_a(=\varepsilon_b)$ 사이의 고유진동수 곡선을 나타낸다. 수치해석에 사용한 보 변수를 그림 상단에 나타내었다. ε_a 가 증가하면 C_i 는 증가한다. $\varepsilon_a(=\varepsilon_b)=0.5$ 인 경우는 전구간이 탄성받침으로 지지되는 경우이다. 이 그림에서 ■의 좌표는 C_i 의 중복근을 갖는다. 예로서, 좌표 (0.416, 312)는 제3, 4모드의 중복근이다. 즉 $\gamma_a=\gamma_b$, $\varepsilon_a=\varepsilon_b$ 이면 대칭 보이기 때문에 $\varepsilon_a=0.416$ 에서 두 근 $C_3=C_4=312$ 는 중복근이며, 이때의 진동형상은 대칭진동 또는 역대칭진동이 된다. $\varepsilon_a(=\varepsilon_b)=0.5$ 에서도 $C_1=C_2=303$ 을 갖는다. $\varepsilon_a(=\varepsilon_b)=0$ 인 경우는 전구간이 탄성받침으로 지지되지 않은 자유-자유 보이므로 그림 4에서와 마찬가지로 ○로 표시한 제1, 2모드는 강제모드로 $C_1=C_2=0$ 이고, ●로 표시한 제3, 4모드는 $C_3=22.2$, $C_4=59.6$ 이다.

그림 6은 변위 η 와 휨 모멘트 및 전단력 (m , v)의 진동형상의 예를 나타낸다. 수치해석에 사용한 보는 대칭보이기 때문에 그림 5에서 이미 언급한 바와 같이 대칭진동 또는 역대칭진동이 된다. 변위 η 는 제1, 3모드가 대칭진동이 되고, 제3, 4모드가 역대칭진동이 된다. 휨 모멘트 m 은 제1, 3모드가 대칭진동이고, 제2, 4모드가 역대칭진동이며, 전단력 v 는 이와 반대이다. 이 그림과 같은 진동형상은 최대진폭, 무변위 및 무응력의 위치 등을 나타내 준다. 특히 최대 진폭의 위치에서 재료의 피로가 발생할 확률이 높으므로 그림 6과 같은 진동형상은 공용 중인 구조물의 유지보수에 필요한 동적 자료를 제공할 수 있다.

5. 결 론

이 논문은 양단이 탄성받침으로 지지된 Timoshenko 보의 자유진동에 관한 연구이다. 회전관성과 전단변형을 동시에 고려하는 Timoshenko 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식 및 경계조건을 유도하였다. 이 상미분방정식을 수치해석하여 고유진동수 및 진동형상을 산정하였다. 진동형상은 변위뿐만 아니라 구조물의 동적 해석에 필요한 전단력 및 휨 모멘트의 진동형상도 함께 산정하였다.

이 연구에서 산정한 고유각진동수의 타당성을 검증하기 위하여 SAP 2000의 결과와 비교하였다. 수치해석의 결과로 회전관성 및 전단변형이 고유진동수에 미치는 영향을 분석하였다. $C_r\lambda$ 곡선, $C_r\gamma_a$ 곡선, $C_r\varepsilon_a$ 곡선 등의 고유진동수 곡선을 그림에 나타내고, 이에 대한 변수특성들을 심도있게 분석하였다. 변위 및 합응력에 대한 진동형상의 예를 나타내어 최대진폭, 무변위 및 무응력의 위치를 나타내었다.

이 연구의 결과는 교량 등과 같이 양단이 탄성받침으로 지지된 구조물의 동적설계에 유용한 자료로 이용될 수 있기를 기대한다.

감사의 글

이 논문은 2011학년도 원광대학교 교내 연구비의 지원을 받았습니. 제1저자는 대학당국의 연구비 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- 이병구, 오상진, 박창은, 이태은(2011) 일정 표면적 변단면 보의 자유진동. 한국소음진동공학회논문집, 한국소음진동공학회, 제 21권 제1호, pp. 66-73.
- Alonso, R.L. and Riberio, P. (2008) Flexural and torsional non-linear free vibrations of beams using a p -version finite element. Computer & Structures, Vol. 86, Issues 11-12, pp. 1189-1197.
- Attarnejad, R., Semnani, S.J., and Shahba A. (2010) Basic displacement functions for free vibration analysis of non-prismatic Timoshenko beams. Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 46, Issue 10, pp. 916-929.
- Banerjee, J.R. (2003) Free vibration of sandwich beams using dynamic stiffness method. Computer & Structures Vol. 81, Issues 18-19, pp. 1915-1922.
- Calim, F.F. (2009) Free and forced vibrations of nonuniform composite beams. Composit Structures, Vol. 88, Issue 3, pp. 413-423.
- Carnahan, B., Luther, H.A., and Wilkes, J.O. (1969) Applied numerical methods. John Wiley and Sons, USA.
- Chen, W.Q., Lu, C.F., and Bian Z.G. (2004) A mixed method for bending and free vibration of beams resting on a Pasternak elastic foundation. Applied Mathematical Modelling, Vol. 28, Issue 10, pp. 877-890.
- Chopra, A.K. (2001) Dynamics of structures. Prentice-Hall, USA.
- Foda, M.A. (1999) Influence of shear deformation and rotatory inertia on nonlinear free vibration of beam with pinned ends. Computer & Structures, Issue 6, pp. 663-670.
- Ganesan R. and Zabihollah, A. (2007) Vibration analysis of tapered composite beams using higher-order finite element. Part I: Formulation. Composit Structures, Vol. 77, Issue 3, pp. 306-318.
- Humar, J.L. (1990) Dynamics of structures. Prentice-Hall, USA.
- Khalili, S.M.R., Jafari, A.A., and Eftekhari, S.A. (2010) A mixed Ritz-DQ method for forced vibration of functionally graded beams carrying moving loads. Composit Structures, Vol. 92, Issue 10, pp. 2497-2511.
- Kisa, M. and Gurel, M.A. (2007) Free vibration analysis of uniform and stepped cracked beams with circular cross section. International Journal of Engineering Science, Vol. 45, Issues 2-8, pp. 364-380.
- Lee, B.K., Jeong, J.S., Li, G.F., and Jin, T.K. (1999) Free vibrations of tapered piles embedded partially in Winkler type foundations. KSCE Journal of Civil Engineering, Vol. 3, No. 2, pp. 195-203.
- Lee, B.K., Oh, S.J., and Lee, T.E. (2002) Novel methods for calculating natural frequencies and buckling loads of columns with intermediate multiple elastic springs. International Journal of Structural Stability and Dynamics, Vol. 2, No. 4, pp. 559-571.
- Morfidis, K. (2010) Vibration of timoshenko beams on three-parameter elastic foundation. Computer & Structures, Vol. 88, Issues 5-6, pp. 294-308.
- Paz, M. (1997) Structural dynamics. Klüver Academic Publishers,

Netherlands.

Salmon, C.G. and Johnson, J.E. (1996) Steel structures. Harper Collins College Publisher, USA.

Timoshenko, S.P., Young, D.H., and Weaver, W. (1974) Vibration problems in engineering. Wiley & Sons, Inc., USA.

Yang, J., Chen, Y., Xiang, Y., and Jia, X.L. (2008) Free and forced

vibration of cracked inhomogeneous beams under an axial force and a moving load. Journal of Sound and Vibration, Vol. 312, Issues 1-2, pp. 166-181.

(접수일: 2010.12.29/심사일: 2011.2.16/심사완료일: 2011.3.16)