大 韓 土 木 學 會 論 文 集
第31卷 第1A號 · 2011年 1月
pp. 9 ~ 18

전단변형효과를 고려한 부분강절 평면뼈대구조의 안정성 해석

Stability Analysis of Shear-Flexible and Semi-Rigid Plane Frames

민병철* · 민동주** · 정명락*** · 김문영****
Min, Byoung Cheol · Min, Dong Ju · Jung, Myung Rag · Kim, Moon Young

Abstract

Generally the connection of structural members is assumed as hinge, rigid and semi-rigid connections. The exact tangent stiffness matrix of a semi-rigid frame element is newly derived using the stability functions considering shear deformations. Also, linearized elastic- and geometric-stiffness matrices of shear deformable semi-rigid frame are newly proposed. For the exact stiffness matrix, an accurate displacement field is introduced by equilibrium equation for beam-column under the bending and the axial forces. Also, stability functions considering sway deformation and force-displacement relations with elastic rotational spring on ends are defined. In order to illustrate the accuracy of this study, various numerical examples are presented and compared with other researcher's results. Lastly, shear deformation and semi-rigid effects on buckling behaviors of structure are parametrically investigated.

Keywords : *semi-rigid, shear deformation, frame, buckling, stability function, tangent stiffness matrix, elastic and geometric stiffness matrix*

요 지

구조부재의 연결은 강절(rigid), 활절(hinge) 그리고 부재 간의 상대적인 회전이 허용되는 부분강절(semi-rigid)로 구분될 수 있다. 본 연구에서는 부분강절을 탄성회전스프링으로 가정하여 부재 단부에 적용시킨 평면 뼈대구조에 대하여 전단변형을 고려한 엄밀한 접선강도행렬을 유도하고 이를 다시 탄성강도행렬과 기하학적 강도행렬로 분리?유도함으로써 부분강절을 갖는 평면 뼈대구조물의 안정성해석을 위한 일반화된 해석방법을 제시하고자 한다. 이를 위하여, 보-기둥부재의 좌굴조건을 만족시키는 처짐함수로부터 안정함수(stability function)를 유도하고, 횡변위(sway)를 고려한 힘-변위관계와 적합조건을 고려하여 정확한 접선강도행렬을 제시하였다. 본 연구의 타당성을 입증하고 부분강절 뼈대구조의 전단거동 특성을 파악하기 위하여, 다양한 수치해석 예제에 대해 타 연구자 해석 결과와 본 연구의 안정성 해석결과를 비교하여 제시함으로서 전단변형과 부분강절이 구조물의 좌굴강도에 미치는 영향을 조사한다.

핵심용어 : 부분강절, 전단변형, 뼈대구조, 좌굴, 안정함수, 접선강도행렬, 탄성 및 기하학적 강도행렬

1. 서 론

현재까지 강 뼈대구조물의 보다 정확한 구조적 거동과 종국강도를 파악하기 위하여 부재간의 연결부에 대하여 일정량의 회전이 허용되는 부분강절(semi-rigid)에 대한 연구가 활발히 진행되어 왔다. 즉, 부재 연결부에 탄성 회전스프링을 도입하여 강구조물의 연결부를 보다 실제에 가깝도록 이론화하고 부재의 전단변형을 추가로 고려함으로써 전단변형을 고려한 구조물의 시스템 좌굴강도를 파악하는 다양한 연구가 제시되었으며, 이제까지의 연구현황은 다음과 같다.

Saafan(1963)은 휨에 의한 축방향 변위의 변화를 고려하여 평면뼈대에 대한 강도행렬을 유도하였고, Oran(1973)은 이를 평면 및 공간 뼈대로 확장시켜 접선강도행렬을 유도하였다. Connor(1976)는 전단변형을 고려함으로써 더욱 일반화 시켰다. Essa(1993)는 비지지 다층 뼈대구조의 유효길이 산정방법을 제시하였고, Kato(1990)는 부분강절로 연결된 그물망 돔구조의 탄성좌굴 및 소성힌지 조건하에서의 좌굴해석을 수행하였으며 Banarjee와 Williams(1994)는 다양한 단면을 갖는 부분강절 뼈대구조의 좌굴강도에 대하여 전단변형효과를 분석하였다. 횡방향 지지 및 비지지조건의 부분강절 뼈대구조에 대한 K-factor가 Chen과 Lui(1987)에 의해 제시되었고, Kishi(1997)은 부분강절 뼈대구조에 대하여 보의 축력을 무시하고, 횡방향 지지 및 비지지에 대한 제한적인 엄밀해를 유도하였다. 또한 Chen과 Lui(1991)은 보-기둥 접합부의 스

*정회원 · 인덕대학 토목환경설계공학과 부교수 (E-mail : msilver@induk.ac.kr)
**성균관대학교 사회환경시스템공학과 석사과정
***성균관대학교 사회환경시스템공학과 석사과정
****정회원 · 교신저자 · 성균관대학교 사회환경시스템공학과 교수 (E-mail : kmye@skku.edu)

프링강성 추정식을 제시하고, 부분강절을 고려한 강뼈대 해석법을 제시하였다. Bridge와 Fraser(1987)는 유효좌굴길이 계산을 위한 반복계산법을 제안하였고, Li(2003)는 회전스프링 및 절점에 대한 병진스프링을 갖는 부분강절 뼈대구조의 근사해석방법을 제시하였고, 이러한 연구에 힘입어 최근 미국의 설계기준 LRFD(1999) 및 유럽 설계기준 Eurocode3 (2004)에도 채택되어 설계에 적용하는 단계에 까지 이르고 있다. 그러나 설계기준에 제시된 제안식은 건물의 내측부 즉, 보와 연결된 양쪽 기둥의 회전각이 같고 보에 발생하는 축력이 없어야 하는 제한적 범위 내에서만 적용 가능한 실무적 한계를 갖고 있다. 이러한 설계기준의 한계를 극복하기 위하여 Aristizabal Ochoa(2004)는 다양한 횡방향 지지된 부분강절 기둥부재에 대하여 전단변형을 고려한 좌굴강도를 제시하였고, Mageirou(2006)는 다양한 형태의 부분강절 및 경계조건에 대하여 등가의 부분강절 상수를 유도하고 이를 다시 개별 부재에 적용함으로써 근사적 부분강절 구조의 안정성해석과 유효길이를 산정하였다. Raftoyannis(2005)는 연립미분방정식을 이용하여 횡방향 지지 및 비지지 조건을 갖는 뼈대구조의 안정성해석을 수행하였고, Sekulovic(2001)은 부분강절 뼈대구조의 비선형 해석을 통해 대칭형 부분강절 구조의 좌굴하중을 제시하였다. Mao 등(2010)은 열을 고려한 반강절 보-기둥 접합부의 스프링 강성을 추정하는 연구를 수행하였다.

이제까지 부분강절분야에 대한 많은 연구가 수행되었으나 전단변형효과을 고려한 부분강절 뼈대구조의 엄밀한 접선강도행렬과 전단효과와 축력에 대한 매개변수의 이론적 연구가 다소 부족하였다고 판단된다.

따라서 본 연구에서는 전단이 무시된 부분강절부재의 강도행렬을 제시하고, 좌굴거동에 대한 매개변수연구를 제시하였던 민 등(2008)의 연구에 기초하여 이를 전단변형이 고려된 경우로 확장시키고자한다. 즉, 전단력-회전변위 관계로부터 전단변형을 정의하고, 안정함수를 처짐함수로 적용함으로써 엄밀한 부분강절 뼈대구조의 접선강도행렬을 유도하였으며 제시된 이론의 타당성을 검증하기 위하여 포트란 언어를 이용한 수치해석 프로그램을 개발하였다. 개발된 수치해석 프로그램은 엄밀한 처짐함수에 의한 접선강도행렬이 적용됨으로 수치모델링에서 부재 하나 당 하나의 요소만 적용하더라도 엄밀한 좌굴하중을 얻을 수 있으며 부재를 다수의 요소를 분할하는 경우 고유벡터를 이용하여 구조물의 좌굴형상을 얻을 수 있는 장점을 갖는다.

마지막으로, 본 연구의 타당성을 입증하기 위하여 몇 개의 해석 예제를 통해 타 연구자의 해석결과와 비교 · 검토하고, 전단변형 및 부분강절이 구조물의 좌굴강도에 미치는 영향에 대하여 조사하였다.

2. 전단변형효과를 고려한 강절뼈대요소

2.1 안정함수를 이용한 접선강도행렬

그림 1은 압축력 P를 받는 평면뼈대요소의 절점변위와 단면력을 나타낸 것이다. 여기서, U_x, U_y, ω, F_1, F_2 그리고 M은 각각 축방향 변위, 횡변위, 단면회전각, 축력, 전단력 그리고 휨모멘트를 나타낸다. 부재의 길이를 L로 하면, 절점

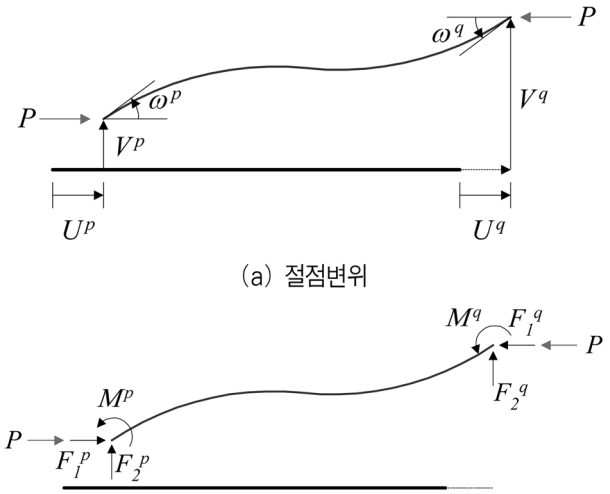


그림 1. 압축력을 받는 강절부재의 절점변위 및 단면력

변위 및 하중벡터는 각각 식 (1)과 (2)로 정의할 수 있다.

$$\mathrm{d} = \{U^p, V^p, \omega^p, U^q, \omega^q\}^T \tag{1}$$

여기서 $U^p = U_x(0)$, $U^q = U_x(L)$

$V^p = U_y(0)$, $V^q = U_y(L)$

$\omega^p = \omega(0)$, $\omega^q = \omega(L)$

그리고

$$\mathrm{f} = \{F_1^p, F_2^p, M^p, F_1^q, F_2^q, M^q\}^T \tag{2}$$

여기서 $F_1^p = -F_1(0)$, $F_1^q = F_1(L)$

$F_2^p = -F_2(0)$, $F_2^q = F_2(L)$

$M^p = -M(0)$, $M^q = M(L)$

부재의 축강성, 휨강성 그리고 전단강성을 각각 EA, EI, GA_s로 나타내면, 부재의 축방향, 휨 및 전단에 대한 힘-변위 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_1 = EAU_x' \tag{3}$$

$$M = -EI\omega' \tag{4}$$

$$F_2 = GA_s(U_y' - \omega) \tag{5}$$

여기서, A_s는 유효전단면적을 나타낸다. 이제 초기 압축력 P를 받고 휨 및 전단변형을 고려한 뼈대요소의 총 포텐셜에너지는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Pi = \int_0^L \frac{1}{2}\{EI\omega'^2 + GA_s(U_y' - \omega)^2 - PU_y'^2\}dx - f^T d \tag{6}$$

식 (6)에 총 포텐셜에너지의 변분원리를 적용하면 아래와 같이 평형미분방정식 (7)과 경계조건식 (8)을 얻을 수 있다.

$$EI\omega'' + GA_s(U_y' - \omega) = 0 \tag{7a}$$

$$[-GA_s(U_y' - \omega) + PU_y']' = 0 \tag{7b}$$

그리고,

$$U_y(0) = V^p, \quad -F_2(0) + PU_y'(0) = F_2^p \tag{8a,b}$$

$$U_y(L) = V^q, \quad -F_2(L) + PU_y'(L) = -F_2^q \tag{8c,d}$$

$$\omega(0) = \omega^p, \quad M(0) = M^p \tag{8e,f}$$

$$\omega(L) = \omega^q, \quad M(L) = -M^q \tag{8g,h}$$

연립 미분방정식 (7)의 해를 구하기 위하여 단면회전각을 소거하면 다음을 얻는다.

$$EI f_s U_y'''' + PU_y'' = 0 \tag{9a}$$

여기서,

$$f_s = 1 - \frac{P}{GA_s} \tag{9b}$$

식 (9)에서 f_s 영인 경우는 순수 전단력에 의한 좌굴이 발생하며 이때 전단좌굴하중과 대응하는 좌굴모우드는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$P_{cr} = GA_s \tag{10a}$$

$$U_y = x, \ \omega = 1 \tag{10b,c}$$

이제 식 (9)를 고려하여 식 (7)의 일반해는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$U_y = A\cos kx + B\sin kx + Cx + D \tag{11a}$$

$$\omega = kf_s(-A\sin kx + B\cos kx) + C \tag{11b}$$

여기서,

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI f_s}} \tag{11c}$$

이제 식 (11)을 식 (8)의 기하학적 경계조건에 적용하면 다음과 같다.

$$U_y(0) = V^p: A + D = V^p \tag{12a}$$

$$U_y(L) = V^q: A\cos kL + B\sin kL + CL + D = V^q \tag{12b}$$

$$\omega(0) = \omega^p : kf_s B + C = \omega^p \tag{12c}$$

$$\omega(L) = \omega^p : C - kf_s(A\sin kL - B\cos kL) = \omega^q \tag{12d}$$

식 (12)를 연립하여 미지 계수를 풀고, 식 (8)의 역학적 경계조건을 적용하면 양단에서의 재단모멘트와 전단력을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$M^p = \frac{EIkL}{L^2\phi} kL(1-\cos kL) f_s (V^p - V^q) \tag{13a}$$

$$+L(\sin kL - kLf_s\cos kL)\omega^p + L(kLf_s - \sin kL)\omega^q\}$$

$$M^q = \frac{EIkL}{L^2\phi}\{kL(1-\cos kL) f_s (V^p - V^q) \tag{13b}$$

$$+L(kLf_s - \sin kL)\omega^p + L(\sin kL - kLf_s\cos kL)\omega^q\}$$

$$F_2^p = \frac{F_1}{\phi}\{kf_s\sin kL(V^p - V^q) + (1-\cos kL)(\omega^p + \omega^q)\} \tag{13c}$$

$$F_2^q = -F_2^p \tag{13d}$$

여기서,

$$\phi = 2 - 2\cos kL - kL f_s \sin kL \tag{13e}$$

결국, 식 (13)으로부터 전단변형을 고려하고 양단이 모두 강절로 연결된 뼈대구조의 재단력-재단변위 관계를 다음과 같이 접선강도행렬 k_R로 나타낼 수 있다.

$$f = k_R(P)d \tag{14}$$

여기서,

$$k_R(P) = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot & -a & \cdot & \cdot \\ & b & c & \cdot & -b & c \\ & & d & \cdot & -c & e \\ & & & a & \cdot & \cdot \\ & & & & b & -c \\ sym. & & & & & d \end{bmatrix} \tag{15a}$$

그리고

$$a = EA/L, \quad b = 12\phi_1 EI/L^3$$
$$c = 6\phi_2 EI/L^2, \quad d = 4\phi_3 EI/L$$
$$e = 2\phi_4 EI/L \tag{15b}$$

또한 식 (14a)에서 '·'는 행렬성분이 0이 됨을 나타내며, 부재가 초기 압축력을 받는 경우에 식 (15)의 안정함수 ϕ_i는 다음과 같다.

$$\phi_1 = \frac{(kL)^3\sin kL}{12\phi} f_s^2, \ \phi_2 = \frac{(kL)^2(1-\cos kL) f_s}{6\phi}$$
$$\phi_3 = \frac{kL(\sin kL - kLf_s\cos kL)}{4\phi}, \ \phi_4 = \frac{kL(kLf_s - \sin kL)}{2\phi} \tag{16}$$

한편 효과적인 매개변수 연구를 위하여 초기 압축력과 전단변형효과를 표현하는 두 개의 매개변수를 각각 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\beta = L\sqrt{\frac{P}{EI}}, \ S = \frac{EI}{GA_s L^2} \tag{17a,b}$$

여기서 β^2과 S는 각각 길이 L의 제곱에 비례하고, 반비례하는 관계를 보임을 알 수 있다. 이는 축방향력을 받는 부재를 2 개 이상의 유한요소로 모델링함에 따라 β^2은 L^2의 속도로 빠르게 증가하고, 반면에 S는 빠르게 감소한다는 것을 의미한다. 또한, 전단강성이 매우 커서 전단효과가 무시되는 경우에 전단강성비 S는 영이 된다.

아울러 f_s, kL은 각각 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$f_s = 1 - S\beta^2, \ kL = \frac{\beta}{\sqrt{1 - S\beta^2}} \tag{18a,b}$$

한편, 부재가 초기 인장력을 받는 경우에는 식 (18)에 P 대신에 $-P$를 대입하는 결과가 되므로

$$f_s = 1 + S\beta^2, \ kL = \frac{\beta}{\sqrt{1 + S\beta^2}} \tag{19a,b}$$

을 얻고 식 (16)의 안정함수에 kL대신 $\sqrt{-1}kL$ 을 대입하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$\phi_1 = \frac{(kL)^3\sinh kL}{12\phi} f_s, \ \phi_2 = \frac{(kL)^2(\cosh kL - 1)}{6\phi} f_s$$
$$\phi_3 = \frac{kL(kLf_s\cosh kL - \sinh kL)}{4\phi}, \ \phi_4 = \frac{kL(\sinh kL - kLf_s)}{2\phi} \tag{20}$$

여기서

$$\phi = 2 - 2\cosh kL + kLf_s\sinh kL \tag{21}$$

2.2 축방향력에 관하여 선형화된 접선강도행렬

2.1절에에 제시된 강절 뼈대구조의 접선강도행렬 k_T는 엄밀한 안정함수를 이용하여 유도되었다. 그러나 초기 축방향력이 영에 가까워지면 안정함수가 수치적으로 불안정한 상태가되므로, 안정함수들을 축력에 관한 상수항 및 1차항으로 근사화 즉, 아래와 같이 접선강도행렬을 탄성강도행렬 k_E와 기하학적 강도행렬 k_G로 분리시킬 필요가 있다.

$$k_R(P) \cong k_E + k_G \tag{22}$$

이를 위하여, 식 (16)의 안정함수에 식 (18)을 대입하고 β^2의 1차 항까지 Taylor 전개를 행하면 압축을 받는 경우의 안정함수는 다음과 같이 근사적으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
\phi_1 &\cong \frac{1}{1+12S} - \frac{\beta^2}{10}\frac{1+20S+120S^2}{(1+12S)^2} \\
\phi_2 &\cong \frac{1}{1+12S} - \frac{\beta^2}{60}\frac{1}{(1+12S)^2} \\
\phi_3 &\cong \frac{1+3S}{1+12S} - \frac{\beta^2}{30}\frac{1+15S+90S^2}{(1+12S)^2} \\
\phi_4 &= \frac{1-6S}{1+12S} + \frac{\beta^2}{60}\frac{1+60S+360S^2}{(1+12S)^2}
\end{aligned} \tag{23}$$

한편, 인장의 경우는 β^2의 부호가 바뀌게 되므로 식 (23)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
\phi_1 &\cong \frac{1}{1+12S} + \frac{\beta^2}{10}\frac{1+20S+120S^2}{(1+12S)^2} \\
\phi_2 &\cong \frac{1}{1+12S} + \frac{\beta^2}{60}\frac{1}{(1+12S)^2} \\
\phi_3 &\cong \frac{1+3S}{1+12S} + \frac{\beta^2}{30}\frac{1+15S+90S^2}{(1+12S)^2} \\
\phi_4 &\cong \frac{1-6S}{1+12S} - \frac{\beta^2}{60}\frac{1+60S+360S^2}{(1+12S)^2}
\end{aligned} \tag{24}$$

이제 식 (23)과 (24)를 식 (15)에 대입하여 정리하면 식 (22)의 탄성 및 기하 강도행렬을 얻을 수 있다. 한편, 축방형력 P가 영인 경우에 식 (7)의 해를 구하여 경계조건 식 (8)을 적용하면 식 (26)와 같이 형상함수를 유도할 수 있다.

$$U_y = h_1 V^p + h_2 L\omega^p + h_3 V^q + h_4 L\omega^p \tag{25a}$$

$$L\omega = k_1 V^p + k_2 L\omega^p + k_3 V^q + k_4 L\omega^p \tag{25b}$$

여기서,

$$h_1 = (2\xi^3 - 3\xi^2 - 12S\xi + 1 + 12S)/(1+12S)$$

$$h_2 = \{\xi^3 - 2(1+3S)\xi^2 + (1+6S)\xi\}/(1+12S)$$

$$h_3 = (-2\xi^3 + 3\xi^2 + 12S\xi)/(1+12S)$$

$$h_4 = (\xi^3 - (1-6S)\xi^2 - 6S\xi)/(1+12S)$$

$$k_1 = (6\xi^2 - 6\xi)/(1+12S)$$

$$k_2 = \{3\xi^3 - 4(1+3S)\xi + 1 + 12S\}/(1+12S)$$

$$k_3 = (-6\xi^2 + 6\xi)/(1+12S)$$

$$k_4 = \{3\xi^2 - 2(1-6S)\xi\}/(1+12S),\ \ \xi = x/L \tag{26a-h}$$

여기서 식 (25)와 (26)을 식 (6)에 대입하여 x에 관하여 적분을 행하고, 이를 정리하여도 식 (22)의 탄성 및 기하강도행렬과 동일한 결과를 얻을 수 있다.

3. 부분강절 뼈대요소의 접선강도행렬

한편, 부재의 단부가 회전 스프링으로 연결된 부분강절(semi-rigid) 뼈대구조는 그림 2와 같이 정의되며, ω^p 와 ω^q 는 강절로 연결된 뼈대구조물의 절점 회전각을 나타내고, θ^p 와 θ^q 는 양단에 회전스프링 K^p와 K^q가 있는 경우에 발생되는 부재 양단의 회전각으로 다음과 같이 정의 된다.

$$\theta^p = \frac{M^p}{K^p},\ \ \theta^q = \frac{M^q}{K^q} \tag{27}$$

휨변형을 일으키는 네 개의 재단변위 성분을 각각의 경우에 대하여 차례로 적용시키고, 이러한 변위에 대응하는 재단력을 산정함으로써, 양단이 모두 회전스프링인 부분강절 뼈대구조의 접선강도행렬 k_T가 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$f = k_T(P) \cdot d \tag{28}$$

여기서

$$k_T(P) = \begin{bmatrix}
a & \cdot & \cdot & -a & \cdot & \cdot \\
 & b & c_1 & \cdot & -b & c_2 \\
 & & d_1 & \cdot & -c_1 & e \\
 & & & a & \cdot & \cdot \\
 & & & & b & -c_2 \\
sym. & & & & & d_2
\end{bmatrix} \tag{29}$$

그리고

$$a = EA/L$$

$$b = \frac{12EI}{L^3}\left[\phi_1 - \frac{3\phi_2^2(R_p + R_q + 8\phi_3 - 4\phi_4)}{D}\right]$$

$$c_1 = \frac{6EI}{L^2}\frac{\phi_2 R_p(R_q + 4\phi_3 - 2\phi_4)}{D}$$

$$c_2 = \frac{6EI}{L^2}\frac{\phi_2 R_q(R_p + 4\phi_3 - 2\phi_4)}{D}$$

$$d_1 = \frac{EI}{L}\frac{R_p[6\phi_2(4\phi_3 - 2\phi_4) + 4\phi_3 R_q]}{D}$$

$$d_2 = \frac{EI}{L}\frac{R_q[6\phi_2(4\phi_3 - 2\phi_4) + 4\phi_3 R_p]}{D}$$

$$e = \frac{2EI}{L}\frac{\phi_4 R_p R_q}{D} \tag{30}$$

여기서,

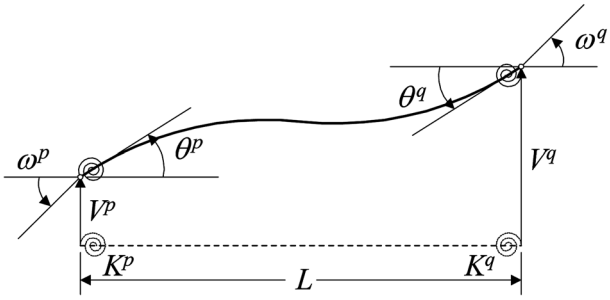


그림 2. 부분강절 뼈대구조 요소

$$D = R_p R_q + 4\phi_3(R_p + R_q) + 6\phi_2(4\phi_3 - 2\phi_4) \tag{31}$$

$$R_p = \frac{K^p L}{EI},\ R_q = \frac{K^q L}{EI} \tag{32}$$

식 (29)에서 단부가 강절인 경우는 대응하는 R값을 무한대로 보내고, 활절인 경우는 단순히 영을 대입하여 극한을 취하면 대응하는 변형된(degenerated) 접선강도행렬을 구할 수 있다.

강절뼈대요소의 경우와 마찬가지로 식 (16)과 식 (20)의 안정함수를 고려하여 식 (29)의 행렬성분에 적용하면, 다음과 같이 구조요소에 대한 탄성강도행렬 k_E와 기하학적 강도행렬 k_G를 다음과 같은 상수행렬로 분리하여 나타낼 수 있다.

$$k_T \cong k_E \mp P \cdot k_G \tag{33}$$

여기서,

$$k_E = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot & -a & \cdot & \cdot \\ & \hat{b} & \hat{c}_1 & \cdot & -\hat{b} & \hat{c}_2 \\ & & \hat{d}_1 & \cdot & -\hat{c}_1 & \hat{e} \\ & & & a & \cdot & \cdot \\ & & & & \hat{b} & -\hat{c}_2 \\ sym. & & & & & \hat{d}_2 \end{bmatrix} \tag{34}$$

$$k_G = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \tilde{b} & \tilde{c}_1 & \cdot & -\tilde{b} & \tilde{c}_2 \\ & & \tilde{d}_1 & \cdot & -\tilde{c}_1 & \tilde{e} \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \tilde{b} & -\tilde{c}_2 \\ sym. & & & & & \tilde{d}_2 \end{bmatrix} \tag{35}$$

그리고

$$\hat{b} = \frac{12EI}{L^3}\frac{Q_G}{D_M},\ \hat{c}_1 = \frac{6EI}{L^2}\frac{R_p(2+R_q)}{D_M}$$

$$\hat{c}_2 = \frac{6EI}{L^2}\frac{R_q(2+R_p)}{D_M},\ \hat{d}_1 = \frac{4EI}{L}\frac{R_p(3+R_q+3SR_q)}{D_M}$$

$$\hat{d}_2 = \frac{4EI}{L}\frac{R_q(3+R_p+3SR_p)}{D_M},\ \hat{e} = \frac{2EI}{L}\frac{R_p R_q}{D_M}$$

$$\tilde{b} = \frac{6F_1}{5LD_M^2}\{120 + 16Q_S(Q_S+5) + Q_T(10+7Q_S+Q_T) + 20SQ_G(Q_K+6SQ_G)\}$$

$$\tilde{c}_1 = \frac{F_1}{10}\frac{32R_p^2 + Q_T\{Q_T + 4(2R_p - R_q - 7)\} + 60SQ_T(R_p - R_q)}{D_M^2}$$

$$\tilde{c}_2 = \frac{F_1}{10}\frac{32R_p^2 + Q_T\{Q_T + 4(2R_q - R_p - 7)\} + 60SQ_T(R_p - R_q)}{D_M^2}$$

$$\tilde{d}_1 = \frac{2F_1}{15}\frac{LR_p^2(R_q^2 + 9R_q + 24) + 15SQ_T R_p(R_q + 6 + 6SR_q)}{D_M^2}$$

$$\tilde{d}_2 = \frac{2F_1}{15}\frac{LR_q^2(R_p^2 + 9R_p + 24) + 15SQ_T R_q(R_p + 6 + 6SR_p)}{D_M^2}$$

$$\tilde{e} = -\frac{F_1}{30}\frac{LQ_T[Q_T + 12Q_S + 84 + 60S\{3Q_S + Q_T(1+6S)\}]}{D_M^2} \tag{36}$$

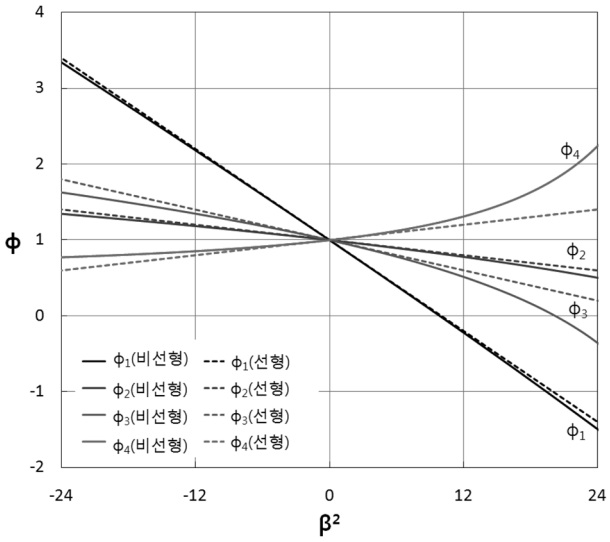
여기서

$$Q_S = R_p + R_q,\ Q_T = R_p R_q,\ Q_G = Q_S + Q_T$$

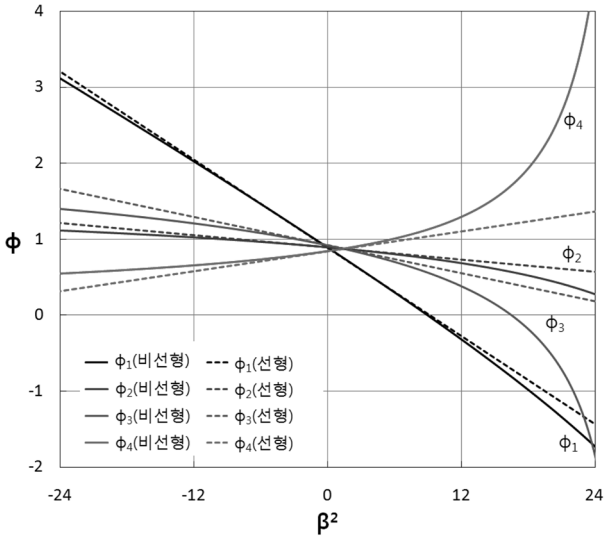
$$D_M = 12 + 4Q_S + Q_T + 12SQ_G \tag{37}$$

4. 수치해석

제시된 이론의 타당성 및 해석의 실용성 제고를 위해, 식 (29)의 접선강도행렬을 이용한 해석프로그램(*Method* 1)과 식 (34)과 식 (35)의 탄성강도 및 기하학적 강도행렬을 적용하여 만든 해석프로그램(*Method* 2)를 이용한다(민병철등 2008 참조). 즉, *Method* 1은 수치해석에서 구조물을 이루는 직선부재에 각각 하나의 요소만으로 정확한 좌굴고유치와 대응하는 좌굴모드를 얻을 수 있지만 비선형 좌굴해석 알고리즘을 적용하여야 한다. 한편, *Method* 2는 일반 유한요소해석과 같이 하나의 직선부재를 여러 개의 유한요소로 분할하여야 정확한 좌굴고유치를 얻을 수 있다. 또한, 강도행렬이 탄성강도 행렬과 기하학적 강도행렬로 분리되므로 표준적인 고유치해석법의 적용이 가능하다.



(a) S=0에 대한 안정함수



(b). S=0.01에 대한 안정함수

그림 3. 안정함수-β^2 관계곡선

4.1 안정함수와 좌굴파라메터 β^2

그림 3은 안정함수와 좌굴파라메터 사이의 관계와 전단변형의 영향을 파악하기 위하여, 식 (16), 식 (20), 식 (23) 그리고 식 (24)로부터 전단파라메터 S가 0.과 0.01인 경우에 β^2이 음(인장)에서 양(압축)으로 변화함에 따라 안정함수 ϕ_l의 변화를 선형(식 (23), (24))과 비선형(식 (16), (20))인 경우에 비교하여 나타내었다. 그림 3을 참조하여 비선형과 선형함수로 안정함수 값들을 산정할 때, 오차가 1% 이내로 정확도를 얻기 위한 β^2 값의 범위는 S가 0인 경우에(-4.51, 4.21), S가 0.01인 경우에 (-3.44, 3.15)이었다. 이것은 전단변형효과가 증가함에 따라 엄밀한 안정함수 대신에 식 (16), (20)의 선형 안정함수식으로 근사화하는 것은 오차가 커진다는 것을 의미한다. 따라서, 전단효과가 커지는 경우에 유한요소를 더욱 세분화하여 모델링할 필요가 있다.

4.2 다양한 경계조건을 갖는 표준기둥

그림 4는 다양한 경계조건을 갖는 기둥을 나타낸 것으로 전단변형을 무시한 좌굴하중 P_e와 전단변형을 고려한 좌굴하중 P_s를 Timoshenko(1961)의 결과를 함께 비교하여 표 1에 나타내었다.

표 1에 나타낸 바와 같이 수치해석 결과, 구조물차원의 좌굴해석이 가능한 본 연구의 결과와 단일부재의 해석만 가능한 Timoshenko의 이론해가 서로 잘 일치하였으며, 전단변형 효과를 파악하기 위하여 유효전단면적 A_s와 탄성 및 전단좌굴하중을 정규화하여 경계조건별로 좌굴특성을 그림 5에 제시하였다.

그림 5와 같이 탄성 및 전단좌굴하중을 정규화 시키는 경우, 고정-활절(Clamped-Pinned) 경계조건을 갖는 경우가 다른 경계조건과 비교해서 전단의 영향이 보다 크며 다른 경계조건의 경우 모두 동일한 결과가 나타났다. 한편, 직선 부재 당 하나의 요소만으로 정확한 해를 얻을 수 있는 *Method* 1과 유한개의 요소를 사용해야 하는 *Method* 2의 수렴성을 조사하기 위하여 경계조건이 고정-자유(Clamped-Free)인 경우에 대해 요소 수에 따른 좌굴해석 결과를 그림 6에 나타내었다. 그림으로부터 *Method* 2의 경우 직선부재에 각 4개의 요소를 적용하면 완전하게 수렴된 것으로 판단된다. 따라서 4.2절 이후의 모든 예제에 대해 *Method* 2를 사용하는 경우에는 4개의 요소분할을 적용한다.

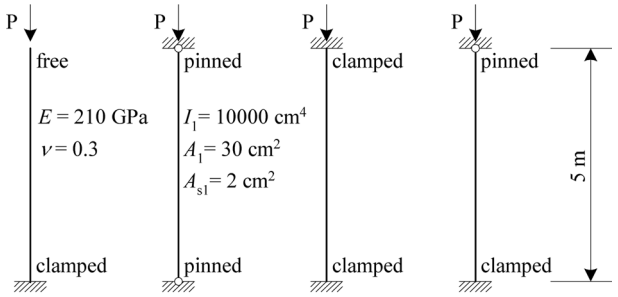


그림 4. 전단변형을 갖는 기중의 좌굴(S=0.052)

4.3 수직 및 수평하중을 받는 뼈대구조

본 예제에서는 단위 수직하중 P와 함께 다양한 크기의 수평하중을 받는 뼈대구조의 탄성좌굴 및 전단변형을 고려한 좌굴강도를 파악한다. 또한, 뼈대구조을 구성하는 보와 기둥의 연결부에 대하여 강절, 부분강절 및 활절인 세 가지 연

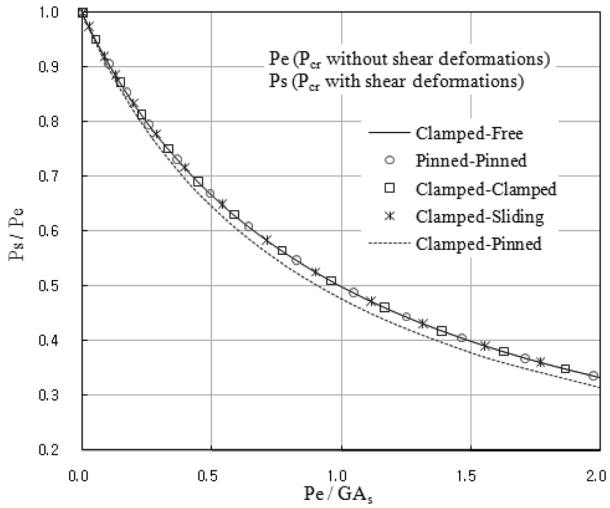


그림 5. 전단변형을 갖는 기둥의 좌굴

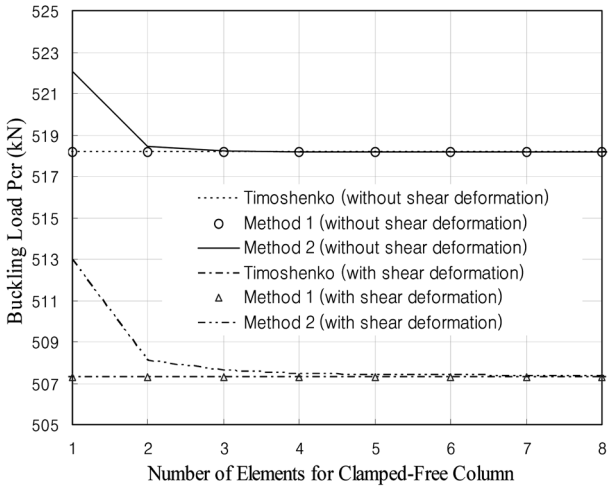


그림 6. 수평 및 수직하중을 받는 부분강절 뼈대구조

표 1. 표준 기둥의 좌굴하중(kN)

좌굴하중 / 경계조건	P_e (P_{cr} without shear deformations)			P_s (P_{cr} with shear deformations)		
	Timoshenko (1961)	Ochoa (2004)	본 연구	Timoshenko (1961)	Ochoa (2004)	본 연구
고정-자유	2072.6	2027.6	2072.6	1836.9	1858.7	1836.9
활절-활절	8290.5	8290.5	8290.5	5478.7	6035.5	5478.7
고정-고정	33162	33162	33162	10862	16437	10862
고정-활절	16960	16960	16960			15206

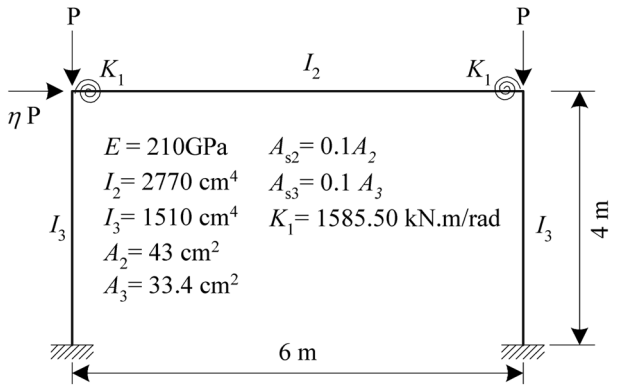


그림 7. 수평 및 수직하중을 받는 부분강절 뼈대구조(S=0.00735)

되며 유효전단단면적 A_s는 단면적 A의 10%를 취하였으다. 여기서 수평하중의 크기는 매개변수 η를 이용하여 ηP로 정의 된다. Sekulovic(2001)은 강절 및 활절 연결된 경우에 대하여 수직하중만을 받는 뼈대구조의 탄성좌굴하중을 산정하였으며 그 결과를 본 연구의 해석결과와 비교하여 표 2에 제시하였다.

그림 8과 그림 9는 표 2의 결과를 도표화한 것으로 수평하중 매개변수 의 변화에 따른 좌굴하중의 변화 특성을 보여준다. 강절, 부분강절, 활절 연결조건에 따라 η가 각각 4, 4.6, 6.3부근에서 좌굴하중의 변화율이 급격한 차이를 보이며 이 부분을 기준으로 왼쪽과 오른쪽이 각각 그림 10의 (a) 및 (b)에서와 같이 비대칭과 대칭 좌굴 형상으로 좌굴모드가 변화된다. 활절 연결인 경우, 일정한 구간(η=0~6)에 대하여 좌굴하중의 크기가 균일하게 얻어졌으며 강절 연결에 비해 전단변형 효과가 작은 것으로 나타났다. 그림 9는 수평하중의 크기에 따른 좌굴하중 비를 나타낸 것으로 수평하중이 커지는 경우, 급격하게 변화를 겪은 후 일정한 상태에 수렴하는 것을 알 수 있다.

4.4 다층구조를 갖는 부분강절 뼈대구조

그림 11은 한 층의 높이를 4 m로 일정하게 유지하고 층수를 변화시키며 강절, 부분강절 및 활절 연결을 갖는 다층 뼈대구조의 좌굴하중 및 전단변형 특성을 조사하였다. 여기서 부분강절에서 회전스프링은 Raftoyiannis(2005)에 의해 도입된 K_2로 정의된다.

층수가 높아짐에 따라 좌굴강도는 단조 감소하였으며 전단변형의 효과는 활절연결 구조에서 매우 작았고, 동일한 연결조건하에서는 고층보다는 저층 구조에서 전단변형효과가 다소 크게 나타남을 그림 12과 그림 13에서 확인할 수 있다.

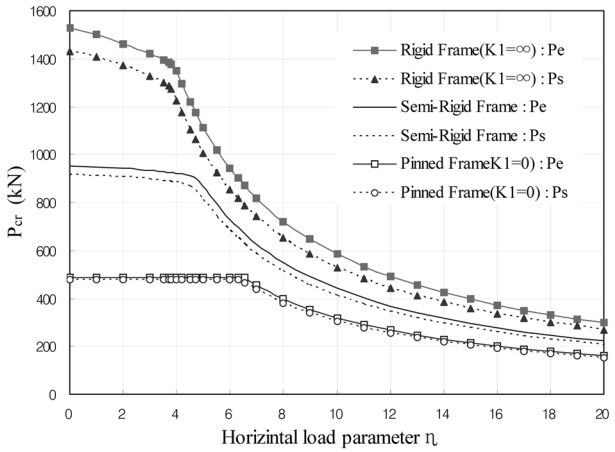


그림 8. 뼈대구조의 탄성좌굴 및 전단변형을 고려한 좌굴거동

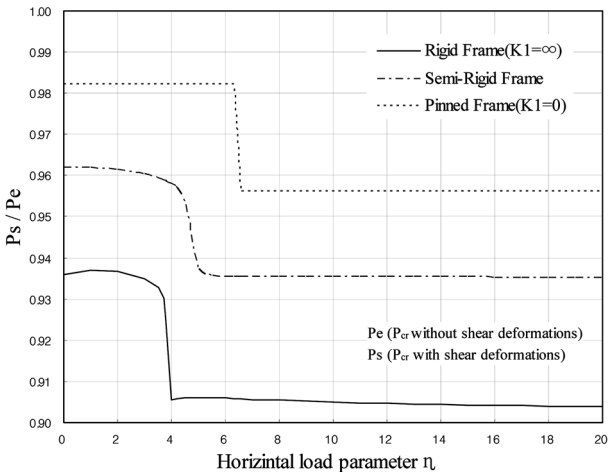
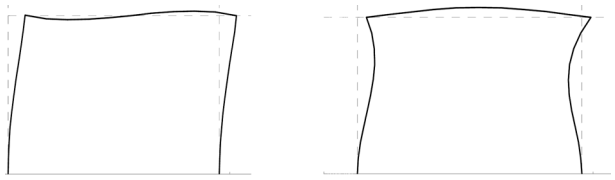


그림 9. 수평하중 파라미터의 영향



(a) $\eta = 0$ (b) $\eta = 10$

그림 10. 부분강절 뼈대구조의 좌굴형상(1st mode)

또한, Raftoyannis의 해석결과와 비교하기 위하여 1층인 경우에 대한 좌굴하중을 표 3에 제시하였으며 본 연구의 결과와 서로 잘 일치함을 알 수 있다. 여기서, Raftoyannis (2005)의 해석방법은 전체 구조물에 대한 시스템해석이 불가능하고 모든 부재를 등가의 개별부재로 분할해야하는 해석상의 단점을 갖는다.

표 2. 뼈대구조의 시스템 좌굴하중(kN)

η \ P_{cr}	Rigid		Semi-Rigid		Pinned	
	P_e	Ps	P_e	Ps	P_e	Ps
20	299.12	270.38	221.50	207.17	159.56	152.55
10	584.38	528.84	441.13	412.62	319.11	305.10
5	1111.3	1007.0	866.64	812.35	489.0	480.30
1	1500.5	1406.1	948.15	912.11	489.01	480.30
0	1529.9	1431.8	952.59	916.36	489.01	480.30
Sekulovic, η=0	1530				489	

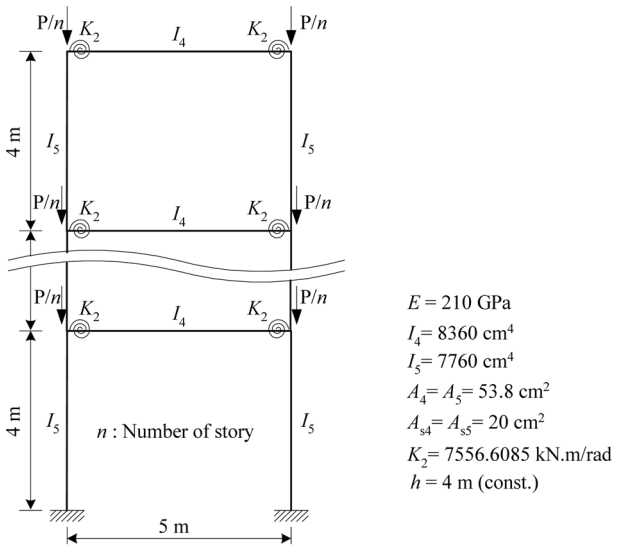


그림 11. n층을 갖는 부분강절 뼈대구조(S=0.0063)

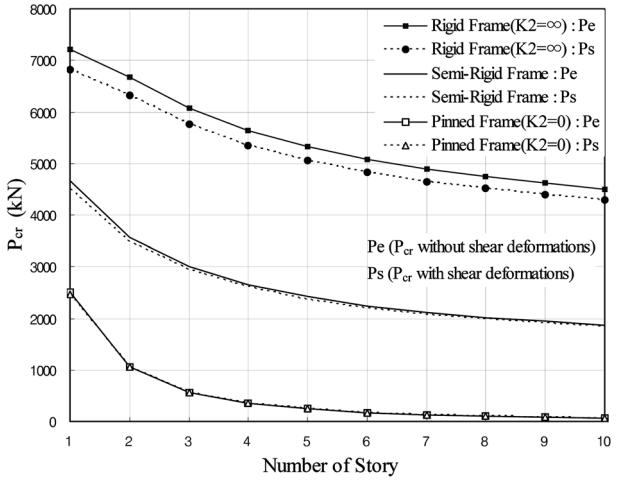


그림 12. n층 뼈대구조의 좌굴하중

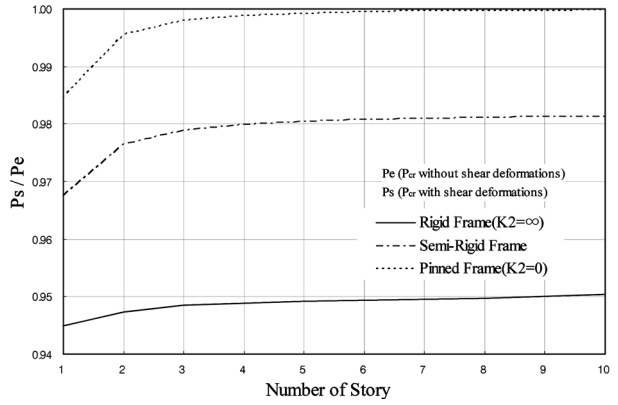


그림 13. 층 수에 따른 전단/탄성 좌굴하중 비

4.5 경사 기둥을 갖는 부분강절 뼈대구조

그림 14는 다양한 기둥의 경사각을 갖으며 기둥과 보의 길이는 각도 변화에 관계없이 각각 10 m와 20 m로 일정한 강절 또는 활절로 연결된 뼈대구조물을 나타낸다. 수직하중 P를 단위하중으로 재하하고, 경사각 θ를 0°를 90°까지 변화시키는 경우 기둥과 보에 발생하는 축력의 변화는 그림 15와 같다. 각도가 증가할수록 보와 기둥의 축력은 급속히 증가하며 크기가 서로 같아짐을 알 수 있다. 그림 16은 각도변화에 따른 시스템 좌굴하중을 나타낸 것으로, 경사각 θ가 27° 근처에서 최대 좌굴강도가 나타나며 구체적인 수치는 표 4에 제시하였다. 또한, 그림 17에서 강절연결 부재가 부분강절에 비해 전단의 효과가 크게 나타나고 있음을 확인할 수 있다.

표 4. 기둥 경사각에 따른 뼈대구조의 좌굴하중(kN)

θ \ P_{cr}	Rigid		Semi-Rigid	
	P_e	P_s	P_e	P_s
0°	924.646	859.890	410.189	396.788
20°	1408.18	1317.60	658.708	637.576
40°	1313.92	1234.60	651.040	630.446
60°	816.709	768.212	417.160	404.013
80°	267.799	251.917	138.038	133.688

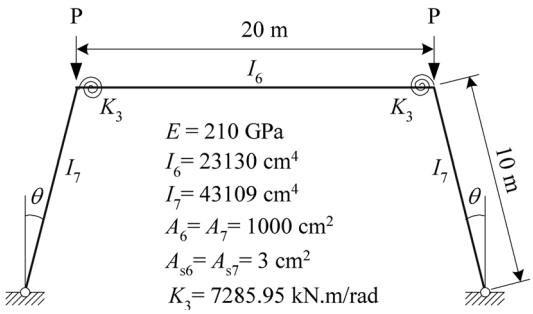


그림 14. 경사진 기둥(S=0.2335)을 갖는 부분강절 뼈대구조

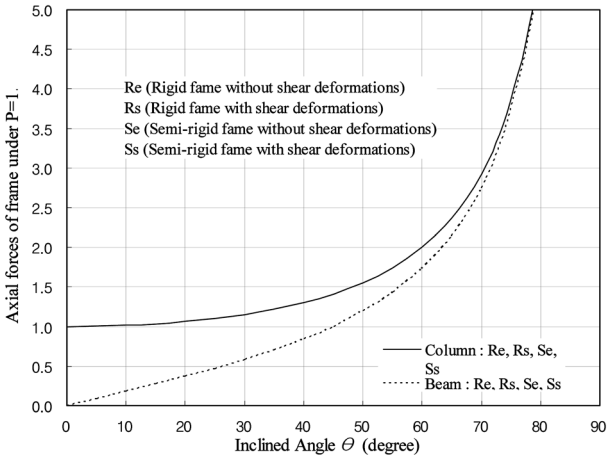


그림 15. 기둥 기울기에 따른 부재의 축력변화

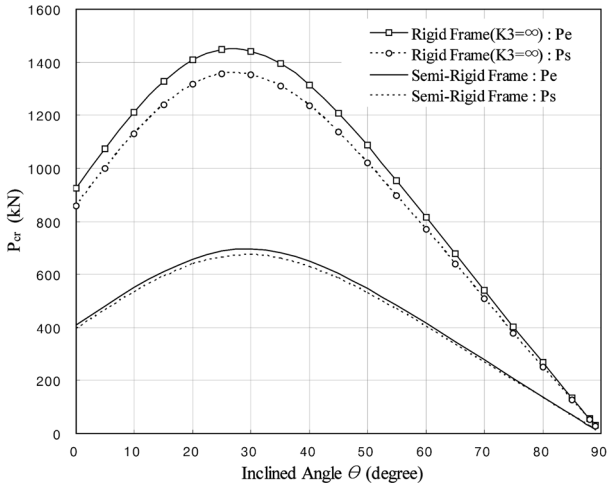


그림 16. 경사진 기둥을 갖는 뼈대구조의 좌굴하중

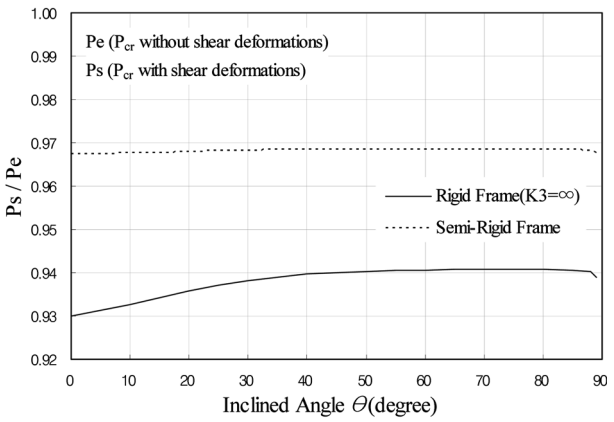


그림 17. 경사각 변화에 따른 전단/탄성 좌굴하중비

표 3. 층 수에 따른 뼈대구조의 좌굴하중(kN)

P_{cr} n(층)	Rigid		Semi-Rigid		Pinned	
	P_e	P_s	P_e	P_s	P_e	P_s
10	4503.4	4280.1	1875.5	1840.5	69.083	69.068
5	5323.1	5052.4	2418.4	2371.1	241.50	241.31
4	5639.2	5351.2	2659.1	2605.6	353.88	353.45
3	6077.3	5764.2	3011.8	2948.0	567.59	566.41
2	6663.7	6312.8	3572.5	3488.4	1052.7	1048.2
1	7214.3	6816.5	4654.3	4503.1	2513.0	2474.6
Raftoyiannis (n=1)	7244		4658			

5. 결 론

현재까지 부분강절 뼈대구조에 대한 많은 연구가 진행되었으나 대부분의 연구는 해석 구조물에 있어서 "보(수평부재)에 발생하는 축력이 없거나 보와 연결된 기둥의 단부 회전각은 보의 양단에서 그 크기가 같다"는 가정을 도입하여 좌굴강도를 산정하는 것이 일반적이다. 이러한 문제점을 극복하기 위해 제시된 최근의 연구결과들 역시 구조물 차원의 해석이 불가능하여 구조물을 구성하는 부재를 모두 등가의 개별부재로 취급하여 좌굴강도를 산정해야하는 단점을 갖고 있었다.

본 연구에서 제시된 해석이론 및 방법은 위에서 언급된 현재까지의 해석적 한계를 상당히 극복하였다고 판단되며 그 내용을 요약하면 다음과 같다.

1. 전단변형을 고려한 보-기둥부재의 좌굴조건을 만족시키는 처짐함수로부터 안정함수(stability function)를 유도하였다.
2. 전단변형을 고려한 안정함수를 이용하여 일반화된 부분강절 뼈대구조의 엄밀한 접선강도행렬(식 (29))을 제시하였다.
3. 엄밀한 안정함수(식 (16), (20))가 이용되므로 수치해석 시 직선부재 하나에 1개의 요소만으로 모델링해도 정확한 해석결과(좌굴하중 및 모우드)를 얻을 수 있다.
4. 양단 모두 부분강절인 경우뿐만 아니라 한 쪽 단만 부분강절인 비대칭 구조에 대하여 접선강도행렬과 탄성 및 기하학적 강도행렬을 유도함으로서 임의의 형상 및 다양한 연결조건을 갖는 부분강절 뼈대 구조물의 좌굴해석이 가능하도록 일반화시켰다.
5. 엄밀한 접선강도행렬 k_T로부터 탄성강도행렬 k_E와 기하학적강도행렬 k_G를 분리 · 유도함으로써 전단변형이 고려된 부분강절 뼈대구조물의 안정성해석을 위한 일반화된 해석이론을 제시하였다.

감사의 글

본 연구는 인덕대학의 교내연구비에 의해 수행되었으며 연구지원에 대하여 깊은 감사를 드립니다.

참고문헌

민병철, 경용수, 김문영(2008) 부분강절로 연결된 평면뼈대구조의 엄밀한 접선강도행렬 및 안정성 해석프로그램 개발, **한국강구조학회논문집**, 한국강구조학회, 제20권, 1호, pp. 81-92.

Banerjee, J.R. and Williams, F.W. (1994) The effect of shear deformation on the critical bukling of columns, *J. Sound and Vibration*, Vol. 174, No. 5, pp. 145-168.

Bathe, K. (1993) *Finite element methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, pp. 110-113.

Bridge, R.Q. and Fraser, D.J. (1987) Improved G-factor method for evaluating effective lengths of Columns, *J. Struct. Eng. ASCE*, Vol. 113, pp. 1341-1356.

Chen, W.F. and Lui, E.M. (1987) *Structural Stability*, Elsvier Science Publishing Co., New York.

Chen, W.F. and Lui, E.M. (1991) *Stability Design of Steel Frames*, CRC Press, Inc., pp. 235-342.

Connor, J.J. (1976) *Analysis of Structural Member Systems*, the Ronald Press Company, New York, pp. 585-603.

Essa, H.S. (1976) Stability of columns in unbraced frames, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 123, pp. 952-959.

Eurocode 3. (2004) *Design of steel structures Part 1.1*: General rules for buildings. CEN Brussels 2004, CEN Document EN 1993-1-1.

Kato, S., Mutoh, I., and Shomura, M. (1998) Collapse of semi-rigid jointed reticulated domes with initial geometric imperfections, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 48, pp. 145-213.

Kishi, N., Chen, W.F., and Goto, Y. (1997) Effective length factor of columns in semi-rigid and unbraced frames, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 123, No. 3, March, pp. 313-320.

Li, Q.S. and Mativo, J. (2000) Approximate estimation of the maximum load of semi-rigid steel frames, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 54, pp. 213-238.

LRFD (1999) *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*. Chicago : American Institute of Steel Construction Inc. USA.

Mageirou, G.E. and Gantes, C.J. (2006) Buckling strength of multistory sway, non-sway and partially-sway frames with semi-rigid connections, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 62, August, pp. 893-905.

Mao CJ, Chiou YJ, Hsiao PA, Ho MC. (2010) The stiffness estimation of steel semi-rigid beam–column moment connections in a fire, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 66, pp. 680-694.

Oran, C. (1973) Tangent stiffness in space frames, *Journal of Structural Division*, ASCE, Vol. 99, No. ST6, June, pp. 987-1001.

Ochoa Aristizabal, J.D. (2004) Column stability and minimum lateral bracing : effects of shear deformations, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 130, pp. 1223-1232.

Raftoyannis, I.G (2005) The effect of semi-rigid joints and an elastic bracing system on the buckling load of simple rectangular steel frames, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 61, pp. 1205-1225.

Saffan, S.A. (1963) Non-linear behavior of structual plane frames, *Journal of Structural Division*, ASCE, Vol. 89, No. ST4, August, pp. 557-579.

Sekulovic, M. and Salatic, R. (2001) Nonlinear analysis of frames with flexible connections, Computer & Structures, Vol. 79, pp. 1097-1107.

Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. (1961) *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill Book Co.

(접수일: 2010.11.25/심사일: 2011.1.10/심사완료일: 2011.1.13)