

## 일정표면적 기둥의 좌굴하중

### Buckling Loads of Column with Constant Surface Area

이병구\* · 박광규\*\* · 이태은\*\*\*

Lee, Byoung Koo · Park, Kwang Kyou · Lee, Tae Eun

#### Abstract

This paper deals with buckling loads of the column with the constant surface area. The shape function of variable column depth is chosen as the linear taper. The ordinary differential equation governing buckled shapes of the column is derived based on the dynamic equilibrium equation of such column subjected to an axial load. Three kinds of end constraint of hinged-hinged, hinged-clamped and clamped-clamped are considered in numerical examples. Effects of the column parameters on buckling loads are extensively discussed. Especially, section ratios of the strongest column are calculated, under which the maximum, i.e. strongest, buckling loads are achieved. Also the buckled shapes are obtained for searching the nodal points where the inner transverse supports are simply installed to increase the buckling loads.

**Keywords** : buckling load, column, constant surface area, strongest column, buckled shape

#### 요 지

이 연구는 일정표면적 기둥의 좌굴하중에 관한 연구이다. 기둥단면의 변화깊이의 형상함수로는 선형 변단면을 채택하였다. 이러한 기둥의 좌굴형상을 지배하는 상미분방정식을 유도하기 위하여 축방향 압축력을 받는 기둥의 동적 평형방정식을 이용하였다. 수치해석 예에서는 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정의 지지조건을 고려하였다. 수치해석의 결과로 각종 기둥변수들이 좌굴하중에 미치는 영향을 분석하였다. 특히, 일정표면적으로부터 최대 좌굴하중을 발생시킬 수 있는 기둥의 최강단면비와 그에 대응하는 최강좌굴하중을 산정하였다. 기둥 축에 횡방향 내부지점을 설치하여 좌굴하중을 증가시킬 수 있는 무변위 위치를 찾기 위하여 기둥의 좌굴형상을 산출하였다.

**핵심용어** : 좌굴하중, 기둥, 일정표면적, 최강기둥, 좌굴형상.

#### 1. 서 론

기둥은 보, 곡선부재, 평판 등과 더불어 가장 기본적인 구조단위 중에 하나이므로 토목, 건축, 기계 등 각종 구조공학 분야에서 뼈대구조로 이용되고 있다. 기둥문제에서 가장 기본적인 과제는 무엇보다도 좌굴하중을 산정하는 문제이다. 구조물의 설계에서 변단면은 구조물의 자중을 줄이고 작용 하중에 대한 내하력을 증진시킬 수 있을 뿐만 아니라 미적 감각, 경제적 측면 등 다양한 목적 때문에 변단면의 이용은 날로 증가하는 추세이다. 구조물의 제약조건으로부터 최대 내하력을 갖는 구조물의 최적형상을 찾는 문제는 전통적으로 매우 중요한 연구과제 중에 하나이다(Rao, 1996). 또한 구조물의 일정제약으로부터 최적형상을 찾는 결과는 당연히 변단면이다(이병구 등, 2009).

기둥에 관한 연구는 지난 수십 년간 많은 논문들이 발표되고 있지만 이 연구와 직접관련이 있는 기하적 제약조건을

갖는 변단면 기둥에 관한 연구동향을 고찰하면 다음과 같다. Keller와 Niordson(1966)은 일정량의 재료로 만들어진 기둥 중에서 좌굴이 발생하지 않는 가장 긴 기둥 길이를 갖는 최강기둥에 대하여 연구하였다. Taylor(1967)는 에너지 이론을 이용하여 일정량의 재료로 만들어진 길이가 같은 기둥 중에서 가장 큰 좌굴하중을 갖는 최강기둥에 대하여 연구하였다. Wilson *et al.*(1971)은 삼각형 단면을 갖는 최강기둥의 변화 단면 깊이의 형상함수에 대하여 연구하였다. Cox와 Overton(1992)은 좌굴에 대한 최적단면 형상에 대하여 연구하였다. Lee와 Oh(2000)는 일정체적 기둥에 대하여 대변형 이론을 이용하여 좌굴하중을 산정하였다. 김영일(2003)은 일정체적을 갖는 변단면 보의 정적 최적형상에 대하여 연구하였다. Lee *et al.*(2005)은 전단변형을 고려한 변단면 기둥의 정확탄성곡선 및 좌굴하중을 산정하였다. Lee *et al.*(2006)은 일정체적 기둥의 좌굴하중을 산정하였다. 이상에서 고찰한 바와 같이 기둥의 최강단면에 관한 연구는 모두 기둥의 일정체적을 제

\*정회원 · 교신저자 · 원광대학교 토목환경공학과 교수 (E-mail : bkleest@wku.ac.kr)

\*\*정회원 · 대전대학교 토목공학과 교수 (E-mail : kkpark@dju.ac.kr)

\*\*\*정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 연구교수 (E-mail : telee@wku.ac.kr)

약조건으로 하고 있다. 구조물의 일정체적으로부터 최대 내하력을 찾는 문제도 중요한 연구과제이지만 일정표면적을 갖는 구조물의 제약조건으로부터 최대 내하력을 찾는 문제도 중요한 연구과제 중에 하나이다. 이러한 관점에서 이 연구는 일정표면적을 갖는 기둥의 좌굴하중을 산정하는 수치적 기법을 개발하고 그 결과로부터 기둥의 최대 좌굴하중을 갖는 최강기둥의 형상을 찾는 연구이다. 이 논문에서 최강기둥은 '일정표면적을 갖는 기둥에서 가장 큰 좌굴하중을 갖는 기둥'으로 정의한다.

이 연구에서 기둥의 기하적 제약조건은 직사각형 중실단면을 갖으며 앞에서 언급한 바와 같이 기둥의 표면적은 일정하다. 기둥의 변화단면은 여러 가지 형상함수가 가능하지만 이 연구에서는 선형 변단면으로 국한하였다. 이러한 기둥의 좌굴형상을 지배하는 상미분방정식을 압축하중이 작용하는 기둥의 동적 평형방정식을 이용하여 유도하였다. 유도한 상미분방정식을 수치해석하여 좌굴하중을 산정할 수 있는 수치해석법을 개발하였다. 이 연구의 결과를 검증하기 위하여 등단면의 좌굴하중을 문헌 값과 비교하였다. 기둥의 각종 변수연구를 통하여 좌굴하중에 미치는 영향을 분석하고 그 결과로부터 최대 좌굴하중을 갖는 최강기둥의 최강단면비와 최강좌굴하중을 산정하였다. 실제의 수치해석 예에서는 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정의 세 가지 지점조건을 택하였다.

이 연구에서 이론 전개를 위하여 적용한 기본가정은 다음과 같다:

- 1) 기둥은 이상기둥이다.
- 2) 기둥재료는 선형탄성체이다.
- 3) 미분방정식의 유도는 미소변형 이론에 의한다.
- 4) 미분방정식의 유도에서 전단변형효과는 고려하지 않는다.

## 2. 일정표면적 부재의 단면성질

그림 1은 이 연구에서 대상으로 하고 있는 부재를 나타낸다. 부재 길이는  $l$ 이고 표면적은  $s$ 이며, 항상 일정하다. 이 그림에서 직교좌표계  $x$ 는 부재의 축방향 좌표를 나타내고,  $d_x$ 는 부재의 변화 단면깊이를 나타낸다. 부재 양단 ( $x=0$  및  $x=l$ )에서  $d_x=d_a$ 이고 부재 중앙( $x=l/2$ )에서  $d_x=d_m$ 이다.  $d_x$ 는 부재 중앙에 대하여 대칭이다. 부재의 단면형상은 직사각형 단면이다.  $A_x$ ,  $I_x$ 는 부재의 축방향 좌표  $x$ 에서 단면적 및 단면2차모멘트이다.

변화 단면깊이를 표현해주는 형상함수  $F(x/l)$ 를 정의하기 위하여 단면비  $r$ 을 다음과 같이  $d_a$ 에 대한  $d_m$ 비로 나타낸다.

$$r = \frac{d_m}{d_a} \quad (1)$$

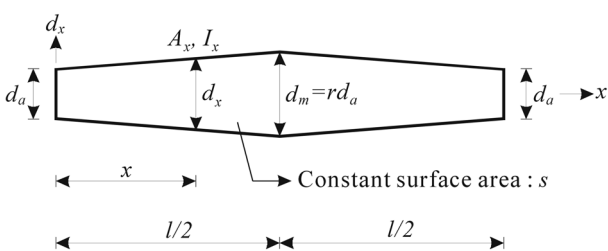


그림 1. 일정표면적 변화 단면깊이 부재

변화 단면깊이  $d_x$ 는 단부( $x=0$ )의 단면깊이  $d_a$ 와 형상함수  $F(x/l)$ 를 이용하면 다음 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$d_x = d_a F\left(\frac{x}{l}\right) \quad (2)$$

식 (2)에서 형상함수  $F(x/l)$ 는 대수적으로 매우 많은 함수식들이 가능하지만 이 연구에서는 다음과 같은 선형 변단면의 형상함수를 채택하였다.

$$F = 2(r-1)\frac{x}{l} + 1, \quad 0 \leq \frac{x}{l} \leq 0.5 \quad (3.1)$$

$$F = 2(1-r)\frac{x}{l} + 2r - 1, \quad 0.5 \leq \frac{x}{l} \leq 1 \quad (3.2)$$

식 (3)에서  $F = F(x/l)$ 이다.

이 연구에서 기하적 제약조건인 일정표면적  $s$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$s = \int_0^l d_a F dx = k d_a l \quad (4.1)$$

$$k = \frac{1}{2}(r+1) \quad (4.2)$$

식 (4)로부터  $d_a$ 를 일정표면적  $s$ 로 나타내면 다음과 같다.

$$d_a = \frac{s}{kl} \quad (5)$$

따라서 식 (2)와 식 (5)를 이용하면 변화 단면깊이  $d_x$ 를 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$d_x = \frac{s}{kl} F \quad (6)$$

이제  $x$ 좌표에서 변화 단면깊이  $d_x$ 가 식 (6)과 같이 정의되었으므로 부재의 단면폭을  $w$ 라 하면 일정표면적 부재 단면의  $A_x$  및  $I_x$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$A_x = w d_x = \frac{ws}{kl} F \quad (7)$$

$$I_x = \frac{w d_x^3}{12} = \frac{1}{12} \frac{ws^3}{k^3 l^3} F^3 \quad (8)$$

## 3. 수학적 모형

### 3.1 동적 평형방정식

그림 2에서 실선은 기둥의 좌굴하중  $B$ 보다 작은 축방향 압축력  $P (< B)$ 를 받고 있는 전좌굴기둥을 나타낸다. 기둥의 양단은 회전 또는 고정지점으로 지지되어 있다. 이 기둥의 단면성질인  $d_x$ ,  $A_x$ ,  $I_x$ 는 앞장에서 이미 정의되었다.

기둥의 좌굴형상을 지배하는 상미분방정식을 유도하기 위하여 자유진동하는 기둥의 동적 평형방정식을 이용하였다. 그림 2에서 점선은 압축하중  $P$ 를 받고 있는 자유진동하는

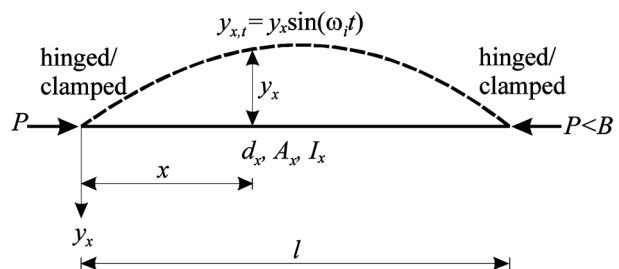


그림 2. 압축력을 받는 기둥의 진동형상

기둥의 진동형상을 나타낸다. 기둥의 자유진동을 조화진동으로 가정하면 기둥의 동적 변위  $y_{x,t}$ 는 다음과 같은 조화진동 식으로 나타낼 수 있다(Tedesco et al., 1999).

$$y_{x,t} = y_x \sin(\omega_i t), i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (9)$$

여기서  $y_x$ 는 그림 2에서와 같이 조화진동의 진폭이고  $x$ 만의 함수이다.  $\omega_i$ 는 고유각진동수(rad/sec)이고,  $t$ 는 시간이다.  $\omega_i$ 에서  $i(=1, 2, 3, 4, \dots)$ 는 진동형상의 모드번호이다.

축방향력을 받는 변단면 보/기둥의 자유진동을 지배하는 동적 평형방정식은 다음과 같다(Tedesco et al., 1999).

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI_x \frac{\partial^2 y_{x,t}}{\partial x^2} \right) + P \frac{\partial^2 y_{x,t}}{\partial x^2} + \rho A_x \frac{\partial^2 y_{x,t}}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

위식에서  $E$ ,  $\rho$ 는 기둥 재료의 탄성계수 및 질량밀도이고, 축방향력  $P$ 는 압축력이 '+'이다.

식 (10)에서  $A_x$ ,  $I_x$ 는 식 (7), (8)과 같이  $x$ 만의 함수이고,  $y_{x,t}$ 는 식 (9)와 같이  $x$ ,  $t$ 의 함수이므로 식 (10)은 다음과 같이 전개된다.

$$\left[ EI_x \frac{d^4 y_x}{dx^4} + 2E \frac{dI_x}{dx} \frac{d^3 y_x}{dx^3} + E \frac{d^2 I_x}{dx^2} \frac{d^2 y_x}{dx^2} + P \frac{d^2 y_x}{dx^2} - \rho \omega_i^2 A_x y_x \right] \sin(\omega_i t) = 0 \quad (11)$$

위의 식 (11)을  $d^4 y_x / dx^4$ 에 대하여 정리하면 축방향력을 받는 변단면 기둥의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{d^4 y_x}{dx^4} - \frac{2}{I_x} \frac{dI_x}{dx} \frac{d^3 y_x}{dx^3} - \left( \frac{1}{I_x} \frac{d^2 I_x}{dx^2} + \frac{P}{EI_x} \right) \left( \frac{d^2 y_x}{dx^2} + \rho \omega_i^2 \right) \frac{A_x}{EI_x} y_x \quad (12)$$

위의 상미분방정식에서  $dI_x/dx$  및  $d^2 I_x/dx^2$ 는 식 (8)로부터 다음과 같이 산정할 수 있다.

$$\frac{dI_x}{dx} = \frac{1ws^3}{4k^3 l^3} F \frac{dF}{dx} \quad (13.1)$$

$$\frac{d^2 I_x}{dx^2} = \frac{1ws^3}{4k^3 l^3} \left[ 2F \left( \frac{dF}{dx} \right)^2 + F^2 \frac{d^2 F}{dx^2} \right] \quad (13.2)$$

### 3.2 무차원 미분방정식의 유도

이 연구에서 기둥의 좌굴형상을 지배하는 상미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음 식들과 같은 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = \frac{x}{l} \quad (14)$$

$$\eta = \frac{y_x}{l} \quad (15)$$

$$\alpha = \frac{s}{l^2} \quad (16)$$

$$p = \frac{\pi^2 P}{EA_a} \quad (17)$$

$$b_i = \frac{\pi^2 B_i}{EA_a} \quad (18)$$

$$C_i = \omega_i l \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (19)$$

여기서  $(\xi, \eta)$ 는 무차원 직교좌표계,  $\alpha$ 는 표면적 비,  $p$ ,  $b_i$

는 무차원 하중 및 좌굴하중,  $C_i$ 는 무차원 고유진동수이다. 위 식에서  $A_a$ 는  $x=0$ 에서 단면적이다.

식 (12)에 식 (7), (8), (13)을 대입하고, 무차원 변수식 (14)~(19)를 이용하면 압축력을 받는 기둥의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = -\frac{6df d^3 \eta}{fd\xi d\xi^3} \left[ \frac{3d^2 f}{fd\xi^2} + \frac{6\left(\frac{df}{d\xi}\right)^2}{f^2 d\xi^2} + \frac{12k^2 p}{\pi^2 \alpha^2 f^3} \right] \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \frac{12k^2 C_i^2}{\alpha^2 f^2} \eta \quad (20)$$

여기서  $f=f(\xi)$ 의 무차원 형상함수이며, 식 (3), (14)에 의하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$f = 2(r-1)\xi + 1, 0 \leq \xi \leq 0.5 \quad (21.1)$$

$$f = 2(1-r)\xi + 2r - 1, 0.5 \leq \xi \leq 1 \quad (21.2)$$

위의 상미분방정식 (20)에 포함되어 있는 미분항  $df/d\xi$  및  $d^2 f/d\xi^2$ 는 식 (21)로부터 다음과 같이 산정할 수 있다.

$$\frac{df}{d\xi} = 2(r-1), 0 \leq \xi \leq 0.5 \quad (22.1)$$

$$\frac{df}{d\xi} = 2(1-r), 0.5 \leq \xi \leq 1 \quad (22.2)$$

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = 0 \quad (23)$$

이 연구에서는 형상함수를 선형 변단면으로 택하였기 때문에 식 (23)과 같이  $d^2 f/d\xi^2 = 0$ 이 되지만 선형 변단면 이외의 형상함수에 대해서는  $d^2 f/d\xi^2 \neq 0$ 이다. 기둥에 작용하는 압축력  $p$ 가 증가하면 무차원 고유진동수  $C_i$ 는 감소하고,  $p$ 가 증가하여 무차원 좌굴하중  $b_i$ 에 도달하면  $C_i = 0$ 이 되고 기둥은 좌굴하여 정적 상태가 된다. 여기서  $b_i$ 의 첨자  $i(=1, 2, 3, 4, \dots)$ 는 좌굴형상의 모드번호이다. 따라서  $C_i = 0$ 이 되는  $p$ 가  $b_i$ 가 된다. 이러한  $p$ 와  $C_i$  사이의 관계를 이용하면 기둥의 좌굴형상  $\eta$ 를 지배하는 상미분방정식을 유도할 수 있다(Lee et al., 2006). 즉, 자유진동을 지배하는 상미분방정식인 식 (20)에  $C_i = 0$ 를 대입하고  $p$ 를 고유치  $b_i$ 로 대체하면 기둥의 좌굴형상을 지배하는 무차원 상미분방정식을 식 (24)와 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = -\frac{6df d^3 \eta}{fd\xi d\xi^3} \left[ \frac{3d^2 f}{fd\xi^2} + \frac{6\left(\frac{df}{d\xi}\right)^2}{f^2 d\xi^2} + \frac{12k^2 b_i}{\pi^2 \alpha^2 f^3} \right] \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \quad (24)$$

### 3.3 경계조건

회전지점( $x=0$  또는  $x=l$ )에서 변위  $y_x=0$ 이고, 휨모멘트  $EI_x(d^2 y_x/dx^2) = 0$ 이므로 식 (14), (15)의 무차원 변수를 이용하면 회전지점( $\xi=0$  또는  $\xi=1$ )의 무차원 경계조건식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\eta = 0 \quad (25)$$

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = 0 \quad (26)$$

고정지점( $x=0$  또는  $x=l$ )에서 변위  $y_x=0$ 이고, 회전각  $dy_x/dx = 0$ 이므로 식 (14), (15)의 무차원 변수를 이용하면 고정지점( $\xi=0$  또는  $\xi=1$ )의 무차원 경계조건을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\eta = 0 \quad (27)$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 0 \quad (28)$$

참고로 위에 기술되어 있는 식 (25)~(28)의 경계조건들은 식 (20)의 자유진동을 지배하는 상미분방정식뿐만 아니라 식 (24)의 좌굴형상을 지배하는 상미분방정식에도 모두 적용될 수 있다.

#### 4. 수치해석 방법

##### 4.1 수치해석 과정

위에서 유도한 기둥의 자유진동을 지배하는 상미분방정식 (20) 및 좌굴을 지배하는 상미분방정식 (24)를 경계조건식 (25)~(28)에 적용하여 수치해석하면 무차원 고유진동수  $C$ 와 무차원 좌굴하중  $b$ 를 계산할 수 있다. 식 (20), (24)의 상미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta 법(Dahlquist *et al.*, 1974)을 이용하였고, 미분방정식들의 고유치인  $C_i$ ,  $b_i$ 는 비선형 방정식의 해법인 Regula-Falsi 법(Dahlquist *et al.*, 1974)을 이용하였다. 이 연구에서 이용한 이러한 상미분방정식의 수치적분과 비선형 방정식의 해를 구하는 문제들은 다수의 문헌들(Lee and Wilson, 1990; Lee and Oh, 2000; Lee *et al.*, 2006)에서 그 효율성이 입증된 바 있으므로 수치해석 과정의 상세한 기술은 생략한다.

기둥의 자유진동문제에서는 단면비  $r$ , 표면적 비  $\alpha$ , 무차원 압축하중  $p$  및 지점조건의 변수들을 입력하면 무차원 고유진동수  $C_i$ 를 계산할 수 있는 프로그램과 좌굴문제에서는  $p$ 를 제외한  $r$ ,  $\alpha$  및 지점조건을 입력하면 무차원 좌굴하중  $b_i$ 를 계산할 수 있는 컴퓨터 프로그램 2개를 각각 작성하였다.

수치해석 예제에서 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정의 지점조건에 대하여  $C_i$  및  $b_i$ 를 계산하였다. 고정-회전의 지점조건은 부재가 중앙지간에 대하여 대칭이므로 고정-회전의 수치적 결과는 회전-고정과 같다. 이러한 사실은 실제 수치해석 예를 통하여 검증할 수 있었지만 여기서는 검증 예를 보이지 않았다.

이 연구는 기둥의 좌굴하중 산정이 목적이므로 좌굴하중 문제에서  $b_i$ 는  $i=1, 2, 3, 4$ 의 제4모드까지 산정하였지만 자유진동문제에서  $C_i$ 는  $i=1$ 인 제1모드만을 계산하였다. 또한 수치적분의 결과로 얻어지는 기둥의 좌굴형상을 산출하여 좌굴된 기둥의 무변위 위치를 결정할 수 있도록 하였다.

##### 4.2 수렴해석

수치해석 결과의 정도를 확보하기 위하여 수렴해석을 실시하였다. 수치해의 정도는 상미분방정식을 수치적분하기 위한 Runge-Kutta 법에서 단계길이  $\Delta\xi$ 와 밀접한 관계가 있다. 그림 3은 무차원 고유진동수  $C_1$  및 무차원 좌굴하중  $b_1$ 과 지간길이의 분할개수  $1/\Delta\xi$  사이의 관계 즉, 수렴해석의 결과를 나타낸다. 그림 상단에 수치해석에 이용한 지점조건, 단면비  $r$ , 표면적 비  $\alpha$ 를 표시하였다. 이 그림에서와 같이  $C_1$  및  $b_1$ 은  $1/\Delta\xi=20$  즉  $\Delta\xi=0.05$ 에서 충분한 정도로 수렴하였다. 이후의 수치해석에서는 정확도를 더욱 확보하기 위하여  $1/\Delta\xi=50$ 으로 수치해석을 실시하였다. 이 경우에 수치해들은  $1/\Delta\xi=100$ 와 비교하여 유효숫자 3자리의 정도를 갖는다.

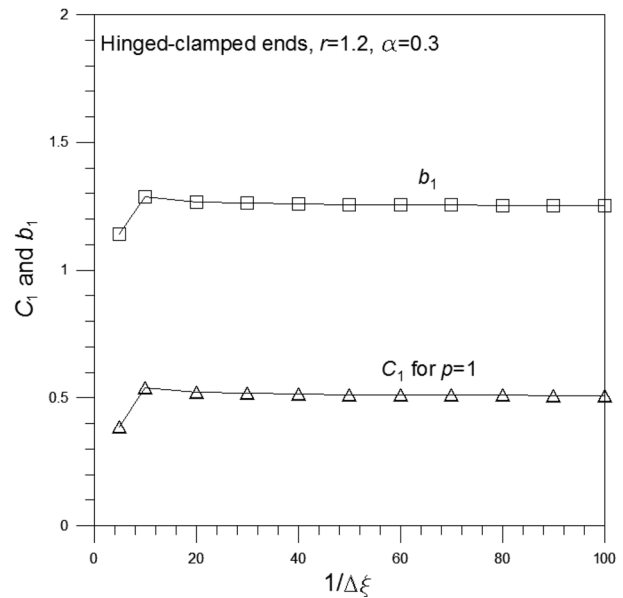


그림 3. 수렴해석

표 1. 등단면 기둥( $r=1$ )의 좌굴하중  $B_i$  비교\*

지점 조건	자료 출처	좌굴하중, $B_i$ (kN)		
		$i=1$	$i=2$	$i=3$
h-h	이 연구	617	2,468	5,552
	문헌**	617	2,467	5,552
h-c	이 연구	1,262	3,730	7,431
	문헌***	1,262	3,730	7,431
c-c	이 연구	2,467	9,870	22,213
	문헌**	2,467	9,870	22,207

\* $l=1$  m,  $s=0.05$  m<sup>2</sup>,  $d_o=d_m=0.05$  m,  $w=0.03$  m,  $E=200$  GPa ( $r=1$ ,  $\alpha=0.05$ ,  $b_1=3.29 \times 10^{-5} B_1$ )

\*\*Timoshenko and Gere, 1963

\*\*\*이수곤, 1999

#### 4.3 검증

표 1은 이 연구에서 산정한 좌굴하중을 검증하기 위하여 문헌(이수곤, 1999; Timoshenko and Gere, 1963)의 좌굴하중  $B_i$ (kN)와 비교한 표이다. 일정표면적을 제약조건으로 하는 기둥의 좌굴하중 산정은 이 논문이 최초이기 때문에 개방문헌에서 변단면 기둥( $r \neq 1$ )의 비교는 불가능하므로 등단면 기둥( $r=1$ )의  $B_i$ 를 비교하였다. 비교에 사용한 기둥의 제원과 무차원 변수를 표 1 아래에 기술하였다. 이 표에서와 같이 두 결과는 유효숫자 3자리까지 일치하여 이 연구에서 전개한 이론 및 수치해석 방법이 모두 타당함을 검증할 수 있었다. 참고로, 이 표에서 'h'는 회전지점, 'c'는 고정지점을 나타내며, 이후 같은 의미이다.

#### 5. 수치해석 예 및 토의

좌굴하중에 관한 수치해석 예를 보이기 전에 먼저 무차원 압축하중  $p$ 와 무차원 고유진동수  $C$ 의 관계를 그림 4에 나타내었다. 그림 상단에 수치해석에 이용한 기둥의 지점조건(회전-고정) 및 무차원 변수( $r=1.2$ ,  $\alpha=0.3$ )를 표시하였다. 이 그림의 수치해석 예를 보이기 위하여 식 (20)에 나타낸 자

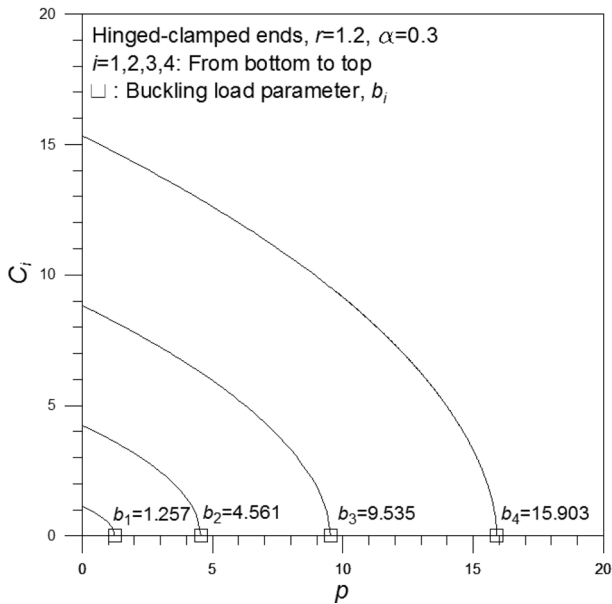


그림 4.  $C_i - p$  곡선

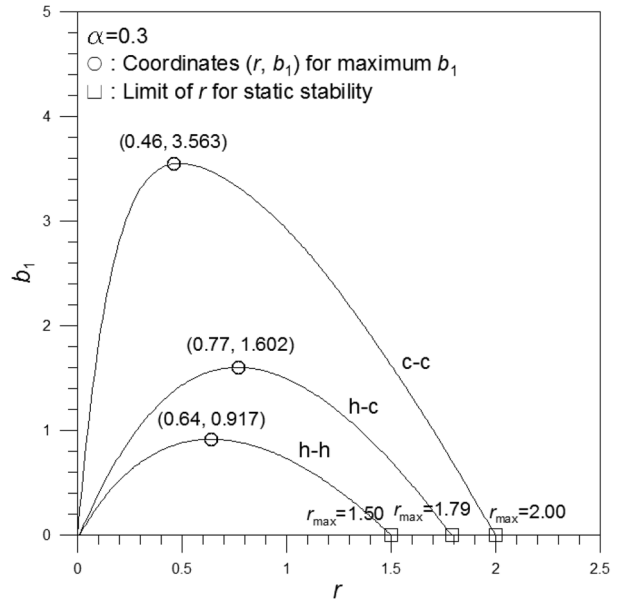


그림 5.  $b_1 - r$  곡선

표 2. 지점조건별 무차원 좌굴하중 ( $\alpha = 0.3$ )

$r$	지점 조건	무차원 좌굴하중, $b_i$			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
0.8	h-h	0.877	2.593	6.075	10.36
	h-c	1.600	4.217	7.812	12.99
	c-c	3.284	5.299	10.31	15.66
1.2	h-h	0.495	3.184	6.882	12.72
	h-c	1.257	4.561	9.535	15.90
	c-c	2.459	6.510	12.68	19.24

유진동을 지배하는 상미분방정식을 이용하였다. 여기서 보는 바와 같이  $p$ 가 증가하면  $C_i$ 는 감소하고,  $p$ 가 증가하여 무차원 좌굴하중  $b_i$ 에 도달하면  $C_i=0$ 이 되어 기둥은 드디어 좌굴하여 정적 상태로 되는 현상을 보여준다. 이 그림에  $C_i=0$  되는  $b_i$ 를 수평축인  $p$ 축 위에  $\square$ 로 표시하고 그 크기를 나타내었다. 예로서 제1무차원 좌굴하중  $b_1=1.257$ 이다. 이러한 관계로부터 식 (20)의 자유진동을 지배하는 상미분방정식에  $C_i=0$ 를 대입하고 이에 대응하는  $p$ 를  $b_i$ 로 대체하면 기둥의 좌굴형상을 지배하는 식 (24)의 상미분방정식이 유도되는 것을 알 수 있다. 기둥의 좌굴이  $p=b_i$ 에서 일단 발생하면  $i=2, 3, 4, \dots$ 의  $b_i$ 는 기둥 축에 횡방향 변위를 억제하는 내부 지점을 무변위 위치에 설치하여야만 가능하다. 이러한 문제에 대해서는 그림 7에서 다시 토의한다. 이후의 무차원  $b_i$ 는 식 (24)의 상미분방정식을 이용하여 산정하였다.

표 2는 표면적 비  $\alpha=0.3$ 에 대한 지점조건별 무차원 좌굴하중  $b_i$ 를 나타내며,  $b_i$ 는 지점조건에 큰 영향을 받는다. 예 상한 바와 같이  $b_i$ 는 고정-고정(c-c)>회전-고정(h-c)>회전-회전(h-h)의 순서로 크다. 예로서  $r=0.8$ 의 경우에 고정-고정의  $b_1$ 은 회전-회전에 비하여  $3.74(=3.284/0.877)$ 배로 크고,  $r=1.2$ 에 대해서는  $4.97(=2.459/0.495)$ 배로 크다. 등단면( $r=1$ )인 경우에 그 비는 4로서 문헌(Timoshenko and Gere, 1963)의 결과와 같다.  $i=1$ 인 경우에  $r<1$ 의  $b_1$ 이  $r>1$ 의  $b_1$ 이 더 크다. 따라서 제1좌굴하중이 중요한 기둥의 설계에서는  $r$ 을 1보다 작게 설계하는 것이 유리하다. 그러나  $i=2$ 이상의

표 3. 안정영역  $r_{max}$ 와 최강기둥의 단면비 및 좌굴하중 ( $r_s, b_s$ )

$\alpha$	지점 조건	$r_{max}$	최강기둥의 ( $r_s, b_s$ )	
			$r_s$	$b_s$
0.1	h-h	1.50	0.64	0.102
	h-c	1.70	0.77	0.178
	c-c	2.00	0.46	0.397
0.2	h-h	1.50	0.64	0.408
	h-c	1.79	0.77	0.712
	c-c	2.00	0.46	1.586
0.3	h-h	1.50	0.64	0.917
	h-c	1.79	0.77	1.602
	c-c	2.00	0.46	3.563
0.4	h-h	1.50	0.64	1.629
	h-c	1.79	0.77	2.848
	c-c	2.00	0.46	6.341
0.5	h-h	1.50	0.64	2.545
	h-c	1.79	0.77	4.449
	c-c	2.00	0.46	9.908

$b_i$ 에 대해서는  $r>1$ 의  $b_i$ 가 언제나 크다. 이상의 결과는 이 표에서 보인  $\alpha=0.3$  뿐만 아니라  $\alpha=0.3$  이외의 모든  $\alpha$ 에 대해서도 성립한다.

그림 5는  $\alpha=0.3$ 인 경우에 단면비  $r$ 과 제1무차원 좌굴하중  $b_1$  사이의 관계를 나타낸다.  $b_1$ 은  $r$ 이 증가함에 따라 증가하다가 최대값  $b_1$ 을 보인 후에 다시 감소하여  $b_1=0$ 을 보이고 이후의  $r$ 에 대해서는 기둥은 정적으로 불안정하다. 따라서  $b_1$ 이 최대가 되는  $r$ 이 최강단면비  $r_s$ 가 되며 이때의  $b_1$ 이 무차원 최강좌굴하중  $b_s$ 가 된다. 이 그림에  $(r_s, b_s)$ 의 좌표를  $\circ$ 로 표시하였다. 예로서 회전-회전 기둥에서 최강기둥의  $r_s=0.64, b_s=0.917$ 이 된다. 이 그림에서  $b_1=0$ 이 되는 기둥의 최대 안정영역인  $r_{max}$ 의 좌표를  $\square$ 로 표시하였다. 예로서 회전-회전 기둥의  $r_{max}=1.50$ 이며 따라서  $0<r<1.50$ 의 범위에서 기둥은 정적으로 안정하여 압축하중을 받을 수 있다. 한편,

$r > 1.50$ 의 불안정 영역이 되면 하중이 재하되는 즉시 기둥은 좌굴한다. 따라서  $r > 1.50$ 인 기둥에 대해서는 무변위 위치에 횡방향 변위를 제약하는 내부지점을 설치하여야만 압축하중을 받을 수 있다.

표 3은 표면적 비  $\alpha$ 별 안정영역  $0 < r < r_{max}$ 의  $r_{max}$ 와 최강기둥의 ( $r_s$ ,  $b_s$ )를 나타낸 표이다. 이 표에서 그림 5에 나타낸  $\alpha=0.3$ 에 대한 결과를 확인할 수 있다.  $\alpha$ 가 증가함에 따라  $r_{max}$ ,  $r_s$ 는 변화가 없다. 즉 모든  $\alpha$ 에 대하여  $r_{max}$ ,  $r_s$ 는 일정하다. 그러나 예상한 바와 같이  $\alpha$ 가 증가하면  $b_s$ 는 증가한다.

그림 6은  $r=1.2$ 에 대한 표면적 비  $\alpha$ 와 무차원 좌굴하중  $b_1$  사이의 관계를 나타낸다. 이 그림에서 보는 바와 같이  $\alpha$ 가 증가하면  $b_1$ 은 증가한다.  $\alpha$ 와  $b_1$  사이의 관계를 회귀분석하여 포물선 방정식으로 표현되는 무차원 좌굴하중 방정식  $b_1 = a\alpha^2$ 을 결정하고, 지점조건별로  $b_1 = a\alpha^2$ 의 계수  $a$ 를 그림에 나타내었다. 지점조건별 3개의 좌굴하중 방정식에서  $\alpha$ 와  $b_1$  사이는 모두 완전상관 관계를 가졌다.

표 4는 그림 5에서 나타낸 단면비  $r=1.2$  이외의 단면비에

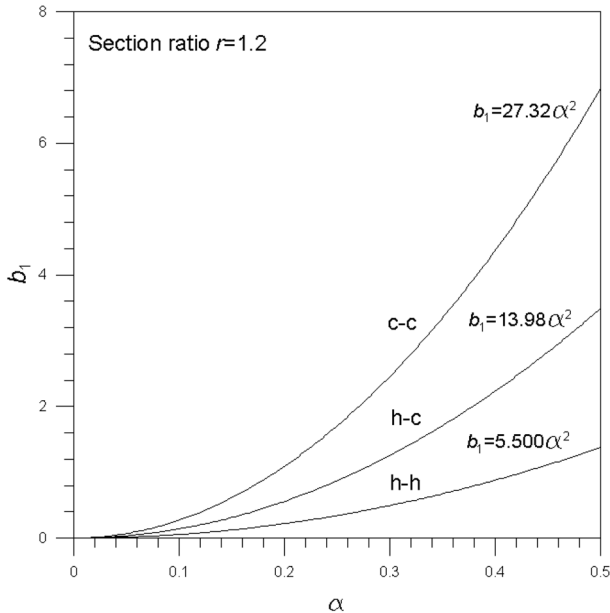


그림 6.  $b_1 - \alpha$  곡선

표 4. 무차원 좌굴하중 방정식,  $b_1 = a\alpha^2$

$r$	$b_1 = a\alpha^2$ 의 계수		
	h-h	h-c	c-c
0.2	5.80	8.37	31.26
0.4	9.00	14.14	36.74
0.6	10.15	17.10	38.92
0.8	9.74	17.77	36.49
1.0	8.12	16.61	32.47
1.2	5.50	13.98	27.32
1.4	2.03	10.12	21.32
1.6	불안정영역 ( $r_{max}=1.50^*$ )	5.31	14.69
1.8		불안정영역 ( $r_{max}=1.79^*$ )	7.56
2.0			0.00

\*그림 5에서  $r_{max}$  참조

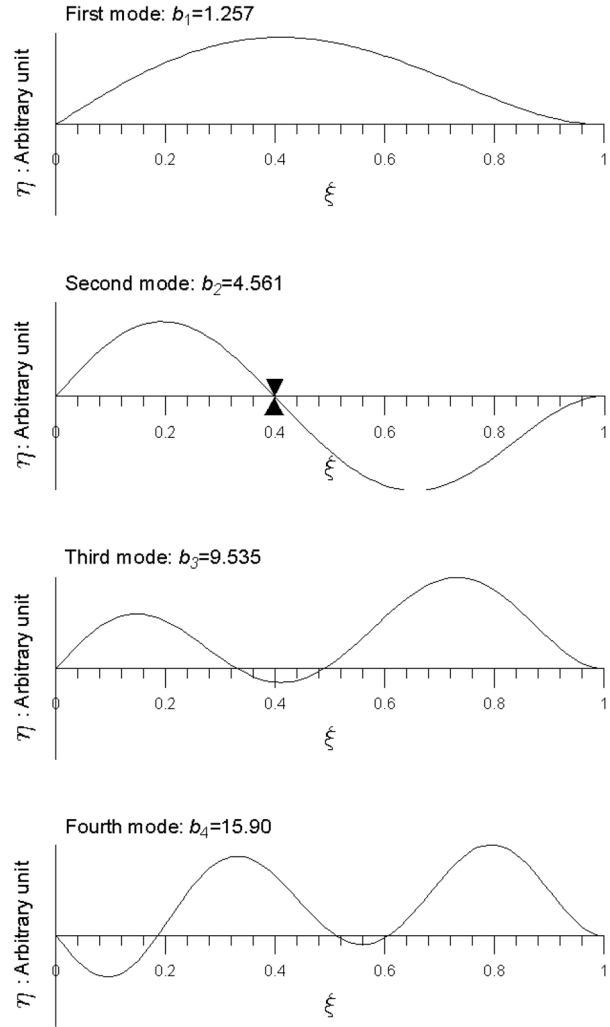


그림 7. 좌굴형상의 예 (회전-고정,  $r = 1.2$ ,  $\alpha = 0.3$ )

대하여 지점조건 별로 단면비의 안전영역 내에서  $b_1 = a\alpha^2$ 의 계수  $a$ 의 값을 수록한 표이다. 이와 같은 좌굴하중 방정식을 이용하면 표면적 비  $\alpha$ 에 대한 좌굴하중을 용이하게 산출할 수 있다.

그림 7은 좌굴된 기둥의 좌굴형상의 예를 나타낸다. 그림 상단에 수치해석 예에 이용한 기둥변수와 무차원 좌굴하중을 나타내었다. 이 기둥은 무차원 좌굴하중  $b_1=1.257$ 이 작용하면 좌굴하여  $b_2$  이상의 좌굴하중은 물리적인 의미는 없다. 그러나 제2좌굴형상에  $\blacktriangledown$ 로 나타낸 좌굴형상의 무변위 위치  $\xi=0.40$ 에 내부지점을 설치하여 횡방향 변위를 억제하면 좌굴하중은  $b_1=1.257$ 에서  $b_2=4.561$ 로 크게 증가한다. 마찬가지로 제3, 4좌굴형상의 무변위 위치에 내부지점을 설치하여 좌굴하중을 증가시킬 수 있다. 따라서 이 그림과 같은 좌굴형상의 무변위 위치를 계산하는 것은 기둥설계에서 무엇보다 중요하다.

## 6. 결 론

이 논문은 기하적 제약조건으로 일정표면적을 갖는 기둥의 좌굴하중과 최강기둥의 단면비 및 좌굴하중 산정에 관한 연구이다. 압축하중이 작용하는 기둥의 동적 평형방정식을 이용하여 기둥의 정적 좌굴형상을 지배하는 상미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 좌굴하중과 좌굴형상을 산정하였

다. 수치해석 예를 분석하여 얻어진 결론은 다음과 같다.

1. 무차원 좌굴하중  $b_1$ 은 단면비  $r$ 에 대한 기둥의 안정영역  $0 < r < r_{\max}$ 에서만 존재한다.
2. 기둥의 안정영역은 표면적 비  $\alpha$  값에 상관없이 모두 일정하며, 안정영역은 회전-회전:  $r_{\max}=1.50$ , 회전-고정:  $r_{\max}=1.79$ , 고정-고정:  $r_{\max}=2.00$ 이다.
3. 최강단면비  $r_s$ 는  $\alpha$  값에 상관없이 모두 일정하며,  $r_s$ 는 회전-회전:  $r_s=0.64$ , 회전-고정:  $r_s=0.77$ , 고정-고정:  $r_s=0.46$ 이다.
4. 기둥은  $r_s$ 에서 무차원 좌굴하중  $b_s$ 를 갖는다.
5. 기둥의 무차원 좌굴하중 방정식은 포물선 방정식  $b_1=a\alpha^2$ 에 완전상관 관계로 적합한다.

이 연구의 결과는 기하적 제약조건을 갖는 기둥설계에서 유용한 자료로 이용될 수 있기를 기대한다.

### 참고문헌

김영일(2003) 일정체적 변단면 보의 정적 최적단면. 석사학위논문, 원광대학교.  
이수곤(1999) 구조해석특론 II. 전남대학교 출판부, pp. 327-330.  
이병구, 이태은, 김영일(2009) 일정체적 단순지지 최강보. 대한토목학회논문집, 대한토목학회, 제29권 제2A호, pp. 155-162.  
Cox, S.J. and Overton, M.I. (1992) On the optimal design of columns against buckling. SIAM Journal of Mathematical Analysis, Vol. 23, pp. 287-325.

Dahlquist, G., Bjorck, A., and Anderson, N. (1974) Numerical methods. Prentice-Hall, Inc., USA, pp. 346-347, pp. 230-232.  
Keller, J.B. and Niordson, F.I. (1966) The tallest column. Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 16, pp. 433-446.  
Lee, B.K., Carr, A.J. Lee, T.E., and Ahn, D.S. (2005) Elasticas and buckling loads of shear deformable tapered columns. International Journal of Structural Stability and Dynamics, Vol. 5, pp. 317-335.  
Lee, B.K., Carr, A.J. Lee, T.E., and Kim, I.J. (2006) Buckling loads of columns with constant volume. Journal of Sound and Vibration, Vol. 294, pp. 381-387.  
Lee, B.K. and Oh, S.J. (2000) Elasticas and buckling loads of simple tapered column with constant volume. International Journal of Solids and Structures, Vol. 37, pp. 2507-2518.  
Rao, S.S. (1996) Engineering Optimization. Wiley & Sons, Inc., USA, pp. 1-3.  
Taylor, J.E. (1967) The strongest column-energy approach. Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 34, pp. 486-487.  
Tedesco, J.W., Mcdougal, W.G., and Ross, C.A (1999) Structural Dynamics. Addison-Wesley, USA, pp. 45-50, pp. 454-455.  
Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. (1963) Theory of elastic stability. McGraw-Hill Book Company, USA, pp. 125-131.  
Wilson, J.F., Holloway, D.M., and Biggers, S.B. (1971) Stability experiments on the strongest columns and circular arches. Experimental Mechanics, Vol. 11, pp. 303-308.

(접수일: 2010.11.16/심사일: 2010.12.22/심사완료일: 2010.12.31)