



신뢰성지수를 이용한 연직배수공법의 확률론적 해석

Probabilistic Analysis of Vertical Drains using Hasofer-Lind Reliability Index

김성필* · 허 준**† · 봉태호***

Kim, Seong-Pil · Heo, Joon · Bong, Tae-Ho

ABSTRACT

The conventional factor of safety as used in geotechnical engineering does not reflect the degree of uncertainty of the relevant parameters. Then in the geotechnical engineering, there have been efforts to reflect the uncertainties of the geotechnical properties through probabilistic analysis. In this study, a practical method for probabilistic analysis using the Hasofer-Lind reliability index is introduced. The method is based on the perspective of an ellipsoid that just touches the failure surface in the original space of the variables. The method is applied to prefabricated vertical drains (PVD) and compared with the result of Monte Carlo Simulation method.

Keywords: Probabilistic analysis; PVD; Reliability index; Monte Carlo Simulation

1. 서 론

지반공학 분야에서 일반적으로 사용되고 있는 안전율 개념은 설계에 사용되는 지반정수의 불확실성을 반영하지 못하는 단점이 있다. 설계에 사용되는 지반정수를 확률변수 (random variable) 로 보면 평균의 지반정수를 사용한 결정론적 설계의 결과는 항상 평균의 값을 준다. 현재 사용하는 안전율은 이러한 불확실성을 명확하게 반영하지 못하며, 실제의 파괴확률이 얼마인지를 제시하지 못한다. 일반적으로 지반공학자들이 불확실성을 다루는 방법은 크게 네 가지로 구분할 수 있다. 불확실성을 무시하거나, 보수적인 값을 취하거나, 관측적 방법을 이용하여 불확실한 거동을 예측 또는 관리하거나, 마지막으로 불확실성을 정량화하는 것이다 (Christian, 2004). 설계기준 상의 안전율을 적용한다는 것은 보수적인 값을 취하는 방법으로 볼 수 있다.

지반공학분야에서 지반정수의 불확실성을 정량화하기 위하여 일반적으로 확률변수의 표준편차를 평균으로 나눈 값인 변동계수 (Coefficient Of Variation, COV)를 많이 사용한다. Vanmarcke (1977)는 흙의 특성의 공간적인 분포를 평균과 변동계수를 이

용하여 정량화하고 예측할 수 있도록 확률론적으로 설명하였고, Phoon and Kulhawy (1999a, 1999b)는 문헌조사, 현장조사 및 실내시험을 통하여 지반정수의 고유한 변동성 및 변동모수 (scale of fluctuation)의 변동계수와 측정오차 (measurement error)의 변동계수를 일반적인 흙의 종류에 따라서 도출하였으며, 변환오차(transformation uncertainty)에 대하여 고찰하였다.

이러한 지반정수의 불확실성을 반영하기 위하여 확률론적 해석을 설계에 반영하고자 하는 노력이 진행되어 왔지만 (Christian et al., 1994; Lacasse and Nadim, 1996; Phoon and Kulhawy, 1996), 실무적으로 많이 사용되는 몬테 카를로 시뮬레이션 (Monte Carlo Simulation; MCS)을 포함하여 확률론적 해석은 많은 설계자들에게 어렵게 인식되고 있고, 해석 결과를 실제 설계에 적용하는 문제에 있어서도 어려움이 있는 것이 사실이다. 이러한 확률론적 해석의 실무적 어려움을 해소하기 위하여 Duncan (2000)은 지반공학 기술자들이 간편하게 사용할 수 있는 신뢰성해석 방법 (Taylor series method)을 제안하였고, 몇몇 연구자들은 실무적으로 사용할 수 있는 설계차트를 제안하였다 (Phoon et al., 1990; Sivakugan and Johnson, 2004; Chalermyanont and Benson, 2004). 그리고 Jo and Doh (1996)은 지반정수의 변동성을 고려한 확률유한요소법을 기초로 신뢰성해석 모델을 개발하였고, Kim et al. (2007)은 최소기대비용을 이용한 확률론적 해석을 연직배수공법에 적용하였다.

Hasofer and Lind (1974)의 신뢰성지수는 Taylor series method 또는 점 추정법 (Point estimate method)보다 포괄적이지만 적용의 난해함 등의 이유로 많이 사용되지 못하고 있지

* 한국농어촌공사 농어촌연구원
 ** 한국농어촌공사 농어촌연구원
 *** 서울대학교 생태조경·지역시스템공학부 대학원
 † Corresponding author Tel.: +82-31-400-1792
 Fax: +82-31-400-1794
 E-mail: jheo01@ekr.or.kr

2011년 8월 2일 투고
 2011년 9월 29일 심사완료
 2011년 10월 5일 게재확정

만 보다 안정적인 것으로 인식되고 있다. 여기에서는 Hasofer-Lind 신뢰성지수를 이용한 확률해석을 보다 실무적으로 적용할 수 있는 방법론을 연직배수공법의 설계에 적용하고자 한다. 먼저 신뢰성지수를 이용한 확률해석결과를 몬테 카를로 시뮬레이션 결과와 비교하여 적용성을 고찰하고, 지반정수의 불확실성이 Hasofer-Lind 신뢰성지수를 이용한 확률해석에 어떻게 반영되는 지를 고찰하였다.

II. 연직배수공법의 확률론적 설계

1. 연직배수 (PVD) 공법

연직배수재에 의한 연약지반의 압밀도를 산정하는 이론해는 많은 연구자들에 의해 제시되었다 (Barron, 1944; Hansbo, 1979; Hansbo, 1981). 본 연구에서는 다음과 같은 Hansbo의 식을 이용하였다 (Hansbo, 1979, Hansbo, 1981).

$$U_h(t) = 1 - \exp\left(-\frac{2c_h t}{r_c^2 F}\right) \quad (1)$$

여기에서, $U_h(t)$ 는 압밀도, z 는 심도, c_h 는 수평압밀계수, t 는 압밀도에 도달하는 시간, r_c 는 배수재의 영향반경으로 설계의 목표값이다. F 는 다음과 같다.

$$F = F_o + F_s + F_r \quad (1a)$$

$$F_o = \ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right) - \frac{3}{4} \quad (1b)$$

$$F_s = \left(\frac{k_h}{k_r} - 1\right) \ln\left(\frac{r_s}{r_w}\right) \quad (1c)$$

$$F_r = \pi z(2L - z) \frac{k_h}{q_w} \quad (1d)$$

식 (1)에서 F_o , F_s 및 F_r 은 각각 드레인 간격 (drain spacing factor), 스미어 효과 (soil smear factor) 그리고 드레인의 통수 저항 (well-resistance factor)에 대한 영향을 나타내는 변수들이다. 여기에서 r_w 는 연직배수재의 반경으로 원형이 아닌 경우에는 등가환산반경을 사용하며, k_h/k_r '는 스미어효과에 의한 수평통수계수의 감소비, r_s 는 스미어영역의 반경, L 은 배수재의 길이, q_w 는 연직배수재의 통수능을 나타낸다.

2. Hasofer-Lind reliability index를 이용한 확률론적 해석

연직배수공법의 신뢰성 설계 또는 기대비용의 산출을 위해서는 식 (1)과 같이 주어진 수평압밀도의 확률론적 해석이 필요하다. 특정 시간에 목표하는 압밀도에 도달하지 못할 확률 P_f 를 구하기 위한 방법은 많이 제안되어 있지만, 실무적으로 적용하기 위해서는 보다 간편하게 적용할 수 있는 방법이 필요하다. 이러한 목적에서 Hasofer-Lind의 신뢰성지수를 이용한 확률론적 해석이 유용한 수단이 될 수 있다.

Hasofer and Lind (1974)의 신뢰성지수 β 를 Ditlevsen (1981)은 다음과 같은 행렬식으로 제시하였다.

$$\beta = \min_{\mathbf{x} \in F} \sqrt{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})} \quad (2)$$

여기에서 \mathbf{x} 와 $\boldsymbol{\mu}$ 는 각각 확률변수 x_i 와 평균값 μ_i 의 벡터형이고, \mathbf{C} 는 공분산행렬 (covariance matrix)이다. 이는 다음과 같이 표현할 수 있다.

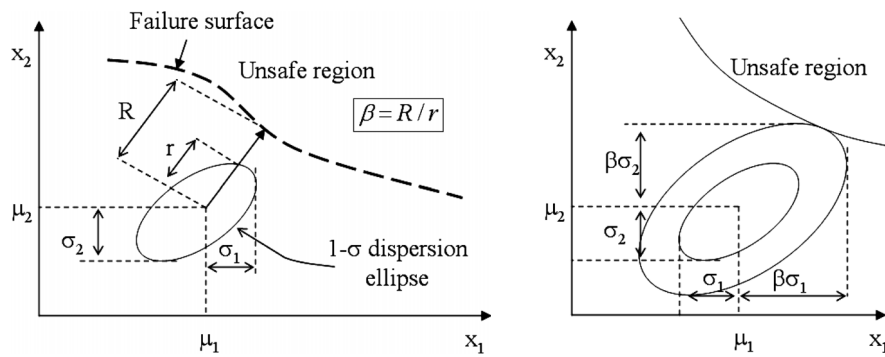


Fig. 1 Overview of reliability index β

$$\beta = \min_{x \in F} \sqrt{\left[\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right]^T [R]^{-1} \left[\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right]} \quad (3)$$

여기에서 σ 는 표준편차이고, R 은 상관행렬 (correlation matrix)이다.

Fig. 1에 신뢰성지수를 표현하였다. Fig. 1에서 $1-\sigma$ 타원은 두 확률변수의 표준편차와 상관계수에 따라 크기와 모양이 달라지며, 만약 두 확률변수의 크기가 같고 표준편차가 같고 상관계수가 0이라면 반지름이 표준편차인 원이 된다. 파괴면 (Failure surface)은 두 변수의 조합에 의해 나타난 결과가 특정결과 (파괴)를 나타내는 조합을 연결한 선이다.

Fig. 1에서 보면 신뢰성지수 β 를 구한다는 것은 파괴면과 만나는 목표점 (x_1, x_2)를 구하는 문제로 볼 수 있다. 따라서 식 (2)를 Fig. 1에 대하여 다시 표현하면 식 (4)을 만족하는 최소값을 구하는 문제로 볼 수 있다.

$$\text{Minimize: } \beta = \sqrt{\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{(1 - \rho^2)\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{(1 - \rho^2)\sigma_2^2} - \frac{2\rho(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{(1 - \rho^2)\sigma_1\sigma_2}} \quad (4)$$

$$\text{Subject to: } g(x_1, x_2) = 0$$

여기에서 $g(x_1, x_2) = 0$ 는 파괴면을 나타내는 식이고, ρ 는 상관계수 (correlation coefficient)이다. 이를 만족하는 β 를 구하면 파괴확률은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P_f = 1 - \Phi(\beta) = \Phi(-\beta) \quad (5)$$

여기에서 Φ 는 누적표준정규분포함수 (Standard normal cumulative distribution function)이다.

III. 적용 및 고찰

1. 적용조건

연직배수공법의 확률론적 설계를 위해서는 먼저 각 입력 물성치의 불확실성 (COV)을 정의할 필요가 있다. 해석에 적용한 물성치의 평균값과 COV는 다음의 Table 1과 같다. Table 1의 물성치는 실제 사례 또는 조사에 의한 값은 아니지만, 방법론의 적용성을 고찰하기 위해 적용한 값으로 적정범위에서 선정하였다. 수평압밀계수 c_h 와 스미어효과에 의한 수평투수계수 비 k_h/k_h' 의 변동계수는 0.2와 0.3을 적용하여 변동성의 변화

Table 1 Input parameters used in analysis

	c_h (m ² /y)	k_h/k_h'	r_e/r_w	r_s/r_w	L	k_s/q_w	t (year)
Mean	5	2	40	3	15	0.0003	1
COV	0.2, 0.3	0.2, 0.3	0.01	0.01	0.01	0.01	-
σ	1.0, 1.5	0.4, 0.6	0.4	0.03	0.15	0.000003	-

에 따른 확률해석결과를 고찰하고, 나머지 변수는 0.01로 하였다. 이는 압밀도에 미치는 영향이 두 변수가 가장 크고 나머지 변수는 작음을 의미한다 (Kim et al., 2007). 이상의 조건에서 수평압밀도 90 %를 만족시키기 위한 r_e 를 식 (1)을 이용하여 구하면 약 1.0 m이다.

2. Hasofer-Lind reliability index에 의한 확률해석 결과

변수들이 서로 독립이라면 Table 1의 조건을 식 (4)의 형식으로 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\beta = \sqrt{\sum_{i=1}^7 \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2} \quad (6)$$

$$g(x) = 0.9 - \left[1 - \exp\left(-\frac{2c_h t}{r_e^2 F}\right) \right] = 0 \quad (7)$$

식 (7)은 목표압밀도가 90 %인 경우를 가정하였으므로 식 (1)에서 $U_h(t)$ 가 0.9인 경우를 풀어 쓴 것이다. 따라서 확률 변수들이 식 (7)을 만족하는 신뢰성지수 β 를 구하면 식 (5)로 목표압밀도에 도달하지 못할 확률을 계산할 수 있다. Table 1에서 제시된 값에서 다른 변수는 결정론적으로 두고 Fig. 1의 (b)와 같이 Performance Function $g(x)$ 를 c_h 와 k_h/k_h' 값을 이용하여 구하면 다음의 식 (8)과 같다. 식 (8)을 이용하면 배수재의 영향반경 r_e 에 따라서 c_h 와 k_h/k_h' 로 표현되는 파괴면을 구할 수 있다.

$$c_h = r_e^2 (1.2652 \times [k_h/k_h'] + 2.2807) \quad (8)$$

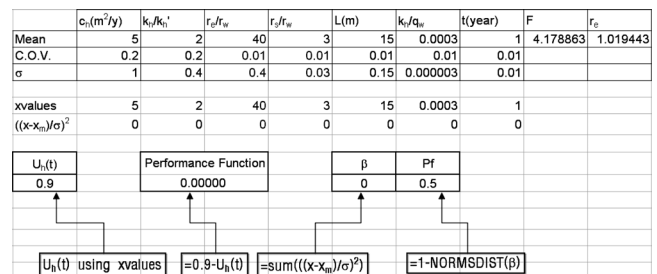


Fig. 2 Finding β procedure using solver tool

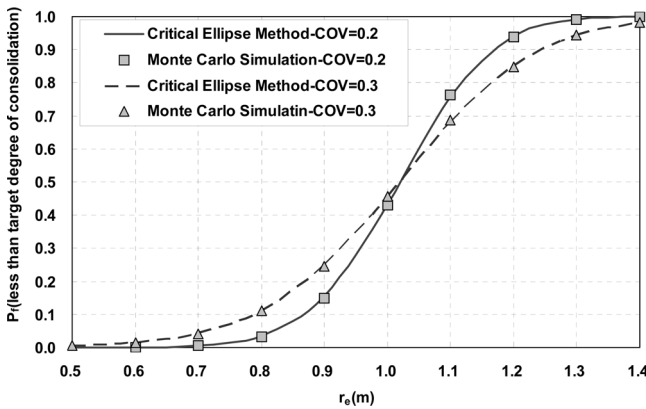


Fig. 3 Probability of Failure with r_e from reliability index and MCS

$g(x)$ 를 만족하는 최소의 β 를 구하는 과정은 Microsoft EXCEL의 해찾기 (SOLVER) 기능을 이용하여 구할 수 있다 (Low, 1996). Fig. 2에서 $U_h(t)$ 셀은 [xvalues]의 값을 이용하여 식 (1)을 입력하고, Performance Function 셀은 식 (7)을 입력한다. [xvalues] 아래의 $((x-x_m)/\sigma)^2$ 은 위의 평균값 (x_m)과 [xvalues]의 값 (x), 그리고 COV를 이용하여 구한 표준편차 (σ)를 이용하여 구한다. β 셀은 $((x-x_m)/\sigma)^2$ 값을 더한 값이고, P_f 셀은 식 (5)를 이용 ($=1 - \text{NORMSDIST}(\beta)$)하여 구한다. 먼저 [xvalues]를 나타내는 행을 평균값으로 두고 '해찾기'를 실행한 후 목표셀을 β 셀로 두고 '값을 바꿀 셀'을 [xvalues]를 나타내는 행으로 설정한다. '제한조건'을 Performance Function 셀 = 0로 실행하면 최소의 β 를 구할 수 있다. 이때 '해의 조건'은 최소값으로 설정한다. 이상의 과정을 r_e 를 변경하면서 수행하면 목표압밀도에 도달하지 못할 확률 (P_f)을 구할 수 있다. 이상의 과정이 식 (7)을 만족하면서 식 (6)에서 신뢰성지수 β 가 최소가 되는 지반정수의 목표값을 구하고, 신뢰성지수 β 를 이용하여 목표압밀도에 도달하지 못할 확률을 구하는 과정이다.

c_h 와 k_h/k_h' 의 COV가 각각 0.2와 0.3인 경우에 대하여 목표압밀도 90%에 도달하지 못할 확률을 r_e 의 변화에 대하여 구하면 Fig. 3과 같다. 그리고 각각에 대하여 몬테 칼로 시뮬레이션에 의한 결과를 함께 나타내었다. 신뢰성지수를 이용하여 구한 확률은 몬테 칼로 시뮬레이션 결과와 거의 일치하는 것으로 나타났다.

Fig. 4는 Table 1의 c_h 와 k_h/k_h' 의 COV가 각각 0.3인 조건에서 r_e 에 따른 파괴면과 각 r_e 에 대하여 Fig. 2를 이용하여 구한 최소 신뢰성지수에 해당되는 목표값을 함께 나타내었다.

Fig. 4에서 각 r_e 에 해당하는 파괴면은 식 (8)에 r_e 값을 대입하여 구한다. Fig. 3에서 $r_e = 0.8$ 일 때 목표압밀도에 도달하지 못할 확률은 약 11.2%이다. Fig. 1에서 설명된 바와 같이 Fig.

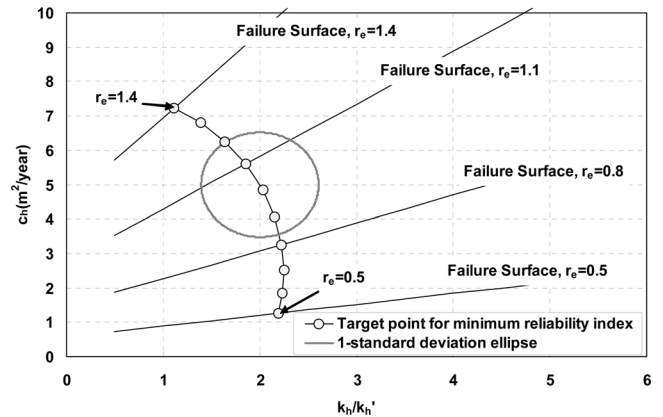


Fig. 4 Target points for minimum β with r_e

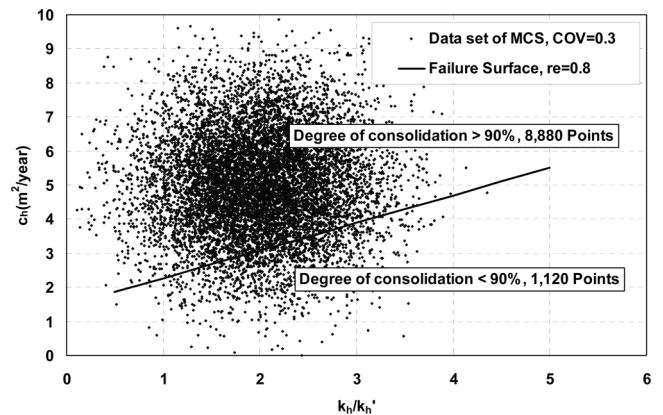


Fig. 5 Monte Carlo Simulation results when $r_e = 0.8$ and $\text{COV} = 0.3$

4에서 보면 평균값을 나타내는 좌표에서 $r_e = 0.8$ 일 때의 목표값까지 직선의 길이가 $1 - \sigma$ 타원까지 거리의 약 1.22배라는 의미이며, 따라서 계산된 확률은 식 (4)에 의해서 11.2%가 된다.

이러한 계산을 몬테 칼로 시뮬레이션과 비교하기 위하여 Fig. 5에 c_h 와 k_h/k_h' 의 COV가 0.3일 때의 몬테 칼로 시뮬레이션 (10,000회) 결과를 나타내었다. 이때 파괴면은 식 (8)에서 $r_e = 0.8$ 을 입력한 수식으로 표현된다. $r_e = 0.8$ m에서 압밀도 90%에 도달하지 못할 확률이 11.2%라는 Fig. 3의 결과는 Fig. 5에서 파괴면 아래에 시뮬레이션 결과가 1,120개소 있다는 의미이며 Fig. 5에서 확인할 수 있다.

만약 c_h 와 k_h/k_h' 의 COV가 0.2가 되면 몬테 칼로 시뮬레이션에서는 Fig. 5보다 추출된 정수값의 분포가 좁아지고 따라서 파괴면 이하의 점이 줄어들게 된다. 같은 경우에 Fig. 4에서 보면 $1 - \sigma$ 타원이 줄어들면서 신뢰성지수가 커지고 따라서 파괴 확률이 작아지게 된다.

Fig. 6은 c_h 의 COV 0.3, k_h/k_h' 의 COV 0.2일 때, Fig. 7은 c_h 의 COV 0.2, k_h/k_h' 의 COV 0.3일 때의 몬테 칼로 시뮬레

이전 결과를 나타내었다. 두 그림 모두에서 파괴면은 식 (8)에서 $r_e = 0.8$ 을 입력한 수식으로 표현된다. 그림에서 보듯이 각 변수의 COV가 반영되면 목표압밀도에 도달하지 못할 확률이 달라진다. 또한 같은 조건에서 c_h 의 평균값이 커지면 목표압밀도에 도달하지 못할 확률은 감소하게 되고, k_h/k_h' 가 커지면 목표압밀도에 도달하지 못할 확률은 커지게 된다. 그리고 동일한 조건이라면 c_h 와 k_h/k_h' 의 COV가 커지면 타원이 커지면서 목표압밀도에 도달하지 못할 확률이 커지게 된다. 이러한 몬테 칼로 시뮬레이션에 나타나는 지반정수의 불확실성의 정도에 따른 해석의 결과는 Hasofer-Lind 신뢰성지수를 이용한 경우에도 동일하게 반영된다. Hasofer-Lind 신뢰성지수를 이용한 해석에 의하면, Fig. 2에 COV를 나타내는 셀에 c_h 와 k_h/k_h' 의 COV를 입력하고 목표압밀도에 도달하지 못할 확률을 구하면 된다. Fig. 6의 경우에는 10.54 %, Fig. 7의 경우에는 4.18 %의 확률로 거의 차이가 없는 해석결과를 보인다.

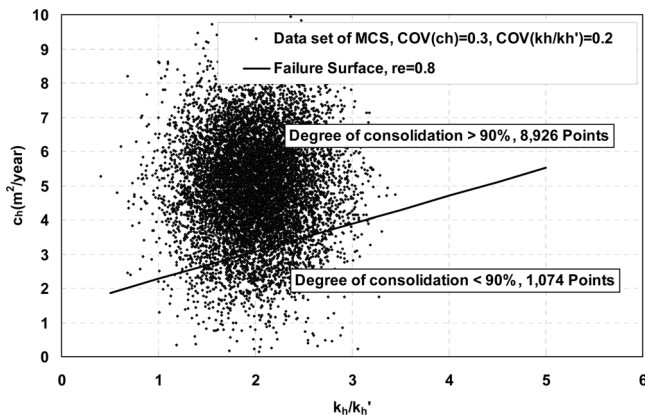


Fig. 6 Monte Carlo Simulation results when $r_e = 0.8$ ($COV_{c_h} = 0.3$, $COV_{k_h/k_h'} = 0.2$)

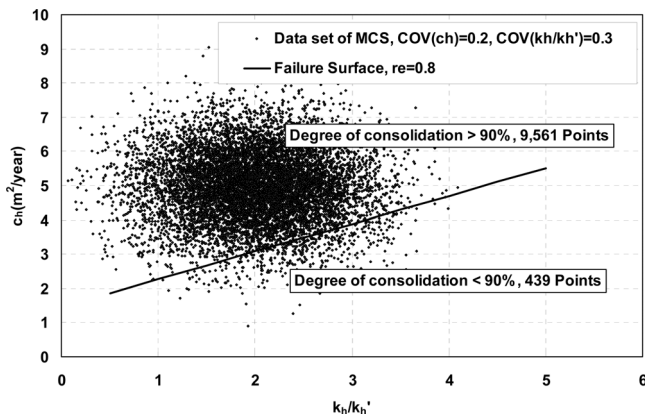


Fig. 7 Monte Carlo Simulation results when $r_e = 0.8$ ($COV_{c_h} = 0.2$, $COV_{k_h/k_h'} = 0.3$)

이상과 같이 Hasofer-Lind 신뢰성지수를 이용한 확률해석은 몬테 칼로 시뮬레이션과 유사한 정도로 정확도를 가지며 제시된 방법은 비교적 간단하게 이러한 작업을 수행할 수 있는 장점이 있을 것으로 판단된다.

IV. 요약 및 결론

본 연구에서는 설계에서 목표하는 확률을 간단하게 계산할 수 있는 Hasofer-Lind 신뢰성지수를 이용한 방법론을 제시하고 연직배수공법 (PVD)에 적용하였다. 그 적용성을 몬테 칼로 시뮬레이션 결과와 비교하여 검증하였다. 그리고 설계에 사용되는 지반정수의 변동성이 신뢰성지수를 이용한 확률해석 결과에 미치는 영향을 검토하였다. 이상의 결과를 요약하면 다음과 같다.

1. 본 연구에서는 연직배수공법의 설계에서 목표값이 되는 배수재의 영향반경에 따라서 목표압밀도에 도달하지 못할 확률을 Hasofer-Lind 신뢰성지수를 이용하여 구할 수 있는 방법론을 제시하였다.
2. Hasofer-Lind 신뢰성지수를 구한다는 것은 해석의 목표가 되는 Performance Function을 만족하는 변수의 목표값을 구하는 과정이며, 이러한 과정을 비교적 간단하게 수행할 수 있는 방법을 제시하고 적용하였다.
3. Hasofer-Lind 신뢰성지수를 이용한 확률해석결과를 몬테 칼로 시뮬레이션과 비교한 결과 상당한 정도로 일치하는 해석결과를 보였다.
4. 본 연구에서 제시된 방법은 해석에 사용되는 지반정수의 변동성을 고려할 수 있으며 비교적 간단하게 적용할 수 있는 방법이다. 단지 사면안정문제 등과 같이 Performance Function을 설정하기 힘든 문제의 경우는 적용성이 떨어질 수 있지만 사례로 든 연직배수공법, 압밀침하, 기초의 지지력 등과 같은 문제에서는 적용성이 클 것으로 판단된다.

REFERENCES

1. Barron, R. A., 1948. Consolidation of Fine-grained Soils by Drain wells. *Transactions of the ASCE*, 113(2346): 718-742.
2. Chalermyanont, T., and Benson, C. H., 2004. Reliability-based design for internal stability of mechanically stabilized earth walls. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, 130(2): 163-173.
3. Christian, J. T., Ladd, C. C., and Baecher, G. B., 1994. Reliability applied to slope stability analysis. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, 120(12): 2180-2207.

4. Christian, J. T., 2004. Geotechnical engineering reliability: How well do we know what we are doing? *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, 130(10): 985-1003.
5. Ditlevsen, O., 1981. *Uncertainty Modeling : with applications to multidimensional civil engineering systems. McGraw-Hill, New York.*
6. Duncan, J. M., 2000. Factors of Safety and Reliability in Geotechnical Engineering. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, 126(4): 307-316.
7. Hansbo, S., 1979. Consolidation of Clay by Band-Shaped Prefabricated Drains. *Ground Engineering*, 12(5): 16-25.
8. Hansbo, S., 1981. Consolidation of Fine-Grained Soils by Prefabricated Drains. *10th ICSMFE* 3: 677-682.
9. Hasofer, A. M., and Lind, N., 1974. An Exact and Invariant First-order Reliability Format. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 100(1): 111-121.
10. Jo, R. C., and Doh, D. H., 1996. The Reliability Analysis for Homogeneous Slope Stability using Stochastic Finite Element Method. *Journal of the Korean Society of Agricultural Engineers*, 38(5): 125-139 (in Korean).
11. Kim, S. P., Son, Y. H., and Chang, P. W., 2007. Minimum Expected Cost Based Design of Vertical Drain Systems. *Journal of the Korean Society of Agricultural Engineers*, 49(6): 93-101 (in Korean).
12. Lacasse, S., and Nadim, F., 1996. Uncertainties in characteristic soil properties. *Proceedings of Uncertainty '96, Geotechnical Special Publication No. 58, ASCE*, 1: 49-75.
13. Low, B. K., 1996. Practical probabilistic approach using spreadsheet. ASCE Geotechnical Special Publication No. 58, Proc., Uncertainty in the Geologic Environment, 12: 1284~1302.
14. Phoon, K. K., and Kulhawy, F. H., 1996. Practical reliability-based design approach for foundation engineering. *Transportation Research Record*, 1546: 94-99.
15. Phoon, K. K., and Kulhawy, F. H., 1999a. Characterization of geotechnical variability. *Canadian Geotechnical Journal*, 36(4): 612-624.
16. Phoon, K. K., and Kulhawy, F. H., 1999b. Evaluation of geotechnical property variability. *Canadian Geotechnical Journal*, 36(4): 625-639.
17. Phoon, K. K., Quek, S. T., Chow, Y. K., and Lee, S. L., 1990. Reliability analysis of pile settlement. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, 116(11): 1717-1735.
18. Sivakugan, N., and Johnson, K., 2004. Settlement predictions in granular soils: a probabilistic approach. *Geotechnique*, 54(7): 499-502.
19. Vanmarcke, E. H., 1977. Probabilistic modeling of soil profiles. *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE*, 103 (11): 1227-1246.