

이산 시변 상태공간 모델을 위한 최적 유한 임펄스 응답 필터

An Optimal FIR Filter for Discrete Time-varying State Space Models

권 보 규*
(Bo-Kyu Kwon¹)

¹Kangwon National University

Abstract: In this paper, an optimal FIR (Finite-Impulse-Response) filter is proposed for discrete time-varying state-space models. The proposed filter estimates the current state using measured output samples on the recent time horizon so that the variance of the estimation error is minimized. It is designed to be linear, unbiased, with an FIR structure, and is independent of any state information. Due to its FIR structure, the proposed filter is believed to be robust for modeling uncertainty or numerical errors than other IIR filters, such as the Kalman filter. For a general system with system and measurement noise, the proposed filter is derived without any artificial assumptions such as the nonsingular assumption of the system matrix A and any infinite covariance of the initial state. A numerical example show that the proposed FIR filter has better performance than the Kalman filter based on the IIR (Infinite-Impulse-Response) structure when modeling uncertainties exist.

Keywords: optimal state estimation, FIR (Finite Impulse Response), time-varying system, Kalman filter, receding horizon

I. 서론

상태 추정 문제는 추정 시점에 따라 평활기, 필터, 예측기로 나눌 수 있으며, 이중 현재 시점의 상태를 추정하는 필터는 피드백 제어기 설계[1]나 다중센서 정보 융합 및 위치 추정[2] 등 많은 응용에 널리 사용되고 있다. 또한, 상태 추정 문제는 임펄스 응답의 주기에 따라 무한 임펄스 응답 구조와 유한 임펄스 응답 구조로 나눌 수 있으며, 무한 임펄스 응답 필터는 초기시간부터 현재시간까지의 모든 정보를 이용하는 반면 유한 임펄스 응답 필터는 상태 추정 시점에서 최근의 유한한 정보만을 사용하여 상태를 추정하는 것이 특징이다.

칼만필터는 무한 임펄스 응답 구조의 대표적인 예로, 모델 및 초기 정보가 정확히 제공되는 경우 모델 기반의 상태 추정기 중 가장 최적의 해를 제공하여 상태 추정의 문제에 있어 일종의 표준과 같이 사용되고 있다. 하지만 무한 임펄스 응답 구조로 인해 내부 상태나 시스템에서 발생하는 불확실성, 초기치 가정에 의해 발생하는 오차 등이 상태추정 초기 시간부터 추정 시간까지 지속적으로 누적될 수 있어 실제 시스템과 추정에 사용된 모델이 서로 일치하지 않거나 가정된 초기 조건이 실제와 다른 경우 추정 성능이 저하되거나 추정 결과가 발산하는 문제가 발생할 수 있다[3,4]. 이와 함께 구현 시 디지털 컴퓨터의 계산 과정에서 발생할 수 있는 반올림 오차(round-off error)나 계수 양자화 오차(coefficient quantization error)의 누적도 추정 성능 저하 또는 추정 결과의 발산 문제를 일으킬 수 있다[5].

이상과 같은 무한 임펄스 응답 필터의 성능 저하나 발산문제를 극복하기 위한 대안으로 유한 임펄스 응답 필터가 연구되어 왔다. 유한 임펄스 응답 구조는 최근의 유한한 데이터만을 사용하여 상태를 추정하기 때문에 시스템 모델의 부정

확성과 계산 과정에 의해 발생할 수 있는 성능 저하나 발산 등의 문제에 대해 강인한 특성을 보이며, 유한 임펄스 응답도가 보장된다. 또한, 순간적으로 발생하였다가 사라지는 시스템 내외적인 불확실성에 대해서도 불확실성이 사라진 이후 빠른 수렴성을 보인다. 유한 임펄스 응답 필터의 연구로는 선형 시불변 시스템을 위해 *limited memory filter*나 *sliding window filter* 등이 칼만 필터의 성능저하나 발산문제를 해결하기 위하여 제안되었다[6-8]. 제안된 필터들은 유한 임펄스 응답 구조로 인해 초기 시간부터 누적되어오는 여러 오차에 의해 발생한 칼만 필터의 성능저하나 발산문제에 대해 근원적인 해결이 가능하였다. 하지만 제안된 필터들은 설계 시 시스템의 공정 잡음을 고려하지 않아 실제 시스템에 잡음이 존재하는 경우 좋지 않은 성능을 보였으며, 시스템의 입력을 고려하지 않고 설계되어 피드백 제어 문제에 직접 적용할 수 없는 문제점이 있었다. 이후 선형 시불변 시스템에 대해 공정 잡음과 입력을 고려한 보다 일반적인 유한 임펄스 응답 필터들이 제안되었으나 복소 경계치를 가지는 Fredholm 적분 방정식 이용한 필터 이득의 유도 과정이 복잡하였으며, 초기 상태 공분산이 무한한 값을 가진다는 가정에 의해 최적성에 대한 명료성이 결여되는 등의 단점을 가졌다[9-11]. 이후 보다 일반적인 선형 시불변 시스템에 대해 최적 해에 대한 명료성과 초기 상태에 대한 어떠한 가정도 필요하지 않은 최적 유한 임펄스 응답 필터가 제안되었다[12].

선형 시불변 시스템에 관한 많은 유한 임펄스 응답 필터에 대한 연구가 있었지만, 실질적인 응용에서 많이 나타나는 시변 시스템에 대한 유한 임펄스 응답 필터에 대한 연구는 많지 않았다. 선형 시변 이산 시스템을 위한 유한 임펄스 응답 필터에 대한 연구로 이동 구간 유한 임펄스 응답 필터가 제안되었으나 시스템의 초기상태의 공분산을 무한대로 가정하는 등 최적성에 대한 명료함 결여되었으며, 시스템 행렬의 역행렬이 존재한다는 가정을 사용하여 그렇지 않은 시스템에 대해서는 적용할 수 없는 문제가 있었다[13].

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2011. 7. 18., 수정: 2011. 10. 12., 채택확정: 2011. 10. 18.
권보규: 강원대학교 공학대학 제어계측공학과(bkkwon@kangwon.ac.kr)

따라서 본 논문에서는 이산 선형 시변 시스템에 대해 초기 조건에 대한 어떠한 가정도 필요하지 않고 시스템 행렬의 역행렬이 존재하지 않는 경우에도 상태 추정이 가능한 최적 유한 임펄스 응답 필터를 제안한다. 제안하는 필터의 이득은 추정 오차의 공분산을 최소화하는 성능지수를 만족하도록 설계되며, 비편향 조건을 만족한다. 특히, 비편향 조건을 이용하여 초기 상태에 대한 정보를 완전히 배제할 수 있으며, 설계 과정에서부터 시스템 행렬의 역행렬이 완전히 나타나지 않는다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II 장에서는 이산 선형 시변 시스템에 대해 최적 유한 임펄스 응답 필터가 제안되고, III 장에서는 제안된 필터와 칼만 필터의 추정 성능을 시뮬레이션을 통해 비교하고 모델 불확실성에 대한 제안된 필터의 강인성과 빠른 수렴성을 입증한다. 마지막으로 IV 장에서 본 논문의 결론을 제시한다.

II. 선형 시변 시스템을 위한 최적 유한 임펄스 응답 필터

다음과 같은 시변 선형 이산 시간 상태 공간 모델에 대해 고려해보자.

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + G_k \omega_k \tag{1}$$

$$y_k = C_k x_k + v_k \tag{2}$$

여기서 x_k 와 u_k 는 각각 시스템의 상태변수와 입력이며, w_k 와 v_k 는 각각 시스템의 공정잡음과 측정잡음으로 평균이 0이고 분산이 각각 Q_k 와 R_k 인 백색 가우시안 잡음으로 가정한다. 또한, 상태변수와 공정잡음, 측정잡음은 상호 연관 없으며, (A_k, C_k) 는 가관측성을 만족함을 가정한다.

식 (1)과 식 (2)로부터 이동 구간 $[k-N, k]$ 의 유한 측정값은 구간 초기 상태인 x_{k-N} 과 공정잡음 및 측정잡음에 의해 다음과 같은 수식으로 나타낼 수 있다.

$$Y_{k-1} = \tilde{C}_{N,k} x_{k-N} + \tilde{B}_{N,k} U_{k-1} + \tilde{G}_{N,k} W_{k-1} + V_{k-1} \tag{3}$$

여기서 Y_{k-1} , U_{k-1} , W_{k-1} , V_{k-1} 는 각각 다음과 같이 정의되며,

$$Y_{k-1} = [y_{k-N}^T \ y_{k-N+1}^T \ \cdots \ y_{k-1}^T]^T \tag{4}$$

$$U_{k-1} = [u_{k-N}^T \ u_{k-N+1}^T \ \cdots \ u_{k-1}^T]^T \tag{5}$$

$$W_{k-1} = [\omega_{k-N}^T \ \omega_{k-N+1}^T \ \cdots \ \omega_{k-1}^T]^T \tag{6}$$

$$V_{k-1} = [v_{k-N}^T \ v_{k-N+1}^T \ \cdots \ v_{k-1}^T]^T \tag{7}$$

$\tilde{C}_{N,k}$, $\tilde{B}_{N,k}$, $\tilde{G}_{N,k}$ 은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{C}_{N,k} = \begin{bmatrix} C_{k-N} \\ C_{k-N+1} A_{k-N, k-N} \\ C_{k-N+2} A_{k-N+1, k-N} \\ \vdots \\ C_{k-1} A_{k-2, k-N} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$\tilde{B}_{N,k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_{k-N+1} B_{k-N} & 0 \\ C_{k-N+2} A_{k-N+1, k-N+1} B_{k-N} & C_{k-N+2} B_{k-N+1} \\ \vdots & \vdots \\ C_{k-1} A_{k-2, k-N+1} B_{k-N} & C_{k-1} A_{k-2, k-N+2} B_{k-N+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & C_{k-1} B_{k-2} & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\tilde{G}_{N,k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_{k-N+1} G_{k-N} & 0 \\ C_{k-N+2} A_{k-N+1, k-N+1} G_{k-N} & C_{k-N+2} G_{k-N+1} \\ \vdots & \vdots \\ C_{k-1} A_{k-2, k-N+1} G_{k-N} & C_{k-1} A_{k-2, k-N+2} G_{k-N+1} \\ \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & C_{k-1} G_{k-2} & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

여기서 $A_{i,j} = A_i A_{i-1} \cdots A_{j+1} A_j (i \geq j)$ 이다.

또한, 현재의 상태 x_k 는 식 (1)과 식 (2)로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x_k = A_{k-1, k-N} x_{k-N} + M_{N,k} W_{k-1} + N_{N,k} U_{k-1} \tag{11}$$

여기서 $M_{N,k}$ 와 $N_{N,k}$ 는 다음과 같다.

$$M_{N,k} = \begin{bmatrix} A_{k-1, k-N+1} G_{k-N} & A_{k-1, k-N+2} G_{k-N+1} \\ \cdots & A_{k-1, k-1} G_{k-2} \quad G_{k-1} \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$N_{N,k} = \begin{bmatrix} A_{k-1, k-N+1} B_{k-N} & A_{k-1, k-N+2} B_{k-N+1} \\ \cdots & A_{k-1, k-1} B_{k-2} \quad B_{k-1} \end{bmatrix} \tag{13}$$

식 (3)과 식 (9)를 서로 결합하면 다음과 같은 수식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} Y_{k-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{N,k} & 0 \\ A_{k-1, k-N} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-N} \\ x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_{N,k} \\ N_{N,k} \end{bmatrix} U_{k-1} + \begin{bmatrix} \tilde{G}_{N,k} \\ M_{N,k} \end{bmatrix} W_{k-1} + \begin{bmatrix} V_{k-1} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

제안하는 최적 유한 임펄스 응답 필터는 다음과 같은 최근 유한 구간 $[k-N, k]$ 내의 측정값 Y_{k-1} 과 입력값 U_{k-1} 의 선형 조합으로 나타내어진다.

$$\hat{x}_k = H_k Y_{k-1} + L_k U_{k-1}, \tag{15}$$

여기서 H_k 와 L_k 는 각각 다음과 같으며, 주어진 성능지수를 최소화하도록 결정된다.

$$H_k = [H_{N,k} \ H_{N-1,k} \ \cdots \ H_{1,k}],$$

$$L_k = [L_{N,k} \ L_{N-1,k} \ \cdots \ L_{1,k}],$$

식 (14)를 식 (15)에 대입하면 다음과 같은 수식을 얻을 수 있으며,

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= [H_k \quad -I] \begin{bmatrix} Y_{k-1} \\ 0 \end{bmatrix} + L_k U_{k-1} \\ &= [H_k \quad -I] \begin{bmatrix} \tilde{C}_{N,k} & 0 \\ A_{k-1,k-N} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-N} \\ x_k \end{bmatrix} \\ &\quad + [H_k \quad -I] \begin{bmatrix} \tilde{B}_{N,k} \\ N_{N,k} \end{bmatrix} U_{k-1} + L_k U_{k-1} \\ &\quad + [H_k \quad -I] \begin{bmatrix} \tilde{G}_{N,k} \\ M_{N,k} \end{bmatrix} W_{k-1} + H_k V_{k-1} \end{aligned} \quad (16)$$

식 (16)을 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= (H_k \tilde{C}_{N,k} - A_{k-1,k-N}) x_{k-N} + x_k \\ &\quad + (H_k \tilde{B}_{N,k} - N_{N,k} + L_k) U_{k-1} \\ &\quad + (H_k \tilde{G}_{N,k} - M_{N,k}) W_{k-1} + H_k V_{k-1} \end{aligned} \quad (17)$$

수식 (17) 양변에 기대값을 취하면 다음의 수식을 얻을 수 있으며,

$$\begin{aligned} E[\hat{x}_k] &= (H_k \tilde{C}_{N,k} - A_{k-1,k-N}) E[x_{k-N}] + E[x_k] \\ &\quad + (H_k \tilde{B}_{N,k} - N_{N,k} + L_k) U_{k-1}, \end{aligned} \quad (18)$$

제안하는 유한 임펄스 응답 필터는 비편향 제약조건인 $E[\hat{x}_k] = E[x_k]$ 를 만족시키므로 다음과 같은 제약조건을 구할 수 있다.

$$H \tilde{C}_{N,k} = A_{k-1,k-N} \quad (19)$$

$$L_k = -H_k \tilde{B}_{N,k} + N_{N,k} \quad (20)$$

비편향 제약조건인 식 (19)를 식 (17)에 대입하면 다음 식을 유도할 수 있으며

$$\hat{x}_k = x_k + (H_k \tilde{G}_{N,k} - M_{N,k}) W_{k-1} + H_k V_{k-1},$$

이로부터 상태 추정 오차 e_k 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} e_k &= \hat{x}_k - x_k \\ &= H_k \tilde{G}_{N,k} W_{k-1} - M_{N,k} W_{k-1} + H_k V_{k-1} \end{aligned} \quad (21)$$

식 (21)에서 알 수 있듯이 상태 추정 오차는 L_k 와는 무관하고 오직 H_k 에만 의존하므로 주어진 성능지수를 만족하는 최적의 H_k 만을 구하면 된다. 여기서 L_k 는 최적의 해 H_k 를 이용하여 식 (20)으로부터 구할 수 있다.

따라서, 이제 다음과 같이 추정 오차의 공분산을 최소화하고 비편향 제약조건을 만족하는 최적 필터 이득 H_k 를 구하면 된다.

$$\min_{H,L} E[e_k^T e_k]$$

subject to

$$H \tilde{C}_{N,k} = A_{k-1,k-N}$$

$$L_k = -H_k \tilde{B}_{N,k} + N_{N,k}$$

이동구간 필터 이득 H_k 를 다음과 같이 분해하고

$$H_k^T = [h_{k,1} \quad h_{k,2} \quad \cdots \quad h_{k,n}] \quad (22)$$

$M_{N,k}$ 행렬의 i 번째 열벡터를 $\beta_{k,i}$ 로 정의하면, i 번째 추정 오차 $e_{k,i}$ 를 다음과 같이 표현할 수 있으며,

$$\begin{aligned} e_{k,i} &= \hat{x}_{k,i} - x_{k,i} \\ &= h_{k,i} \tilde{G}_{N,k} W_{k-1} - \beta_{k,i} W_{k-1} + h_{k,i}^T V_{k-1}, \end{aligned} \quad (23)$$

$A_{k-1,k-N}$ 행렬의 i 번째 열 벡터를 $\alpha_{k,i}$ 로 정의하면, i 번째 비편향 제약조건을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\tilde{C}_{N,k} h_{k,i} = \alpha_{k,i} \quad (24)$$

여기서 $1 \leq i \leq n$ 이다.

식 (23)으로부터 $e_{k,i}^2$ 를 계산하여 기대값을 취하면 다음과 같은 수식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} E[e_{k,i}^2] &= (h_{k,i}^T \tilde{G}_{N,k} - \beta_{k,i}^T)^T Q_{N,k} (h_{k,i}^T \tilde{G}_{N,k} - \beta_{k,i}^T) \\ &\quad + h_{k,i}^T R_{N,k} h_{k,i} \end{aligned} \quad (25)$$

이 수식으로부터 i 번째 상태 추정오차의 공분산은 오직 이동구간 필터 이득의 i 번째 열 벡터에만 영향을 받는 사실을 알 수가 있으며, 다음과 같은 성능지수 관련 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} E[e_{k,i}^2] &= (h_{k,i}^T \tilde{G}_{N,k} - \beta_{k,i}^T)^T Q_{N,k} (h_{k,i}^T \tilde{G}_{N,k} - \beta_{k,i}^T) \\ &\quad + h_{k,i}^T R_{N,k} h_{k,i} + \lambda_{k,i}^T (\tilde{C}_{N,k}^T h_{k,i} - \alpha_{k,i}) \\ &= h_{k,i}^T (\tilde{C}_{N,k} Q_{N,k} \tilde{G}_{N,k}^T + R_{N,k}) h_{k,i} \\ &\quad - \beta_{k,i}^T Q_{N,k} \tilde{C}_{N,k}^T h_{k,i} - h_{k,i}^T \tilde{G}_{N,k} Q_{N,k} \beta_{k,i} \\ &\quad + \beta_{k,i}^T Q_{N,k} \beta_{k,i} + \lambda_{k,i}^T (\tilde{C}_{N,k}^T h_{k,i} - \alpha_{k,i}) \end{aligned} \quad (26)$$

여기서 $\lambda_{k,i}$ 는 i 번째 비편향 제약조건으로부터 구한 라그랑지 승수의 i 번째 열 벡터이다.

본 논문에서 제안하는 이동구간 필터는 추정 오차 공분산을 최소화하도록 설계되기 때문에 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

$$\frac{\partial E[e_{k,i}^2]}{\partial h_{k,i}} = 0, \quad \frac{\partial E[e_{k,i}^2]}{\partial \lambda_{k,i}} = 0 \quad (27)$$

위 조건을 만족시키는 i 번째 이동구간 필터의 이득은 다음과 같이 구할 수 있으며,

$$\begin{aligned} h_{k,i} &= (\tilde{G}_{N,k} Q_{N,k} \tilde{G}_{N,k}^T + R_{N,k})^{-1} (\tilde{G}_{N,k} Q_{N,k} \beta_{k,i} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{N,k}^T \lambda_{k,i}) \\ &= \Pi_{N,k}^{-1} \left(\tilde{G}_{N,k} Q_{N,k} \beta_{k,i} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{N,k}^T \lambda_{k,i} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

여기서 $\Pi_{N,k} = \tilde{G}_{N,k} Q_{N,k} \tilde{G}_{N,k}^T + R_{N,k}$ 이며, 이의 역행렬은 $\tilde{G}_{N,k} Q_{N,k} \tilde{G}_{N,k}^T + R_{N,k}$ 이 양한정(positive definite) 행렬이기 때문에 항상 존재하게 된다.

식 (28) 양변에 $\tilde{C}_{N,k}^T$ 을 곱하면 다음과 같은 수식을 얻을 수 있으며

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{N,k}^T h_{k,i} &= \tilde{C}_{N,k} \Pi_{N,k}^{-1} \left(-\tilde{G}_{N,k} Q_{N,k} \beta_{k,i} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{N,k} \lambda_{k,i} \right) \\ &= \alpha_{k,i} \end{aligned} \quad (29)$$

이로부터 추정 오차의 공분산을 최소화하는 라그랑지 승수의 i 번째 열 벡터를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\lambda_{k,i} = 2 \left(\tilde{C}_{N,k}^T \Pi_{N,k}^{-1} \tilde{C}_{N,k} \right)^{-1} \left[\tilde{C}_{N,k}^T \Pi_{N,k}^{-1} \tilde{G}_{N,k} \times Q_{N,k} \beta_{k,i} - \alpha_{k,i} \right] \quad (30)$$

이 식으로부터 i 번째 이동구간 필터 이득을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} h_{k,i}^T &= \left[\alpha_{k,i}^T - \beta_{k,i}^T Q_{N,k} \tilde{G}_{N,k}^T \Pi_{N,k}^{-1} \tilde{C}_{N,k} \right] \left(\tilde{C}_{N,k}^T \Pi_{N,k}^{-1} \tilde{C}_{N,k} \right)^{-1} \\ &\quad \times \tilde{C}_{N,k}^T \Pi_{N,k}^{-1} + \beta_{k,i}^T Q_{N,k} \tilde{G}_{N,k}^T \Pi_{N,k}^{-1} \end{aligned} \quad (31)$$

식 (22)와 같이 결합하면 다음과 같이 이동구간 필터 이득 H_k 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} H_k &= \begin{bmatrix} A_{k-1,k-N} & M_{N,k} \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \left(\tilde{C}_{N,k}^T \Pi_{N,k}^{-1} \tilde{C}_{N,k} \right)^{-1} \tilde{C}_{N,k}^T \Pi_{N,k}^{-1} \\ Q_{N,k} \tilde{G}_{N,k}^T \Pi_{N,k}^{-1} \left\{ I - \tilde{C}_{N,k} \left(\tilde{C}_{N,k}^T \Pi_{N,k}^{-1} \tilde{C}_{N,k} \right)^{-1} \tilde{C}_{N,k}^T \Pi_{N,k}^{-1} \right\} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (32)$$

식 (32)보다 간단한 형태로 유한 임펄스 응답 필터를 유도하기 위해 다음과 같은 변수들을 정의하면

$$W_{k,1} = \tilde{C}_{N,k}^T R_{N,k}^{-1} \tilde{C}_{N,k} \quad (33)$$

$$W_{k,2} = \tilde{C}_{N,k}^T R_{N,k}^{-1} \tilde{G}_{N,k} \quad (34)$$

$$W_{k,3} = \tilde{G}_{N,k}^T R_{N,k}^{-1} \tilde{G}_{N,k} + Q_{N,k}^{-1} \quad (35)$$

이동구간필터이득 H_k 를 다음과 같이 간단한 형태로 표현할 수 있으며,

$$H_k = \begin{bmatrix} A_{k-1,k-N} & M_{N,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{k,1} & W_{k,2} \\ W_{k,2}^T & W_{k,3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{C}_{N,k}^T \\ \tilde{G}_{N,k}^T \end{bmatrix} R_{N,k}^{-1} \quad (36)$$

식 (20)으로부터 필터이득 L_k 를 다음과 같이 구할 수 있다:

$$\begin{aligned} L_k &= - \begin{bmatrix} A_{k-1,k-N} & M_{N,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{k,1} & W_{k,2} \\ W_{k,2}^T & W_{k,3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{C}_{N,k}^T \\ \tilde{G}_{N,k}^T \end{bmatrix} R_{N,k}^{-1} \tilde{B}_{N,k} \\ &\quad + N_{N,k}. \end{aligned} \quad (37)$$

따라서 이산 시변 시스템에 대한 최적 유한 임펄스 응답 필터를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= \begin{bmatrix} A_{k-1,k-N} & M_{N,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{k,1} & W_{k,2} \\ W_{k,2}^T & W_{k,3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{C}_{N,k}^T \\ \tilde{G}_{N,k}^T \end{bmatrix} R_{N,k}^{-1} \left(Y_{k-1} \right. \\ &\quad \left. - \tilde{B}_{N,k} U_{k-1} \right) + N_{N,k} U_{k-1} \end{aligned} \quad (38)$$

III. 시뮬레이션

이 장에서는 제안한 최적 유한 임펄스 응답 필터와 칼만 필터의 모델 불확실성에 대한 강인성과 수렴성에 대해 수치적 예를 통해 검증한다.

다음 이산 선형 시변 상태 방정식 모델에 대해 고려해 보자.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 1.54 + \delta_k & -0.738 \\ 0.01 \sin(0.01k) + 0.737 & -0.015 + \delta_k \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w_k \\ y_k &= [1 + 0.1 * \delta_k \quad 1 - 0.01k + 0.1 * \delta_k] x_k + v_k \end{aligned} \quad (39)$$

여기서 δ_k 는 모델 불확실성을 표현하기 위한 파라미터로 다음과 같이 설정되었다.

$$\delta_k = \begin{cases} 0.1, & 30 \leq k \leq 100, \\ 0, & otherwise. \end{cases} \quad (40)$$

공정 잡음 및 측정잡음의 공분산 Q, R 은 각각 0.01, 0.02로 설정되었으며, 시뮬레이션을 위한 시스템 및 칼만 필터의 초기 상태는 $x_0 = [0 \ 0]^T$ 으로 설정되었다. 또한, 제안한 최적 유한 임펄스 응답 필터의 설계에 필요한 이동구간의 크기 N 은 5로 설정되었다.

시뮬레이션 결과는 그림 1, 2, 그리고 그림 3과 같으며, 각각 첫 번째 상태와 추정 상태, 두 번째 상태와 추정상태, 그리고 첫 번째 상태 추정 오차를 나타낸 것이다.

먼저 제안한 필터의 강인성을 검증하기 위해 모델 불확실성이 존재하는 $30 \leq k \leq 100$ 구간에서 두 필터의 추정 결과를 비교한다. 그림 1과 그림 2로부터 시스템의 모든 상태에 대해 제안한 최적 유한 임펄스 응답 필터에 의한 추정 상태가 칼만 필터에 의한 추정 상태에 비해 실제 상태에 가까운

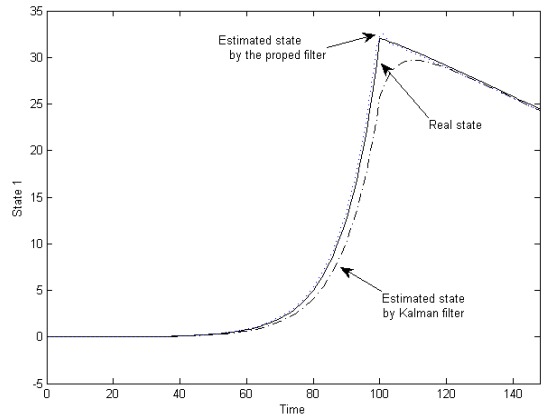


그림 1. 실제 상태 및 추정상태(상태1).
Fig. 1. The real state and estimated states (State 1).

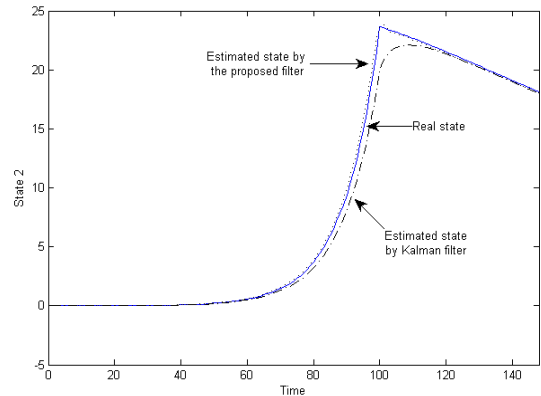


그림 2. 실제 상태 및 추정상태(상태2).
Fig. 2. The real state and estimated states (State 2).

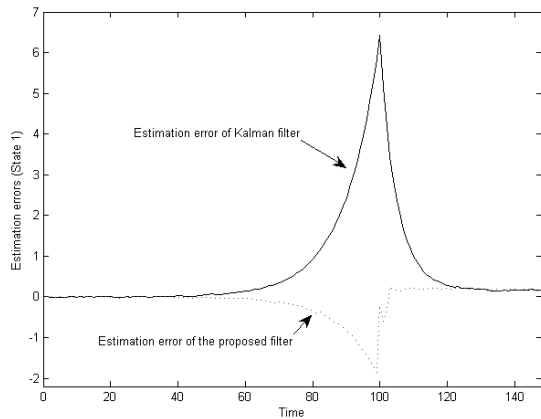


그림 3. 제안된 필터와 칼만필터의 상태 추정 오차(상태 1).

Fig. 3. The estimation errors of the proposed filter and Kalman filter (state 1).

것을 확인할 수 있다. 특히, 그림 3의 그래프로부터 칼만 필터에 의한 추정 결과는 모델 불확실성이 발생하는 시점인 $k=30$ 에서 추정 오차가 매우 빠른 속도로 증가하는 것을 관찰할 수 있으며, 모델 불확실성이 사라지는 $k=100$ 시점에서 매우 큰 추정 오차를 가지는 것을 확인할 수 있다. 반면, 제안된 필터에 의한 추정 오차는 모델 불확실성이 발생한 시점 이후 느린 속도로 증가하며, 최대 추정 오차의 크기도 칼만 필터보다 작은 것을 확인할 수 있어 모델 불확실성에 대해 강인한 특성을 가짐을 알 수 있다.

다음으로 제안된 필터의 빠른 수렴성을 비교하기 위하여 모델 불확실성이 사라지는 $k=100$ 이후의 추정 상태 오차가 0으로 수렴하는데 걸리는 시간을 비교한다. 그림 3으로부터 칼만 필터의 상태 추정 오차는 모델 불확실성으로부터 발생한 누적 오차로 인하여 약 20 샘플링 시간 동안 느리게 0으로 수렴하고 있는 반면, 제안된 필터의 경우는 누적 오차의 영향이 사라지는 이동 구간의 크기인 5 샘플링 시간 이후 추정 오차가 0으로 빠르게 수렴하고 있음을 관찰할 수 있어 제안된 필터가 칼만 필터에 비해 빠른 수렴성을 가짐을 확인할 수 있다.

따라서 본 시뮬레이션을 통해 모델 불확실성에 의해 칼만 필터의 결과가 발산되는 이산 선형 시변 시스템에 대해 제안된 최적 유한 임펄스 응답 필터가 강인성을 가지며, 모델 불확실성이 사라진 이후 빠르게 수렴하는 특성을 가지는 것을 확인할 수 있다.

IV. 결론

본 논문에서는 최적 유한 임펄스 응답 필터를 이산 시변 시스템에 대해 제안하였다. 제안된 필터는 최근의 유한 정보만을 사용하여 추정 오차의 공분산을 최소로 하는 최적 필터로 설계되었으며, 유한한 정보의 사용으로 인해 시스템 모델링의 오차나 초기 조건의 오차가 존재하는 경우 무한 임펄스 응답 필터에서 발생될 수 있는 추정 성능의 저하나 발산 문제를 근원적으로 해결할 수 있다. 특히, 필터 이득의 계산 시 시스템 행렬의 역행렬을 사용하지 않도록 설계되어 기존 연구 결과보다 일반적인 시스템에 적용이 가능하며, 비평형 제약조건을 만족하며 이를 통해 어떠한 초기 조건에 대한 정

보를 사용하지 않도록 설계되었다. 또한, 시뮬레이션을 통해 제안된 최적 유한 임펄스 응답 필터가 무한 임펄스 응답 구조의 칼만 필터보다 모델 불확실성에 대해 강인하고 빠른 수렴성을 가짐을 보였다.

참고문헌

- [1] T. S. Kim, J. Yang, and O. K. Kwon, "A new anti-windup method using the linear quadratic observer," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 16, no. 2, pp. 134-139, Feb. 2010.
- [2] M. Y. Kim, S. T. Ahn, and H. Cho, "Bayesian sensor fusion of monocular vision and laser structured light sensor for robust localization of a mobile robot," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 16, no. 4, pp. 381-390, Apr. 2010.
- [3] H. Heffès, "The effect of erroneous models on the Kalman filter response models," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 11, pp. 541-543, Jul. 1966.
- [4] R. J. Fitzgerald, "Divergence of the Kalman filter," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 16, pp. 736-747, Dec. 1971.
- [5] F. D. Daum and R. J. Fitzgerald, "Decoupled Kalman filters for phased array radar tracking," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 28, pp. 269-283, Mar. 1983.
- [6] A. H. Jazwinski, "Limited memory optimal filtering," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 13, pp. 558-563, Oct. 1968.
- [7] F. C. Schweppe, *Uncertain Dynamics Systems*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1973.
- [8] A. M. Bruckstein and T. Kailath, "Recursive limited memory filtering and scattering theory," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 31, pp. 440-443, May 1985.
- [9] O. K. Kwon, W. H. Kwon, and K. S. Lee, "FIR filters and recursive forms for discrete-time state-space models," *Automatica*, vol. 25, no. 5, pp. 715-728, Sep. 1989.
- [10] W. H. Kwon, K. S. Lee, and J. H. Lee, "Fast algorithm for optimal FIR filter and smoother for discrete-time state-space models," *Automatica*, vol. 30, no. 3, pp. 489-492, Mar. 1994.
- [11] W. H. Kwon, P. S. Kim, and P. Park, "A receding horizon Kalman FIR filter for discrete-time invariant systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 9, pp. 1787-1791, 1999.
- [12] W. H. Kwon, P. S. Kim, and S. H. Han, "A receding horizon unbiased FIR filter for discrete-time state-space models," *Automatica*, vol. 38, no. 3, pp. 545-551, 2002.
- [13] P. S. Kim and W. H. Kwon, "Receding horizon FIR filter and its square-root algorithm for discrete time-varying systems," *Transaction on Control, Automation, and Systems Engineering*, vol. 2, no. 2, pp. 110-115, 2000.



권보규

2002년 인하대학교 전자공학과(공학사). 2005년 서울대학교 전기컴퓨터공학부(공학석사). 2008년 서울대학교 전기컴퓨터공학부(공학박사). 2008년~2010년 삼성중공업 산업기술연구소 책임연구원. 2010년~현재 강원대학교 공학대학 제어계측공학과 전임강사. 관심분야는 추정 및 제어 이론, 로보틱스/로봇 제어, 컴퓨터 기반 제어 시스템 설계 등.